

CN 420101  
CNC 00792

SIP 0067

# 中国核技术信息网

CHINA NUCLEAR SCIENCE & TECHNOLOGY INFORMATION CENTRE

高能粒子对托卡马克气球模稳定作用的数值分析

NUMERICAL ANALYSIS OF ENERGETIC PARTICLES  
STABILIZATION OF BALLOONING MODES IN  
FINITE-ASPECT-RATIO TOKAMAKS

*(In Chinese)*



原子能出版社

中国核技术信息网

China Nuclear Information Centre



何启兵：核工业西南物理研究院实习研究员，  
1988年毕业于重庆大学应用数学系。

He Qibing: Research assistant of Southwestern  
Institute of Physics, CNNC. Graduated from  
Department of Applied Mathematics,  
Chongqing University in 1988.

CNIC-00792

SIP-0067

# 高能粒子对托卡马克气球模 稳定作用的数值分析

何启兵 彭启洋 曲文孝

(核工业西南物理研究院, 成都)

## 摘 要

数值分析了高能捕获粒子对托卡马克气球模不稳定性的影响。利用变步长 RKF 积分方法成功地求解了一类微分-积分方程边值问题。数值结果表明, 气球模不稳定区随高能粒子压强增大而缩小, 充分说明了高能捕获粒子能部分或全部抑制气球模不稳定性。

**NUMERICAL ANALYSIS OF ENERGETIC PARTICLE  
STABILIZATION OF BALLOONING MODES IN  
FINITE-ASPECT-RATIO TOKAMAKS**

*(In Chinese)*

He Qibing   Peng Qiyang   Qu Wenxiao

(SOUTHWESTERN INSTITUTE OF PHYSICS, CHENGDU)

**ABSTRACT**

The effect of energetic trapped particles on the stabilization of ballooning modes in finite-aspect-ratio tokamaks is numerically analyzed. The numerical solution of boundary value problem of an integro-differential equation is successfully obtained by RKF integral method with variable step size. The results show that the instability domain of ballooning modes becomes small along with the increase of energetic particles pressure. The energetic trapped particles can partially or completely suppress the instability of ballooning modes.

# 引言

托卡马克聚变反应装置的品质因素极大地依赖于它所能达到的  $\beta$  (动力压力与磁场压力之比) 极限, 这个  $\beta$  极限值可以通过气球模 MHD 理论推知. 气球模不稳定性是由等离子体压强梯度驱动, 并在磁场坏曲率区内发展起来的一种模. 在 80 年代, 人们对气球模不稳定性进行了广泛的研究, 理论上所预言的  $\beta$  值往往与实验不一致. 如在 PDX 和其它托卡马克上, 当大大超过  $\beta$  极限时, 也未发现气球模. M. N. Rosenbluth, S. T. Tsai 和 M. G. Engquist<sup>[1]</sup> 在 1983 年提出了较好的理论来解释这一现象, 认为高能粒子能产生各向异性的压强分布, 改变堆芯等离子体的对称性, 增大逆磁阱, 从而提供气球模的稳定性, 能够大大影响  $\beta$  极限. 本文研究圆截面托卡马克等离子体平衡, 以及使用一新的压强模型的气球模方程. 采用 RKF 积分方法, 结合打靶法和牛顿迭代数值求解微分-积分方程的双本征值, 得到了环效应和高能粒子都能稳定气球模的结果, 同理论分析<sup>[2]</sup> 一致.

## 1 数学物理问题

考虑圆截面各向异性托卡马克等离子体平衡 (如图 1). 堆芯等离子体各向同性, 高能粒子被捕获在托卡马克外侧坏曲率区, 且有相同的反射点. 选取捕获粒子压强  $p_{\perp}$  为抛物线分布, 即以  $p_{\perp} H(\theta)$  取代 Rosenbluth 的阶跃模型<sup>[1]</sup>.

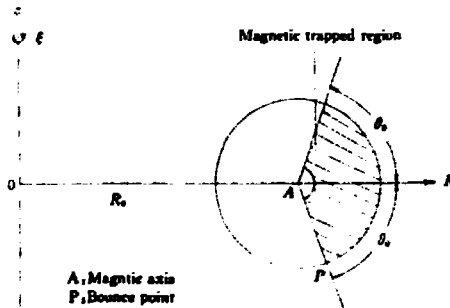


图 1

$$H(\theta) = \begin{cases} 0 & , |\theta| > \theta_0 \\ b\theta^2/\theta_0^2 + (1-b) & , |\theta| \leq \theta_0 \end{cases} \quad (1)$$

$b$  表示压强阱深度, 由于高能粒子迅速穿越磁力线, 其反射平均磁漂移频率  $\omega_m$  远大于本底等离子体扰动频率  $\omega$ , 即  $\omega_m \gg |\omega|$ . 根据低频动能量原理<sup>[2,4]</sup>:

$$\delta W = \delta W_f + \delta W_k \quad (2)$$

其中, 流体项为

$$\delta W_f = \frac{1}{2} \int (ds/B) \{ \sigma |\nabla S|^2 (b \cdot \nabla \Phi)^2 + r (\hat{B}_1 - (\sigma/r) B_0 \cdot \hat{h} \Phi)^2 \}$$

$$- (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k}) \{ \mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\parallel} + (\sigma/\tau) \mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\perp} \} \Phi^2 \quad (3)$$

动力项为

$$\delta W_k = \frac{1}{2} \int dE d\mu \cdot \nabla F_k \frac{\left\{ \int (ds/v_{\parallel}) (\mu \tilde{B}_1 + v_{\parallel}^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} \Phi) \right\}^2}{\int (ds/v_{\parallel}) (\mu \mathbf{e} \cdot \nabla B + v_{\parallel}^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{k})} \quad (4)$$

其中  $\tilde{B}_1$  是平行于磁场  $B = bF$  的扰动,  $\Phi$  为扰动的静电势,  $p_{\parallel}$  和  $p_{\perp}$  为总压强的平行和垂直分量,  $s$  为沿磁力线弧长,  $\tilde{\nabla} = \nabla - (\nabla B) \partial/\partial B$ ,  $\sigma = 1 + (p_{\perp} - p_{\parallel})/B^2$ ,  $\tau = 1 + (\partial p_{\perp}/B \partial B)$ ,  $\mathbf{k} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}$ ,  $E$  为单位质量的粒子能,  $\mu$  为磁矩,  $F_k$  为高能粒子的分布函数,  $S$  为程函, 满足

$$\mathbf{b} \cdot \nabla S = 0, \quad \mathbf{e} = \mathbf{B} \times \nabla S / B^2 \quad (5)$$

假定  $\omega_{\perp} \cdot \omega_{\parallel} > 0$ ,  $\omega_{\perp}$  为逆磁频率. 利用 Schwartz 不等式可得到  $\delta W_k$  的下界<sup>[2]</sup>,  $\delta W_k \geq \delta W_1$ ,

$$\delta W_1 = \frac{1}{2} \frac{\left\{ \int (ds/B) [(\tilde{B}_1/B)(\mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\perp}) + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\parallel}) \Phi] \right\}^2}{\int (ds/B) [B^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla B)(\mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\perp}) + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\parallel})]} \quad (6)$$

对  $\delta W_1 + \delta W_2$  关于  $\tilde{B}_1$  极小化, 得

$$\tilde{B}_1 = (\sigma/\tau) B \Phi \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} - (1/\tau B) (\mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\perp}) A \quad (7)$$

其中

$$A^{(j)} = \frac{\int (ds/B) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k}) [\mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\parallel} + (\sigma/\tau) \mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\perp}] \Phi}{\int (ds/B) \{ (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k}) [\mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\parallel} + (\sigma/\tau) \mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\perp}] - (1/\tau B^2) (\mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\perp}) (\mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\parallel}) \}} \quad (8)$$

这里  $p_{\parallel}$ ,  $p_{\perp}$  分别为各向异性高能捕获粒子压强平行和垂直于磁场  $B$  的分量,  $p_c$  为各向同性磁芯等离子体压强,  $p_{\parallel} = p_c + p_{\parallel h}$ ,  $p_{\perp} = p_c + p_{\perp h}$ . 式 (8) 中的积分在第  $j$  捕获区进行. 同样地, 关于  $\Phi$  极小化, 并将 (7) 式代入可得气球模方程

$$\begin{aligned} B \cdot \nabla [(-|\nabla S|^2/B^2) B \cdot \nabla \Phi] + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k}) [\mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\parallel} + (\sigma/\tau) \mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\perp}] \Phi \\ = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k}) [\mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\parallel} + (\sigma/\tau) \mathbf{e} \cdot \tilde{\nabla} p_{\perp}] A \end{aligned} \quad (9)$$

为了数值分析方便, 将方程 (9) 从磁坐标系  $(\Psi, \chi, \xi)$  变换到  $(r, \theta, \xi)$  坐标系,  $\Psi, \chi, \xi$  分别为极向磁通, 极向角和环向角. 在圆截面上,  $r$  是广义半径,  $r = r(\Psi)$ , 而  $\theta = \theta(\Psi, \chi)$  为极向角. 通过较复杂的推导过程<sup>[2]</sup>, 气球模方程 (9) 可变换成为

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left\{ \sigma \left[ \alpha_0 + \frac{q^2 F^2}{\alpha_0 \left( \left( \frac{r}{R} \right)^2 + q^2 \alpha_0^2 \right)} \right] \frac{d\Phi}{d\theta} \right\} + \left[ \alpha_c \left( 1 + \frac{\sigma}{\tau} \right) + \alpha_0 H(\theta) \left( \frac{\beta_{1h}}{\beta_{\perp h}} + \frac{\sigma}{\tau} \right) \right] D(\theta) \Phi \\ = \alpha_0 H(\theta) \left( \frac{\beta_{1h}}{\beta_{\perp h}} + \frac{\sigma}{\tau} \right) D(\theta) A \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\theta \in (0, \infty)$ ,

$$A = \frac{\int (rd\theta/R) \left( \frac{\beta_{1b}}{\beta_{1a}} + \frac{\sigma}{r} \right) D(\theta) \Phi}{\int (rd\theta/R) \left\{ \left( \frac{\beta_{1b}}{\beta_{1a}} + \frac{\sigma}{r} \right) D(\theta) - \frac{\alpha_c \epsilon^2}{4r \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 + q^2 \epsilon_c^2 \right]} \right\}} \quad (11)$$

上式积分区间为  $\theta \in (-\theta_0, \theta_0)$ 。

$$F = \left( \bar{S} - \frac{\Delta'}{2} \right) (\theta - \theta_0) + (\bar{S} \Delta' + r \Delta'' (\sin \theta - \sin \theta_0)) + \frac{\Delta'^2}{4} (\sin 2\theta - \sin 2\theta_0),$$

$$\bar{S} = \frac{r}{q} \frac{dq}{dr}, \quad q = \frac{r B_r}{R B_\theta \alpha_c}, \quad \alpha_c = -2Rq^2 p'_c / B_\theta^2,$$

$$\alpha_a = -2Rq^2 p'_{1a} / B_\theta^2, \quad \alpha_b = 1 + \Delta' \cos \theta$$

这里  $\bar{S}$  为磁剪切,  $q$  为安全因子,  $\alpha_c$  为高能粒子压强梯度参数,  $B_\theta$ ,  $B_r$  分别为极向和环向磁场。

$$D(\theta) = \frac{1}{2} \epsilon_c^2 \left[ \cos \theta + \frac{r}{q^2 R} + \frac{q^2 F \sin \theta}{\left( \frac{r}{R} \right)^2 + q^2 \epsilon_c^2} \right]$$

$$R = R_0 + \Delta + r \cos \theta, \quad r = 1 + 2\beta_{1b}, \quad \sigma = 1 + \beta_{1b} - \beta_{1a},$$

$$r \Delta'' = -\alpha_c - \alpha_a H(\theta) \frac{\beta_{1b}}{\beta_{1a}}, \quad \epsilon = r/R_0$$

其中, 常数量取如下值:

$$\Delta = \Delta' = 0, \quad R_0 = 3, \quad q = 2, \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_c = \frac{\pi}{4}, \quad \beta_{1a} = 0.0002, \quad \beta_{1b} = 0.002.$$

当压强阱深度  $b$  和环径比例数  $\epsilon$  趋于零的极限情况下, 我们的模型变为 Rosenbluth 的模型<sup>[1]</sup>。方程 (10) 的归一化边界条件为

$$\Phi(0) = 1, \quad \Phi(\infty) = 0 \quad (12)$$

由于本征函数  $\Phi$  充分光滑且为偶函数, 在  $\theta = 0$  处必须满足对称性条件

$$\left( \frac{d\Phi}{d\theta} \right)_{\theta=0} = 0$$

## 2 数值方法

气球模方程(10)是一类特殊的微分-积分方程。该方程系数复杂且具有间断性, 求解区间是无界的,  $\theta \in (0, \infty)$ 。右端项中的积分部分  $A$  的数值不随  $\theta$  变化, 仅仅是依赖于  $\Phi$  分布的一个定数, 其值不具局部性。如果采用差分方法和积分部分离散化求解, 会导致解大型代数非线性本征值的方程组, 随着区间划分点趋于  $\infty$  和分点加密, 计算量急剧增长。同时, 系数的间断性将导致方程差分近似精度较差。双本征值  $(\alpha_c, \bar{S})$  不能完全同时确定, 如本征值  $\bar{S}$  首先给定后, 需要搜索满足方程边界条件和对称条件的对应本征值  $\alpha_c$ , 这样差分离散方法的计算量将大得不能接受。为此, 我们采用 Runge-Kutta-Fehlberg 积分方法求解气球模方程, 利用打靶法和牛顿迭代法计算本征值, 从而克服了上述困难。

为了讨论方便, 考虑一阶微分方程系统

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0 \quad (14)$$

这里,  $y, y_0$  和  $f$  为向量, Runge-Kutta 积分法是单步方法, 利用已计算的解  $y_n \approx y(x_n)$ , 来确定  $x_{n+1} = x_n + h$  点解的近似值, 即  $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ , Runge-Kutta 法的一般形式为

$$g_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^v a_{ij} g_j), i = 1, 2, \dots, v \quad (15)$$

和

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^v b_i g_i \quad (16)$$

$g_i$  为向量, Fehlberg 提出了可以估计局部误差的方法<sup>[3]</sup>,

$$e_n = \|y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}\| \quad (17)$$

这里  $\|\cdot\| = \max|\cdot|$ ,  $\tilde{y}_{n+1}$  为

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{v-1} b'_i g_i \quad (18)$$

系数  $a_{ij}, b_i, b'_i$  和  $c_i$  为常数, 取  $v = 5$  时, 各系数值如表 1.

表 1 Fehlberg 系数

$c_i$	$a_{ij}$				
0	0				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$			
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$		
1	$\frac{439}{216}$	0	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1659}{4104}$	$-\frac{11}{40}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6556}{12825}$	$\frac{28541}{58430}$	$-\frac{9}{59}$
					$\frac{2}{55}$

上述 RKF 方法计算近似解  $y_{n+1}$  和  $\tilde{y}_{n+1}$ , 考虑到截断误差和舍入误差因素, 全局误差为

$$e_{n+1} = \|y_{n+1} - y(x_{n+1})\| = h^p \delta(x_{n+1}) + O(h^{p+1}) \quad (19)$$

和

$$\tilde{e}_{n+1} = \|\tilde{y}_{n+1} - y(x_{n+1})\| = h^{p+1} \tilde{\delta}(x_{n+1}) + O(h^{p+2}) \quad (20)$$

其中,  $\delta$  和  $\tilde{\delta}$  依赖于微分方程和舍入误差, 由于  $\tilde{e}_{n+1}$  比  $e_{n+1}$  的误差阶数高, 即  $\tilde{y}_{n+1}$  较  $y_{n+1}$  更接近于真解  $y(x_{n+1})$ , 因而, 我们可以将 (17) 式的  $e_n$  作为  $e_{n+1}$  的一个近似估计值, 并利用  $e_n$  进行误差测试和步长控制, 如果下式成立

$$e_n \approx \|y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}\| \leq \epsilon \quad (21)$$



那么将  $x_{n-1}$  作为可接受的近似解,若(21)式不成立(或者进行下一步计算),则按  $nh$  形式调整步长,  $\alpha$  为最佳步长因子,即使得调整后的步长  $nh$  恰好能满足误差要求

$$\alpha h^2 \delta(\xi) + O(h^{-1}) = \epsilon, \quad \xi = x_{n-1} \text{ (或 } x_{n-2}), \quad (22)$$

$\epsilon$  为控制误差,同时,按步长  $h$  计算得到的  $\epsilon_n$  有近似式

$$h^2 \delta(x_{n-1}) + O(h^{-1}) \approx \epsilon_n \quad (23)$$

假定  $\delta(x)$  是慢变函数,则可认为  $\delta$  在  $x_{n-1}$  附近近似为常数,利用(22)、(23)式并忽略高阶小量,得到

$$\alpha = P(\epsilon / \epsilon_n)^{1/2}, \quad P \in (0, 1) \quad (24)$$

$P$  为安全系数,人为地加入这个因子,目的在于消除  $\delta(x)$  非常数和高阶小量的影响,一般选取  $P$  为  $0.8 \sim 0.9$  计算就很有效。

方程(10)的求解区间是  $(0, \infty)$ ,在处理无界区间时,我们选取适当大的数  $L$ ,在区间  $(0, L)$  上求解(10)式,所得解  $\Phi$  在  $L$  处的值  $\Phi(L)$ ,可以看做  $\Phi(\infty)$  的近似值,一般取  $L = 10\pi$  很适当。

在打靶法过程中,  $\Phi(L)$  是本征值  $\alpha_c, \bar{S}$  的函数

$$\Phi(L) = F(\alpha_c, \bar{S}) \quad (25)$$

给定  $\bar{S}$  值后,  $\Phi(L)$  仅仅是  $\alpha_c$  的函数,对于取定的初始  $\alpha_c$  值,  $\Phi(L)$  值可能不满足边界条件  $\Phi(L) \approx \Phi(\infty)$ ,必须修正  $\alpha_c$  使得

$$F(\alpha_c, \bar{S}) = 0 \quad (26)$$

应用牛顿迭代法解上式,有

$$\alpha_c^{-1} = \alpha_c - (F')^{-1} F, \quad (27)$$

其中,  $F = F(\alpha_c, \bar{S})$ ,  $F' = \partial F(\alpha_c, \bar{S}) / \partial \alpha_c$ , 函数  $F$  的表达式无从知道,只能获得  $\alpha_c$  对应的函数值  $F$ , 利用后差近似

$$F' = (F - F_{i-1}) / (\alpha_c - \alpha_c^{-1}) \quad (28)$$

将(28)式代入(27)式,得

$$\alpha_c^{-1} = \alpha_c - [F - F_{i-1}]^{-1} F_i (\alpha_c - \alpha_c^{-1}) \quad (29)$$

迭代过程需要两个初始估计值,选取初值  $\alpha_c$ , 计算得  $F_i$ , 再按 1% 的比例扰动  $\alpha_c$ , 即  $\alpha_c = (1 + 1\%) \alpha_c$ , 便可以得到  $F_{i-1}$ , 这样迭代过程就可以继续下去,直到  $F(\alpha_c, \bar{S}) \approx 0$ , 这时  $\alpha_c$  就是对应于给定  $\bar{S}$  的本征值,然后,改变  $\bar{S}$  值重复上述过程,可得到所有本征值对  $(\alpha_c, \bar{S})$ 。

### 3 积分项的处理

气球模方程(10)的右端项依赖于  $\Phi$  的分布,应用 RKF 方法数值计算,需对  $\Phi$  分布进行迭代。为了避免这一迭代过程,我们消除积分项,简化数值计算。

设  $\Phi^{(n)}, \Phi^{(n+1)}$  分别是  $\Lambda = 0$  的方程

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \alpha \left[ \alpha_0 + \frac{q^2 F^2}{\alpha_0 \left( \frac{r}{R} \right) + q^2 \alpha_c^2} \right] \frac{d\Phi^{(n)}}{d\theta} \right\} + \left[ \alpha \left( 1 + \frac{\sigma}{r} \right) + \alpha_0 H(\theta) \left( \frac{\beta_{11}}{\beta_{21}} + \frac{\sigma}{r} \right) \right] D(\theta) \Phi^{(n)} = 0 \quad (30)$$

和  $A=1$  的方程

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \sigma \left[ \alpha_0 + \frac{q^2 F^2}{\alpha_0 \left( \left( \frac{r}{R} \right)^2 + q^2 \alpha_0^2 \right)} \right] \frac{d\Phi^{(1)}}{d\theta} \right\} + \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{\sigma}{r} \right) + \alpha_0 H(\theta) \left( \frac{\beta_{1b}}{\beta_{1a}} + \frac{\sigma}{r} \right) \right] D(\theta) \Phi^{(1)} = \alpha_0 H(\theta) \left( \frac{\beta_{1b}}{\beta_{1a}} + \frac{\sigma}{r} \right) D(\theta) \quad (31)$$

满足边界条件 (12) 和对称条件 (13) 的解。方程 (10) 的解形式地表示为线性组合式

$$\Phi = C \Phi^{(1)} + (1 - C) \Phi^{(2)} \quad (32)$$

将上式代入 (10)、(11) 式，并利用 (30)、(31) 式可得

$$1 - C = A(C \Phi^{(1)} + (1 - C) \Phi^{(2)}) \quad (33)$$

由于  $A$  不显含自变量，则  $C$  为常数，解得

$$C = \left[ 1 + C_0^{-1} \int (rd\theta/R) \left( \frac{\beta_{1b}}{\beta_{1a}} + \frac{\sigma}{r} \right) D(\theta) \Phi^{(1)} \right]^{-1} \quad (34)$$

其中

$$C_0 = \int (rd\theta/R) \left\{ \left( \frac{\beta_{1b}}{\beta_{1a}} + \frac{\sigma}{r} \right) D(\theta) - \frac{\alpha_0 \alpha_0^2}{4r \left( \left( \frac{r}{R} \right)^2 + q^2 \alpha_0^2 \right)} \right\} - \int (rd\theta/R) \left( \frac{\beta_{1b}}{\beta_{1a}} + \frac{\sigma}{r} \right) D(\theta) \Phi^{(1)} \quad (35)$$

同时，(32) 式的  $\Phi$  也满足边界条件和对称条件，故得到的  $\Phi$  为气球模方程 (10)、(12) 和 (13) 式的解。

#### 4 数值结果和分析

考虑变换  $\Phi_i^{(1)} = \Phi_i^{(1)}$ ,  $\Phi_i^{(2)} = \sigma \left\{ \alpha_0 + \frac{q^2 F^2}{\alpha_0 \left( \left( \frac{r}{R} \right)^2 + q^2 \alpha_0^2 \right)} \right\} \frac{d\Phi_i^{(1)}}{d\theta}$ ,  $i = 0, 1$ 。方程 (30)、

(31)、式分别化为一阶方程系统

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_i^{(1)}}{d\theta} = \left\{ \sigma \left[ \alpha_0 + \frac{q^2 F^2}{\alpha_0 \left( \left( \frac{r}{R} \right)^2 + q^2 \alpha_0^2 \right)} \right] \right\}^{-1} \Phi_i^{(1)} \\ \frac{d\Phi_i^{(2)}}{d\theta} = - \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{\sigma}{r} \right) + \alpha_0 H(\theta) \left( \frac{\beta_{1b}}{\beta_{1a}} + \frac{\sigma}{r} \right) \right] D(\theta) \Phi_i^{(2)} \end{cases} \quad (36)$$

和

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_i^{(1)}}{d\theta} = \left\{ \sigma \left[ \alpha_0 + \frac{q^2 F^2}{\alpha_0 \left( \left( \frac{r}{R} \right)^2 + q^2 \alpha_0^2 \right)} \right] \right\}^{-1} \Phi_i^{(1)} \\ \frac{d\Phi_i^{(2)}}{d\theta} = - \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{\sigma}{r} \right) + \alpha_0 H(\theta) \left( \frac{\beta_{1b}}{\beta_{1a}} + \frac{\sigma}{r} \right) \right] D(\theta) \Phi_i^{(2)} + \alpha_0 H(\theta) \left( \frac{\beta_{1b}}{\beta_{1a}} + \frac{\sigma}{r} \right) D(\theta) \end{cases} \quad (37)$$

初始条件为

$$\Phi_1^{(1)} = \Phi_1^{(2)} = 1, \quad \Phi_2^{(1)} = \Phi_2^{(2)} = 0 \quad (38)$$

再应用上述 2—3 的方法就能获得很好的结果。计算中取多组  $\epsilon, \alpha_0$  和  $b$  值进行比较。这里仅给出部分结果。

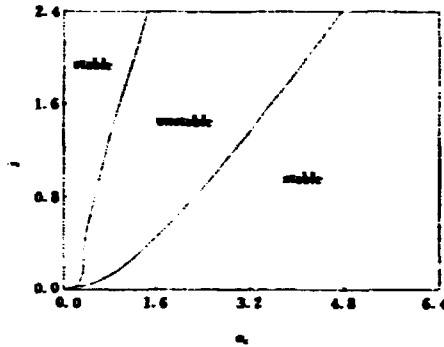


图 2  $b = 0, \epsilon = 0, \alpha_0 = 0$

图 2 与 M. N. Rosenbluth 的结果一致，是理想气球模稳定区。在两个稳定区之间存在不稳定的间隙。

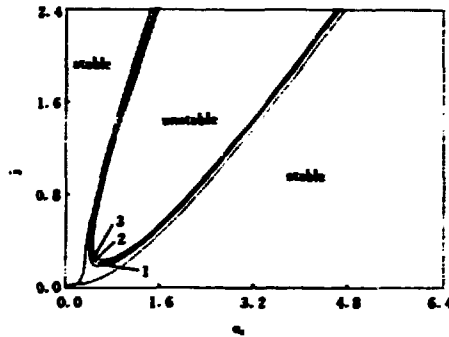


图 3  $b = 0, \alpha_0 = 0.1 - \epsilon = 0.167$   
 $2 - \epsilon = 0.25, 3 - \epsilon = 0.333$

图 3 表明，在没有高能粒子情况下，环效应能改变理想气球模稳定区。随着环效应增大，不稳定区变小，两个分离的稳定区被连接起来了。

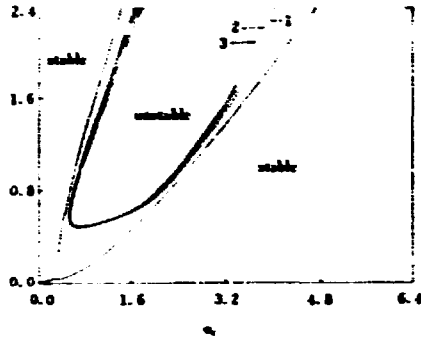


图4  $b=0, \omega_0=1.1, \epsilon=0.167$   
 $2-\epsilon=0.25, 3-\epsilon=0.333$

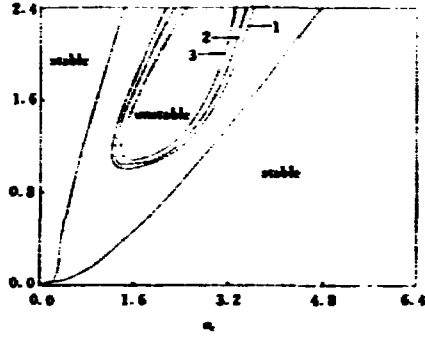


图5  $b=0, \omega_0=2.1, \epsilon=0.167$   
 $2-\epsilon=0.25, 3-\epsilon=0.333$

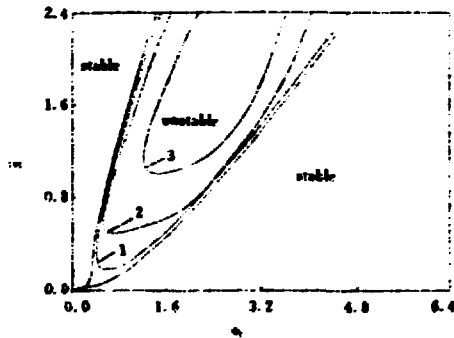


图6  $b=0, \epsilon=0.167, 1-\omega_0=0$   
 $2-\omega_0=1.3, 3-\omega_0=2$

图4~5表明，在有高能粒子情况下，环效应能影响气球模稳定性。环效应增大不稳定区变小。比较两图可见，随着  $\omega_0$  增大，即高能粒子压强增大时，环效应对气球模稳定性影响更为明显。

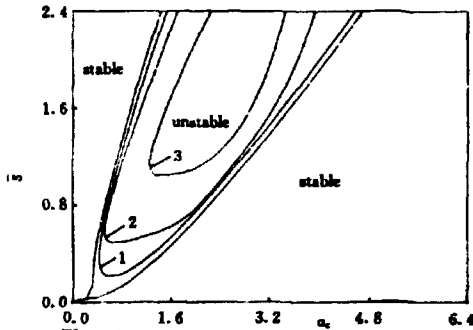


图7  $b = 0, \epsilon = 0.25, 1 - \alpha_0 = 0$   
 $2 - \alpha_0 = 1.3, 3 - \alpha_0 = 2$

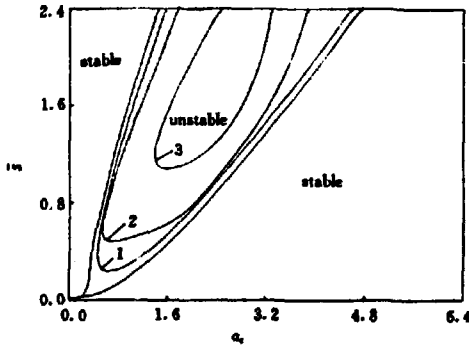


图8  $b = 0, \epsilon = 0.333, 1 - \alpha_0 = 0$   
 $2 - \alpha_0 = 1.3, 3 - \alpha_0 = 2$

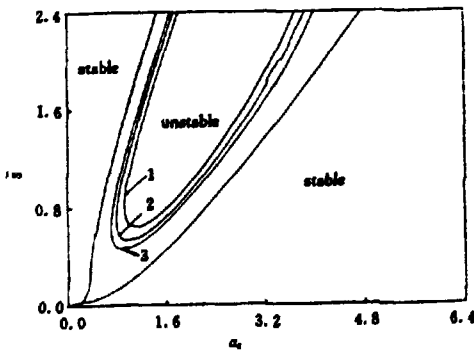


图9  $\epsilon = 0.333, \alpha_0 = 1, 1 - b = 0$   
 $2 - b = 0.5, 3 - b = 0.75$

图6~8表明，高能粒子能大大地影响气球模稳定性。随着 $\alpha_0$ 增大，即高能粒子压强增大，不稳定区大大缩小。

图9表明,高能粒子压强的分布也能影响气球模稳定性。随着 $b$ 值增大,不稳定区稍变宽。

总之,我们考虑在低频 $|\omega| \ll \omega_{ds}$ 情况下高能粒子的深捕获,数值分析表明,高能粒子大大地稳定任何环径比托卡马克气球模(如图6~8所示)。同时,环效应也对气球模起稳定作用(如图3~5所示),而较精细的高能粒子压强分布对气球模起去稳作用,两者的作用都很弱,基本上可以相互抵消。

本工作的数值计算是在VAX-4300机上完成的。最后,对给予帮助的牟宗泽、隋国芳老师表示感谢。

### 参考文献

- [1] Rosenbluth M N, Tsai S T, Van Pam J W, et al., Phys. Rev. Lett. 1983 (21) 1967
- [2] Peng Q Y, He Q B, Qu W X. Energetic particle stablization of ballooning modes in finite-aspect-ratio tokamaks
- [3] Van Dam J W, Rosenbluth M N, Lee Y C. Phys. Fluids 1982 (25), 1349
- [4] Antonsen T M, Lee Y C. phys. Fluids 1982 (25), 132
- [5] Carver M B. Comp. Phys. Commun. 1979 (17), 239

C

高能粒子对托卡马克气球模稳定作用的数值分析

原子能出版社出版

(北京 2108 信箱)

中国核科技报告编辑部排版

核科学技术情报研究所印刷

☆

开本 787×1092 1/16·印张 1/2·字数 12 千字

1993 年 9 月北京第一版·1993 年 9 月北京第一次印刷

ISBN 7-5022-0975-1

TL·622

# CHINA NUCLEAR SCIENCE & TECHNOLOGY REPORT



This report is subject to copyright. All rights are reserved. Submission of a report for publication implies the transfer of the exclusive publication right from the author(s) to the publisher. No part of this publication, except abstract, may be reproduced, stored in data banks or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher, China Nuclear Information Centre, and/or Atomic Energy Press. Violations fall under the prosecution act of the Copyright Law of China. The China Nuclear Information Centre and Atomic Energy Press do not accept any responsibility for loss or damage arising from the use of information contained in any of its reports or in any communication about its test or investigations.

ISBN 7-5022-0975-1  
TL • 622

P.O.Box 2103

Beijing, China

## China Nuclear Information Centre