

АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ
ТЕОРЕТИЧНОЇ
ФІЗИКИ
ІМ. М.М. БОГОЛЮБОВА

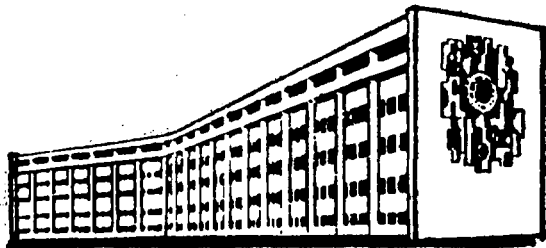
ИТФ-93-12Р
ИТФ-93-12Р

Г.Ф. Филиппов, А.Лопес Трухильо,
И.Ю. Рьбкин

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАТОРА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ
ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ШЕСТИ НУКЛОНОВ НА
ПРОИЗВОДЯЩИХ ИНВАРИАНТАХ

і
Ф

КИЇВ



УДК 539.142

Г.Ф.Филиппов, А.Лопес Трухильо, И.Ю.Рыбкин

Матричные элементы оператора потенциальной энергии системы шести нуклонов на производящих инвариантах

В работе рассчитаны матричные элементы оператора потенциальной энергии /с учетом центрального, спин-орбитального и тензорного взаимодействия/ системы шести нуклонов на производящих функциях, генерирующих кластерный базис каналов $\alpha+d$ и $t+h$

G.F.Filippov, A.Lopez Trujillo, I.Yu.Rybkin

Matrix Elements of the Potential Energy Operator for the Six Nucleon System Between the Generating Invariants

The matrix elements of the potential energy operator (which includes central, spin-orbit and tensor components) are calculated between the generating invariants of the cluster basis describing $\alpha+d$ and $t+h$ configurations of the six-nucleon system.

© 1993 Інститут теоретичної фізики ім.М.М.Боголюбова АН України

Геннадій Федорович Філіппов
Альберто Лопес Трухільо
Ілля Юрійович Рибкін

Матричні елементи оператора потенціальної енергії системи шести нуклонів на виробляючих інваріантах

Затверджено до друку вченою радою ІТФ ім.М.М.Боголюбова АН України

Редактор А.І.Корольова Техн.редактор О.О.Бунькова

Зам. 65 Формат 60x84/16. Обл.-вид.арк. 0,70

Підписано до друку 2.03.1993. Тираж 100. Ціна 72 коп.

Поліграфічна дільниця ІТФ ім.М.М.Боголюбова АН України

Академия наук Украины
Институт теоретической физики
им. Н. Н. Боголюбова

Препринт
ИТФ-93-12Р

Г.Ф. Филиппов, А. Лопес Трухильо, И.Ю. Рыбкин

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАТОРА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ
СИСТЕМЫ ШЕСТИ НУКЛОНОВ НА ПРОИЗВОДЯЩИХ ИНВАРИАНТАХ

Киев - 1993

Последовательный теоретический расчет состояний непрерывного спектра легких ядер на основе микроскопического подхода стал возможным с появлением метода резонирующих групп (МРГ) [1], а затем его алгебраической версии [2-4]. Исходным пунктом теории является многочастичное уравнение Шредингера с нуклон-нуклонным взаимодействием, включающим центральные, спин-орбитальные и тензорные силы. Принцип Паули учитывается точно путем полной антисимметризации волновой функции. Приближение состоит в том, что рассматривается динамика лишь наиболее актуальных для исследуемой нуклонной системы мод кластерных каналов как открытых, так и закрытых.

Ядро ${}^6\text{Li}$ изучалось неоднократно [5-10]. Однако трудности, обусловленные необходимостью привлекать для исследования состояний непрерывного спектра этого ядра нецентральные силы, в полной мере преодолены не были. Цель этой работы - вывод формул для матричных элементов оператора потенциальной энергии системы шести нуклонов на базисных функциях многочастичного гармонического осциллятора. Эти матричные элементы могут быть использованы для изучения ${}^6\text{Li}$ в рамках алгебраической версии МРГ.

1. Первый этап реализации алгебраической версии МРГ состоит в построении производящих инвариантов базиса многочастичных осцилляторных функций для всех учитываемых каналов. Для изучения системы ${}^6\text{Li}$ наиболее важными являются кластерные каналы $d+\alpha$ и $t+h$.

Начнем с канала $d + \alpha$ и оговорим сначала все ограничения, накладываемые на волновую функцию системы в этом канале. Мы будем пренебрегать D -волной дейтрона, а орбитальный момент относительного движения дейтрона и альфа-частицы будем полагать равным нулю или двум, поскольку тензорные силы связывают состояния с этими значениями орбитального момента.

Производящие функции осцилляторного базиса представляют собой детерминанты Слэтера, построенные на кластерных орбиталях [11]:

$$\varphi(R_k, r, \sigma, \tau) = \exp\left[-\frac{1}{2} r^2 + \sqrt{2} R_k r - \frac{1}{2} R_k^2\right] \zeta_k(\sigma, \tau) = \varphi_R, \quad (1)$$

$$\varphi(S_k, r, \sigma, \tau) = \exp\left[-\frac{1}{2} r^2 + \sqrt{2} S_k r - \frac{1}{2} S_k^2\right] \zeta_k(\sigma, \tau) = \tilde{\varphi}_R,$$

$$k = 1, 2,$$

где $\zeta_k(\sigma, \tau)$ - спин-изоспиновые функции нуклонов, которые мы в

дальнейшем будем обозначать $|p\uparrow\rangle$, $|n\downarrow\rangle$ и т.п. Интеграл перекрытия этих орбиталей (с одинаковыми спин-изоспиновыми функциями) имеет вид

$$\langle \varphi_k | \tilde{\varphi}_l \rangle = \exp(R_k S_l). \quad (2)$$

Привлекая орбитали (1), определим часть одночастичных состояний для $d + \alpha$ канала ядра ${}^6\text{Li}$:

$$\begin{aligned} \langle 1 | &= \varphi_1 p\uparrow; & \langle 2 | &= \varphi_1 p\downarrow; & \langle 3 | &= \varphi_1 n\uparrow; \\ \langle 4 | &= \varphi_1 n\downarrow; & \langle 5 | &= \varphi_2 p\uparrow; & \langle 6 | &= \varphi_2 n\uparrow; \end{aligned} \quad (3)$$

и вместе с ними производящую функцию

$$\Phi(R_1, R_2, \{r_i, \sigma_i, \tau_i\}) = \det \begin{vmatrix} \varphi_1(r_1)p\uparrow & \varphi_1(r_2)p\uparrow & \dots & \varphi_1(r_6)p\uparrow \\ \varphi_1(r_1)p\downarrow & \varphi_1(r_2)p\downarrow & \dots & \varphi_1(r_6)p\downarrow \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varphi_2(r_1)n\uparrow & \varphi_2(r_2)n\uparrow & \dots & \varphi_2(r_6)n\uparrow \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Совершенно аналогично на орбиталях $\tilde{\varphi}_k$ определим еще одну производящую функцию $\tilde{\Phi} = \Phi(S_1, S_2, \{r_i, \sigma_i, \tau_i\})$. Интеграл перекрытия производящих функций Φ и $\tilde{\Phi}$ также имеет форму детерминанта [12], каждый элемент которого есть интеграл перекрытия одночастичных функций $\langle k |$ и $| \tilde{l} \rangle$:

$$\langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle = \begin{vmatrix} \langle 1 | \tilde{1} \rangle & \langle 1 | \tilde{2} \rangle & \dots & \langle 1 | \tilde{6} \rangle \\ \langle 2 | \tilde{1} \rangle & \langle 2 | \tilde{2} \rangle & \dots & \langle 2 | \tilde{6} \rangle \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \langle 6 | \tilde{1} \rangle & \langle 6 | \tilde{2} \rangle & \dots & \langle 6 | \tilde{6} \rangle \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Многие матричные элементы последнего детерминанта равны нулю из-за ортогональности спин-изоспиновых функций, и, фактически, детерминант (5) имеет очень простую квазидиагональную форму:

$$\langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle = \begin{vmatrix} \langle 1 | \tilde{1} \rangle & \langle 1 | \tilde{5} \rangle & & & & \\ \langle 5 | \tilde{1} \rangle & \langle 5 | \tilde{5} \rangle & & & & \\ & & \langle 2 | \tilde{2} \rangle & & & \\ & & & \langle 3 | \tilde{3} \rangle & \langle 3 | \tilde{6} \rangle & \\ & & & \langle 6 | \tilde{3} \rangle & \langle 6 | \tilde{6} \rangle & \\ & & & & & \langle 4 | \tilde{4} \rangle \end{vmatrix}. \quad (6)$$

или после раскрытия детерминанта:

$$\langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle = \begin{vmatrix} \langle 1 | \tilde{1} \rangle & \langle 1 | \tilde{5} \rangle \\ \langle 5 | \tilde{1} \rangle & \langle 5 | \tilde{5} \rangle \end{vmatrix} \langle 2 | \tilde{2} \rangle \begin{vmatrix} \langle 3 | \tilde{3} \rangle & \langle 3 | \tilde{6} \rangle \\ \langle 6 | \tilde{3} \rangle & \langle 6 | \tilde{6} \rangle \end{vmatrix} \langle 4 | \tilde{4} \rangle. \quad (7)$$

Следовательно, интеграл перекрытия производящих инвариантов удается представить в мультипликативном виде.

Интегралы перекрытия (2) орбиталей Бринка известны (см. (2))

$$\begin{aligned} \langle 1|\tilde{1}\rangle &= \langle 2|\tilde{2}\rangle = \langle 3|\tilde{3}\rangle = \langle 4|\tilde{4}\rangle = \exp(R_1 S_1); \\ \langle 5|\tilde{5}\rangle &= \langle 6|\tilde{6}\rangle = \exp(R_2 S_2); \\ \langle 1|\tilde{5}\rangle &= \langle 3|\tilde{6}\rangle = \exp(R_1 S_2); \\ \langle 5|\tilde{1}\rangle &= \langle 6|\tilde{3}\rangle = \exp(R_2 S_1). \end{aligned} \quad (8)$$

В результате подстановки (8) в (7) интеграл перекрытия $\langle \Phi|\tilde{\Phi}\rangle$ существенно упрощается:

$$\begin{aligned} \langle \Phi|\tilde{\Phi}\rangle &= \exp(4R_1 S_1 + 2R_2 S_2) - 2\exp(3R_1 S_1 + R_2 S_2 + R_1 S_2 + R_2 S_1) + \\ &+ \exp(2R_1 S_1 + 2R_1 S_2 + 2R_2 S_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь, чтобы отделить движение центра масс системы $\tilde{d}+\alpha$, вместо векторных параметров R_1, R_2 (S_1, S_2) введем новые:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{6}} (4R_1 + 2R_2), \quad R = \frac{2}{\sqrt{3}} (-R_1 + R_2); \\ P &= \frac{1}{\sqrt{6}} (4S_1 + 2S_2), \quad S = \frac{2}{\sqrt{3}} (-S_1 + S_2); \end{aligned}$$

или, если выразить исходные параметры через новые,

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (Q + \frac{1}{\sqrt{2}} R), \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (Q + \sqrt{2} R), \\ S_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (P - \frac{1}{\sqrt{2}} S), \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (P + \sqrt{2} S). \end{aligned} \quad (10)$$

Новые векторные параметры обеспечивают факторизацию интеграла перекрытия производящих инвариантов:

$$\begin{aligned} \langle \Phi|\tilde{\Phi}\rangle &= \exp QP \langle R|S\rangle; \\ \langle R|S\rangle &= \exp RS - 2\exp(\frac{1}{4} RS) + \exp(-\frac{1}{2} RS). \end{aligned} \quad (11)$$

Два последних слагаемых в выражении для $\langle R|S\rangle$ вносят обусловленную влиянием принципа Паули поправку в нормировку базисных состояний. Для того, чтобы подсчитать эту поправку, достаточно разложить экспоненты по степеням RS :

$$\langle R|S\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [1 - 2(1/4)^n + (-1/2)^n] (RS)^n. \quad (12)$$

Поэтому поправка к нормировке базисных состояний, соответствующих l квантам возбуждения, есть

$$\sqrt{1 - 2(1/4)^n + (-1/2)^n}. \quad (13)$$

После перехода к векторам $Q, R; P, S$ происходит факторизация не

только интеграла перекрытия $\langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle$, но и матричных элементов всех трансляционно-инвариантных операторов между производящими функциями Φ и $\tilde{\Phi}$. Так, в частности, если \hat{H} является гамильтонианом ядра 6Li , то

$$\langle \Phi | \hat{H} | \tilde{\Phi} \rangle = \exp QP \langle R | \hat{H} | S \rangle. \quad (14)$$

Теперь

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}, \quad (15)$$

где \hat{T} есть оператор кинетической энергии системы нуклонов, а \hat{U} — оператор потенциальной энергии. Если в операторе \hat{U} выделить вклад центральных обменных нуклон-нуклонных сил гауссовского типа и обозначить этот вклад через \hat{U}_{CF} , то матричный элемент $\langle R | \hat{U}_{CF} | S \rangle$ можно тогда представить как суперпозицию слагаемых вида

$$\langle R | P(a_1, a_2, b) | S \rangle = \exp [a_1 R^2 + a_2 S^2 + b RS], \quad (16)$$

где коэффициенты a_1 , a_2 и b зависят от параметров нуклон-нуклонного потенциала.

При выполнении реальных вычислений вместо орбиталей $\langle 5 |$ и $\langle 6 |$ удобно использовать так называемые биортогональные (по отношению к $\langle 1 |$ и $\langle 3 |$) орбитали. Эти новые орбитали (мы сохраним за ними прежние обозначения) определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle 5 | &= (\varphi_2 - \alpha \varphi_1) p \uparrow, & \langle 6 | &= (\varphi_2 - \alpha \varphi_1) n \uparrow, \\ \alpha &= \exp(-R_1 S_1 + R_2 S_1); \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{5}\rangle &= (\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\alpha} \tilde{\varphi}_1) p \uparrow, & |\tilde{6}\rangle &= (\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\alpha} \tilde{\varphi}_1) n \uparrow, \\ \tilde{\alpha} &= \exp(-R_1 S_1 + R_1 S_2). \end{aligned} \quad (17b)$$

Разумеется, в этом случае интегралы $\langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle$ и $\langle \Phi | \hat{H} | \tilde{\Phi} \rangle$ не изменяются, но упростится формула для подсчета производящего матричного элемента $\langle \Phi | \hat{U} | \tilde{\Phi} \rangle$, оператора потенциальной энергии нуклон-нуклонного взаимодействия $\hat{V} = V(|r_1 - r_2|)$:

$$\langle \Phi | \hat{U} | \tilde{\Phi} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^6 \sum_{k_2=1}^6 [\langle k_1, k_2 | V | k_1, k_2 \rangle - \langle k_1, k_2 | V | k_2, k_1 \rangle], \quad (18)$$

где первое слагаемое в квадратных скобках есть интеграл прямого взаимодействия, второе есть интеграл обменного взаимодействия и, наконец, k_1, k_2 — номера одночастичных орбиталей.

Матричный элемент $\langle R | \hat{U} | S \rangle$ появляется в выражении для $\langle \Phi | \hat{U} | \tilde{\Phi} \rangle$ после выделении множителя, описывающего движение центра инерции. Мы представим этот матричный элемент в виде суммы четырех слагаемых, определяющих вклад центральных, тензорных и спин-орбитальных сил, соответственно:

$$\langle R|\hat{U}|\tilde{S}\rangle = \langle R|\hat{U}_{cf}|S\rangle + \langle R|\hat{U}_{cf}|S\rangle + \langle R|\hat{U}_{cf}|S\rangle + \langle R|\hat{U}_{ls}|S\rangle. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь подробнее каждое из четырех слагаемых. Имея в виду последующее обобщение на случай канала $t + h$, матричный элемент $\langle R|\hat{U}_{cf}|S\rangle$ запишем в виде

$$\langle R|\hat{U}_{cf}|S\rangle = V_{ss} f_{ss} + V_{sp}^{(+)} f_{sp}^{(+)} - V_{sp}^{(-)} f_{sp}^{(-)} + V_{pp} f_{pp}. \quad (20)$$

где первые множители в правой части выражаются через интенсивности центрального обменного нуклон-нуклонного потенциала в разных спин-изоспиновых состояниях нуклонной пары:

$$\begin{aligned} V_{ss} &= 3(V_{31} + V_{13}), \\ V_{sp}^{(\pm)} &= \frac{9}{2} V_{33} \pm \frac{3}{2} V_{31} \pm \frac{3}{2} V_{13} \pm \frac{1}{2} V_{11}, \\ V_{pp} &= V_{31}, \end{aligned} \quad (21)$$

а вторые порождаются непосредственно интегралами перекрытия орбиталей Бринка с гауссовским потенциалом:

$$f_{ss} = z^{3/2} \langle R|S\rangle, \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} f_{sp}^{(\pm)} &= z^{3/2} \left[\exp\left[-\frac{\bar{a}}{2}(R^2 + S^2)\right] + \frac{1}{8}(\pm 3z - 1)RS \right] - \\ &\left[e^{-\frac{\bar{a}}{2}R^2} + e^{-\frac{\bar{a}}{2}S^2} - 1 \right] e^{-\frac{1}{2}RS} \left[e^{\frac{3}{4}RS} - 1 \right], \end{aligned} \quad (22b)$$

$$\begin{aligned} f_{pp} &= z^{3/2} \left\{ \langle R|S\rangle + 2e^{-\frac{\bar{a}}{2}(R^2 + S^2)} \left[e^{\frac{1}{8}(3z-1)RS} + e^{\frac{1}{8}(-3z-1)RS} \right] - \right. \\ &\left. - 2 \left[e^{-\frac{\bar{a}}{2}R^2} + e^{-\frac{\bar{a}}{2}S^2} - 1 \right] \left[e^{\frac{1}{4}RS} + e^{-\frac{1}{2}RS} \right] \right\} \end{aligned} \quad (22c)$$

$$\bar{a} = \frac{3}{8}(1 - z) = \frac{3}{8}a.$$

Оператор кулоновского взаимодействия имеет вид

$$\hat{U}_{Coul} = \sum_{i>j} \frac{e^2}{|r_i - r_j|} \frac{1}{2}(1 + \tau_i) \frac{1}{2}(1 + \tau_j).$$

Общая структура матричного элемента кулоновского взаимодействия \hat{U}_{Coul} подобна правой части (20):

$$\langle R|\hat{U}_{Coul}|S\rangle = V_{ss} f_{ss} + V_{sp}^{(+)} f_{sp}^{(+)} - V_{sp}^{(-)} f_{sp}^{(-)} + V_{pp} f_{pp}. \quad (23)$$

Однако теперь

$$V_{ss} = 1, \quad V_{sp}^{(+)} = 2, \quad V_{sp}^{(-)} = 0, \quad (24)$$

$$f_{ss} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{r_0} \int_0^1 z^{-3/2} f_{ss} d\sqrt{a}. \quad (25)$$

$$z = 1 - a;$$

аналогичные соотношения связывают $f_{sp}^{(+)}$ и $f_{sp}^{(-)}$ с $f_{sp}^{(+)}$ и $f_{sp}^{(-)}$, соответственно. Основной блок, через который выражаются матричные элементы кулоновского взаимодействия, имеет вид

$$F_C(\alpha, \beta, c) = \int_0^1 d\sqrt{a} \exp[-\alpha(\alpha R)^2 - \alpha(\beta S)^2 + 2(c - \alpha\beta)RS]. \quad (26)$$

Для тензорного взаимодействия уместно подсчитать приведенный матричный элемент, чтобы позже, используя его, осуществлять проектирование гамильтониана на состояние с определенным угловым орбитальным моментом.

$$\langle R, S = 1 | \hat{U}_{1f} | S, S = 1 \rangle = 2\sqrt{30} V_1 z^{7/2} \left[C(z - \frac{1}{3}) + \right. \\ \left. + C(z + \frac{1}{3}) + S(z - \frac{1}{3}) - S(z + \frac{1}{3}) - K_{RS}^T [\exp \frac{1}{4} RS + \exp(-\frac{1}{2} RS)] \right], \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C(z) \\ S(z) \end{array} \right\} = \frac{3}{16} e^{-\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}\beta S^2} \left\{ y_{2\mu}(R + S) e^{\frac{3}{8}zRS} \pm y_{2\mu}(R - S) e^{-\frac{3}{8}zRS} \right\}$$

$$K_{RS}^T = \frac{3}{8} \left[y_{2\mu}(R) e^{-\frac{1}{2}\alpha R^2} + y_{2\mu}(S) e^{-\frac{1}{2}\beta S^2} \right].$$

где $y_{LM}(R) = R^L Y_{LM}(\Omega_R)$ - шаровые функции.

В обозначениях приведенного матричного элемента содержится указание на то, что в рассматриваемом нами приближении спины альфа-частицы и дейтрона сохраняются в процессе взаимодействия и остаются равными нулю или единице, соответственно, так что полный спин системы $S = 1$.

Последнее слагаемое в правой части формулы (19) также запишем в виде приведенного матричного элемента:

$$\langle R, S = 1 | \hat{U}_{1g} | S, S = 1 \rangle = (-1)^{S-M} [R \times S] \sqrt{6} z^{5/2} e^{-\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}\beta S^2} \times \\ \times \left[(3V_3 + V_1) e^{\frac{1}{8}(3z+5)RS} + (3V_3 - V_1) \left(e^{\frac{1}{8}(3z-5)RS} - e^{-\frac{1}{8}(3z-1)RS} \right) - \right. \\ \left. - 3(V_3 + V_1) e^{-\frac{1}{8}(3z+1)RS} \right]. \quad (28)$$

Таким образом, мы перечислили все необходимые нам для последующих расчетов производящие матричные элементы оператора потенциальной энергии.

2. Для канала $t + h$ мы по-прежнему будем использовать орбитали (1), но иначе определим одночастичные состояния:

$$\begin{aligned} \langle 1 | &= \varphi_1 p \uparrow; \quad \langle 2 | = \varphi_1 p \downarrow; \quad \langle 3 | = \varphi_1 n \uparrow; \\ \langle 4 | &= \varphi_2 n \uparrow; \quad \langle 5 | = \varphi_2 p \uparrow; \quad \langle 6 | = \varphi_2 n \downarrow. \end{aligned} \quad (29)$$

Построив на этих состояниях детерминант Слетера производящей функции $\Phi(R_1, R_2, \{r_i, \sigma_i, \tau_i\})$, подсчитаем затем интеграл перекрытия функций Φ и $\tilde{\Phi} = \Phi(S_1, S_2, \{r_i, \sigma_i, \tau_i\})$ с единичным оператором:

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle &= \exp(3R_1 S_1 + 3R_2 S_2) - 2 \exp(2R_1 S_1 + 2R_2 S_2 + R_1 S_2 + R_2 S_1) + \\ &+ \exp(R_1 S_1 + R_2 S_2 + 2R_1 S_2 + 2R_2 S_1). \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку нас интересуют состояния системы $t + h$ с определенным значением полного спина S и полного изоспина T :

$$S = 1, \quad T = 0,$$

мы должны добавить к $\langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle$ выражение $P \langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle$, которое получается из $\langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle$ в результате перестановки векторных параметров R_1 и R_2 .

Введем опять новые векторные параметры:

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (Q - R), \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (P - R),$$

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (P - S), \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (P + S).$$

Тогда снова интегралы перекрытия принимают мультипликативный вид:

$$\frac{1}{2} \{ \langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle + P \langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle \} = \exp QP \langle R | S \rangle; \quad (31)$$

$$\langle R | S \rangle = ch RS - ch \left(\frac{1}{3} RS \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} [1 - (1/3)^{2k}] (RS)^{2k}, \quad (32)$$

а поправка к нормировке базисных состояний, обусловленная действием принципа Паули, т.е.

$$\sqrt{1 - (1/3)^{2k}}, \quad (33)$$

опять, как и в случае $d + a$ канала, быстро стремится к единице при росте $n = 2k$.

Снова, как и в случае $d + a$ канала, будем исходить из

следующей структурной формулы для потенциальной энергии:

$$\langle R | \hat{U} | S \rangle = \langle R | \hat{U}_{cf} | S \rangle + \langle R | \hat{U}_{coul} | S \rangle + \langle R | \hat{U}_{tj} | S \rangle + \langle R | \hat{U}_{lg} | S \rangle. \quad (34)$$

Но теперь первое слагаемое мы приведем целиком, не выделяя в нем разные части:

$$\begin{aligned} \langle R | \hat{U}_{cf} | S \rangle &= 3(V_{31} + V_{13})z^{3/2} \langle R | S \rangle + \\ &+ z^{3/2} \left\{ e^{-\frac{\bar{a}}{2}(R^2 + S^2)} \left[(9V_{33} + V_{11}) \left(\operatorname{ch} \frac{1}{3}(z+2)RS - \operatorname{ch} \frac{1}{3}(z-2)RS \right) + \right. \right. \\ &+ (3V_{13} + 5V_{31}) \left. \left(\operatorname{ch} \frac{1}{3}(z+2)RS - 2\operatorname{ch} \frac{1}{3}zRS + \operatorname{ch} \frac{1}{3}(z-2)RS \right) \right] + \\ &+ 8V_{31} \left[e^{-\frac{\bar{a}}{2}(R^2 + S^2)} \operatorname{ch} \frac{1}{3}zRS - \left(e^{-\frac{\bar{a}}{2}R^2} + e^{-\frac{\bar{a}}{2}S^2} - 1 \right) \operatorname{ch} \frac{1}{3}RS \right] \right\}, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\bar{a} = \frac{1}{3}(1-z).$$

Матричный элемент кулоновского взаимодействия имеет вид.

$$\begin{aligned} \langle R | \hat{U}_{coul} | S \rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{r_0} \left\{ \langle R | S \rangle + \right. \\ &+ \int_0^1 \frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\alpha}{6}(R^2 + S^2)} \left[2\operatorname{ch} \frac{1}{3}(3-\alpha)RS - \operatorname{ch} \frac{1}{3}(1-\alpha)RS - \operatorname{ch} \frac{1}{3}(1-\alpha)RS \right] \right\}. \quad (36) \end{aligned}$$

Приведенный матричный элемент тензорных сил для $t + h$ канала состоит из тех же блоков, что и соответствующий матричный элемент для $d + a$ канала:

$$\begin{aligned} \langle R, S=1 | \hat{U}_{tj} | S, S=1 \rangle &= \\ &= 2\sqrt{30} V_{1z} z^{7/2} \left[C(z+2) + 2C(z) + C(z-2) - 4K_{RS}^T \operatorname{ch} \frac{1}{3}RS \right], \\ C(z) &= \frac{1}{6} e^{-\frac{\alpha}{6}(R^2 + S^2)} \left[y_{2\mu}(R+S) e^{\frac{1}{3}zRS} + y_{2\mu}(R-S) e^{-\frac{1}{3}zRS} \right], \quad (37) \end{aligned}$$

$$K_{RS}^T = \frac{1}{3} \left[y_{2\mu}(R) e^{-\frac{\alpha}{6}R^2} + y_{2\mu}(S) e^{-\frac{\alpha}{6}S^2} \right].$$

Укажем в заключение приведенный матричный элемент спин-орбитального взаимодействия

$$\langle R, S=1 | \hat{U}_{lg} | S, S=1 \rangle =$$

$$= -i(R, S) 2\sqrt{2/3} e^{-\frac{a}{6}(R^2+S^2)} \left[3V_3 \operatorname{sh} \frac{1}{3}(z+2)RS - \right. \quad (38)$$

$$\left. - 3V_3 \operatorname{sh} \frac{1}{3}(z-2)RS + 4V_1 \operatorname{sh} \frac{1}{3}zRS \right].$$

Он также во многих отношениях подобен соответствующему матричному элементу канала α .

3. Наконец, рассмотрим матричные элементы, связывающие каналы $\alpha+d$ и $t+h$. Пусть R и S - генераторные векторы канала $t+h$, а R' и S' - генераторные векторы канала $d+a$. Тогда

$$\langle R|S' \rangle = 2 \left[\operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{2}}(RS') - 1 \right] \quad (39)$$

есть интеграл перекрытия производящих инвариантов с единичным оператором. Из (1) следует, что базисные функции разных каналов не ортогональны и, кроме того, они идентичны, если соответствуют минимально допустимому принципу Паули числу осцилляторных квантов.

Связь между каналами осуществляется и через матричные элементы оператора потенциальной энергии. Так для центральных, обменных сил

$$\langle R|\hat{U}_{CF}|S' \rangle = 3(V_{31} + V_{13})z^{3/2} \langle R|S' \rangle +$$

$$+ z^{3/2} \left\{ e^{-\frac{a}{2}(\frac{1}{3}R^2 + \frac{3}{8}S'^2)} \left[(9V_{33} + V_{11}) \left[\operatorname{ch} \frac{1}{2\sqrt{2}}(z+1)RS' - \operatorname{ch} \frac{1}{2\sqrt{2}}(z-1)RS' \right] + \right. \right.$$

$$\left. + 2V_{31} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{2\sqrt{2}}(z+1)RS' + \operatorname{ch} \frac{1}{2\sqrt{2}}(z-1)RS' \right) \right] + \quad (40)$$

$$3(V_{31} + V_{13}) \left(e^{-\frac{1}{6}aR^2} + e^{-\frac{3}{16}aS'^2} - 1 \right) \left[\operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{2}}RS' - 1 \right] +$$

$$2V_{31} \left[e^{-\frac{a}{6}R^2} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{2}}RS' - 1 \right) - e^{-\frac{a}{6}R^2} + e^{-\frac{3}{16}aS'^2} - 1 \right] \left[\operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{2}}RS' + 1 \right] \left. \right\},$$

а матричный элемент оператора кулоновского взаимодействия имеет вид

$$\langle R|\hat{U}_{Coul}|S' \rangle = \sqrt{\frac{e^2}{\pi}} \frac{e^2}{r_0} \left\{ \langle R|S' \rangle + \right.$$

$$\left. + \int d\sqrt{a} \left[3e^{-\frac{a}{6}R^2} - \frac{3}{16}aS'^2 \right] \left[\operatorname{ch} \frac{1}{2\sqrt{2}}(2-a)RS' - \operatorname{ch} \frac{1}{2\sqrt{2}}aRS' \right] + \quad (41)$$

$$+ \left\{ e^{-\frac{aR^2}{6}} + e^{\frac{3}{16}S'^2} - 1 \right\} \left[ch \frac{1}{\sqrt{2}} RS' - 1 \right] \Bigg\}.$$

Приведенные матричные элементы тензорного взаимодействия:

$$\langle R, S=1 | \hat{U}_{TF} | S, S=1 \rangle = \sqrt{30} V_1 \left\{ 2C(z+1) + 2C(z-1) - 4K_{RS}^T - 2K_{S'}^T \left[ch \frac{1}{\sqrt{2}} RS' - 1 \right] \right\}, \quad (42)$$

$$C(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{a}{2} \left(\frac{1}{3} R^2 + \frac{3}{8} S'^2 \right)} \left\{ y_{2\mu} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} R + \sqrt{\frac{3}{8}} S' \right] e^{\frac{z}{2\sqrt{2}} RS} + y_{2\mu} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} R - \sqrt{\frac{3}{8}} S' \right] e^{\frac{z}{2\sqrt{2}} RS} \right\};$$

$$K_{RS'}^T = \frac{1}{3} y_{2\mu}(R) e^{\frac{aR^2}{2}} + \frac{3}{8} y_{2\mu}(S') e^{-\frac{3}{16} a S'^2};$$

$$K_{S'}^T = \frac{3}{8} y_{2\mu}(S') e^{-\frac{3}{16} a S'^2};$$

На этом мы заканчиваем перечисление производящих матричных элементов, необходимых для послеующих вычислений.

4. Напомним, что цель наших вычислений - найти матричные элементы гамильтониана на функциях многочастичного осцилляторного базиса. Переход от полученных нами производящих матричных элементов к матричным элементам на базисных функциях осуществляется с помощью операторов $\mathcal{P}_{nLM}(R)$

$$|nLM\rangle = \mathcal{P}_{nLM}(R) |R\rangle = \frac{1}{(2n+L)!} \frac{\partial^{2n+L}}{\partial R^{2n+L}} \left[\alpha_R Y_{LM}(\Omega_R) |R\rangle \right]_{R=0}.$$

В результате для блока (16) получаем

$$\langle nLM | F(a_1, a_2, b) | n'LM \rangle = N_{nL} N_{n'L} (-1)^{n-n'} \sum_{k=0}^{\bar{n}} \frac{\alpha_1^{n-k} \alpha_2^{n'-k} b^{2k+L}}{(n-k)! (n'-k)! (2k)! (2k+2L+1)!},$$

где $\bar{n} = \min(n, n')$, $N_{nL} = [(2n)! (2n+2L+1)!]^{1/2}$.

Для основного блока м.в. кулоновского взаимодействия (26) получаем

$$\langle nLM | F_0(a, \beta, c) | n'LM \rangle =$$

$$N_n N_{n'} (-1)^{n-n'} \sum_{k=0}^{\bar{n}} \frac{\alpha^{2(n-k)} \beta^{2(n'-k)} (2c)^{2k+L} I(n+n'-2k, 2k+L, \alpha\beta/c)}{(n-k)! (n'-k)! (2k)!! (2k+2L+1)!!},$$

где

$$I(n, n, \gamma) = \int_0^1 x^{2n_1} (1 - \gamma x^2)^{n_2} dx = \sum_{p=0}^{n_2} (-1)^k \frac{n_2!}{p!(n_2-p)!} \frac{\gamma^p}{2(n_1+p)+1}.$$

Теперь у нас есть всё, чтобы построить уравнение Шредингера двухканального приближения в представлении многочастичного осцилляторного базиса.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Вильдермут, Я. Тан. Единая теория ядра. — М.: МИР, 1980.
2. Г. Ф. Филиппов. ЯФ 33 (1980) 928.
3. Г. Ф. Филиппов, В. С. Василевский, Л. Л. Чоповский. ЭЧАЯ 15 (1984) 1338; 16 (1985) 349.
4. G. F. Filippov. Revista Nuovo Cimento 12 num. 9 (1989)
5. H. Kanada et al., Progr. Theor. Phys. 63 (1980) 842.
6. R. Beck, F. Dickmann, R. G. Lovas, Ann. of Phys. 173 (1987) 1.
7. H. Kanada, T. Kaneko, Y. C. Tang, Phys. Rev 38 (1988) 2013.
8. Y. Fujiwara, Y. C. Tang, Preprint UMSI 91/292.
9. Б. В. Данилин и др. ЯФ 53 (1991) 71.
10. V. I. Kukulín et al., Nucl. Phys. A453 (1986) 365.
11. D. M. Brink. The alpha-particle model of light nuclei, In international School Physics "E. Fermi", Course 36, Academic Press, London, New-York, N.Y., 1965, p. 247.
12. P. O. Löwdin. Phys. Rev. 97 (1955) 1474.

Рукопис надійшов 26.02.1993р.