

FR9402350  
CEA-CONF--11763

---

T93/041

PHYSIQUE THEORIQUE  
**SACLAY**  
— CEA-DSM —

## **Causalité et analyticité en théorie quantique des champs**

**Iagolnitzer D.**

Service de Physique Théorique, CEA-Saclay  
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

*Comptes-rendus du Colloque de Géométrie Analytique*  
*Paris*  
*29 Juin-3 Juillet 1992*

## 1 Introduction

Je me propose dans cet exposé de présenter des résultats, principalement des années 70 et 80, sur la structure causale et analytique des fonctions de Green et amplitudes de collision en théorie des champs. Ces résultats, liés à des développements mathématiques (fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, analyse microlocale), ont permis de largement compléter ceux des années 60 et de préciser des idées auparavant assez floues et partielles. Différents problèmes ouverts seront mentionnés. L'analyse s'applique à des théories avec particules massives et je me restreindrai pour simplifier à une théorie avec un seul type de particule, de masse  $m > 0$  et de spin zéro. La section 2 est une introduction aux différentes formes que prendra la causalité et aux propriétés d'analyticité correspondantes. La section 3 présente les résultats de la théorie générale axiomatique, et la section 4 ceux des théories perturbative et constructive des champs, qui s'appliquent à une large classe de modèles. L'analyse de la section 3 fournit une structure de base, qui est cependant trop générale et encore éloignée de la structure "en termes de particules" qui apparaît en théorie perturbative et dont les "équations de structure" de la Sect. 4 en théorie constructive seront une version plus précise et rigoureuse. Il existe des résultats reliés dans le programme "non linéaire" (voir Sect. 3.1) de la théorie axiomatique, développés auparavant par J. Bros et présentant aussi d'autres aspects mathématiques (théorie de Fredholm dans les complexes,...).

Le texte ci-dessous est lisible sans connaissances préalables, mais bien entendu un grand nombre de détails sont omis. Pour une information et des références plus complètes, on pourra se reporter à mon livre *Scattering in Quantum Field Theories. The axiomatic and constructive approaches* (Princeton University Press, 1993).

J'introduis d'abord ci-dessous les principales quantités auxquelles on s'intéressera. Pour chaque entier  $N \geq 2$ , la *fonction chronologique*  $C_N$  est une distribution tempérée sur  $(\mathbb{R}^d)^N$ , où  $\mathbb{R}^d$  est l'espace temps réel de Minkowski à  $d$  dimensions, dont la transformée de Fourier  $\tilde{C}_N$  donnera les amplitudes de collision physiques à  $N$  particules par restriction à la couche de masse comme indiqué ci-après. Dans le cadre axiomatique (voir Sect. 3.1),  $C_N(x_1, \dots, x_N)$  est définie comme valeur moyenne dans le "vide" du produit chronologique de champs aux points  $x_1, \dots, x_N$ . Plus précisément,  $C_N$  dénotera la fonction "connexe" correspondante. Du point de vue perturbatif,  $C_N$  sera une somme infinie (divergente) d'intégrales de Feynman (éventuellement renormalisées) associées à des graphes connexes de diffusion multiple avec propagateurs "causaux", de la forme  $1/(p^2 - m^2 + i\varepsilon)$  en transformée de Fourier, sur chaque ligne interne : voir Sect. 4.1. Par convention  $x^2 := x_0^2 - \vec{x}^2$  et  $p^2 := p_0^2 - \vec{p}^2$  pour chaque point  $x$  d'espace-temps avec composantes  $x_0$  et  $\vec{x}$  de temps et d'espace, ou chaque vecteur  $p$  d'énergie-impulsion ( $p_0$  énergie,  $\vec{p}$  impulsion).

L'invariance par translation d'espace-temps donne  $C_N(x_1 + a, \dots, x_N + a) = C_N(x_1, \dots, x_N)$  et par suite, dans l'espace dual des variables d'énergie-impulsion,

$$\tilde{C}_N(p_1, \dots, p_N) = \delta^d(p_1 + \dots + p_N) \tilde{c}_N(p_1, \dots, p_N) \quad (1.1)$$

qui traduit la conservation de l'énergie-impulsion, où  $\tilde{c}_N$  est définie sur  $\mathbb{R}^{d(N-1)} = \{p = (p_1, \dots, p_N), p_1 + \dots + p_N = 0\}$ .

Dans une théorie massive, avec masse  $m$ , la fonction “amputée”  $\tilde{C}_N^{\text{amp}}$  est obtenue par multiplication par  $p^2 - m^2$  à  $N = 2$ , où  $p = p_2 = -p_1$  et, à  $N > 2$ , par le produit des facteurs  $p_k^2 - m^2$ ,  $k = 1, \dots, N$ , qui supprimeront des pôles présents dans  $\tilde{C}_N$ , et l’on aura:

$$\tilde{C}_2(p) = (p^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1} \tilde{C}_2^{\text{amp}}(p) \quad (1.2)$$

$$\tilde{C}_N(p_1, \dots, p_N) = \left[ \prod_{k=1}^N (p_k^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1} \right] \tilde{C}_N^{\text{amp}}(p_1, \dots, p_N) \quad (1.3)$$

où le produit (1.3) est bien défini au sens des distributions.

Pour chaque processus physique avec  $N_1$  particules initiales et  $N_2$  finales,  $N_1 + N_2 = N$ , l’amplitude de collision  $S_{N_1, N_2}$  est une distribution sur la variété “couche de masse” définie par les relations  $p_k^2 = m^2$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $(p_k)_0 < 0$  si  $k$  est initial,  $(p_k)_0 > 0$  si  $k$  est final (l’énergie-impulsion physique est  $-p_k$  si  $k$  est initial). La relation  $p_k^2 = m^2$ , soit  $(p_k)_0^2 = \vec{p}_k^2 + m^2$ , est une version relativiste de la relation bien connue  $E = mc^2$  pour une particule libre à impulsion  $\vec{p}_k$  nulle (Nous utilisons un système d’unités où  $c = 1$ ). En théorie des champs, l’amplitude connexe  $S_{N_1, N_2}^c$  peut s’obtenir comme restriction à la couche de masse (bien définie en général au sens des distributions) de  $\tilde{C}_N$ . Elle s’écrit sous une forme analogue à (1.1) (modulo problèmes en certains points exceptionnels).

## 2 Différentes formes de la causalité et de l’analyticité

### 2.1 Causalité

Nous considérons les fonctions à  $N$  points dans les paragraphes (i) à (iii) et les amplitudes de collision dans (iv).

(i) Support dans un cône de sommet d’origine dans l’espace des variables  $x_1, \dots, x_N$  (modulo translation globale).

De telles propriétés ne s’appliquent à la fonction  $C_N$  mais à certaines fonctions à  $N$  points auxiliaires  $C_s$  : voir Sect. 3.2. Dans le cas le plus élémentaire d’une théorie triviale (sans interactions),  $C_N \equiv 0$  si  $N > 2$  et  $C_2$ , transformée de Fourier en  $x_2 - x_1$  de  $(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1}$ , n’a pas de propriété de support. Les fonctions à 2 points “avancée” et “retardée”, transformées de Fourier de  $[(p_0 \pm i\varepsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2]^{-1}$  ont un support (en  $x = x_2 - x_1$ ) dans le cône futur  $\tilde{V}_+(x^2 \geq 0, x_0 \geq 0)$  et passé ( $x^2 \geq 0, x_0 \leq 0$ ) respectivement, où  $x^2 = x_0^2 - \vec{x}^2$ .

Ce résultat restera valable pour les fonctions à 2 points dans une théorie non triviale et peut être généralisé à  $N > 2$  quelconque : Section 3.2.

(ii) Dans une théorie massive,  $C_N$  elle-même décroît exponentiellement pour de grandes séparations de genre espace des points  $x_1, \dots, x_N$  (ou de sous-groupes de points) les uns des autres. Le taux de décroissance dépend de la masse et de la configuration relative des points si l’on pose par exemple  $x_k = \tau u_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , avec  $\tau \rightarrow \infty$ . Cette propriété serait remplacée pour les fonctions non connexes par des propriétés de factorisation, modulo décroissance exponentielle.

Ceci est vérifié dans le cas élémentaire ci-dessus et sera vrai en général. Il s'agit là cependant d'une version faible de la causalité qui ne distingue pas passé et futur.

(iii) Des propriétés traduisant la causalité de manière effective s'appliqueront à l'action  $C_N(\{\varphi_{k,\tau}\})$  de  $C_N$  sur des fonctions test  $\varphi_{k,\tau}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , ayant dans un sens asymptotique ( $\tau \rightarrow \infty$ ) de bonnes propriétés de localisation à la fois dans l'espace temps et, après transformation de Fourier, en énergie-impulsion : il s'agira en fait essentiellement de propriétés de causalité pour des valeurs données des énergies-impulsions  $P_1, \dots, P_N$ . Les fonctions test appropriées sont de la forme :

$$\tilde{\varphi}_{k,\tau}(p_k) = \chi_k(p_k) e^{-\gamma\tau|p_k - P_k|^2} e^{-ip_k \cdot \tau u_k} \quad (2.1)$$

où  $P_k$  et  $u_k$  sont donnés,  $\chi$  est choisie analytique autour de  $P_k$  (on peut choisir  $\chi \equiv 1$  pour une grande portée de l'analyse),  $\gamma > 0$  et  $|p|^2 = (p_0)^2 + \vec{p}^2 (\neq p^2)$ . Le choix (2.1) correspond pour  $\tau \rightarrow \infty$  à une localisation de  $\tilde{\varphi}_{k,\tau}$  au point  $P_k$ , modulo décroissance exponentielle (avec largeur en  $1/\sqrt{\tau}$ ) et de  $\varphi_{k,\tau}$  au point  $\tau u_k$ , à nouveau modulo décroissance exponentielle (avec largeur en  $\sqrt{\tau}$ , petite par rapport à la distance des points  $\tau u_1, \dots, \tau u_N$  quand  $\tau \rightarrow \infty$ ).

L'action de  $C_N$  sur ces fonctions test est une transformée de Fourier généralisée de  $\tilde{C}_N$  et le support essentiel analytique  $ES(\tilde{C}_N)$  au sens que j'ai introduit avec Bros est donc, en chaque point réel  $P = (P_1, \dots, P_N)$  le cône composé des configurations  $u = (u_1, \dots, u_N)$  causales en  $P$  : à savoir par définition celles pour lesquelles  $C_N(\{\varphi_{k,\tau}\})$  ne décroît pas exponentiellement dans un sens approprié quand  $\tau \rightarrow \infty$ . Comme l'on sait depuis les années 70, le support essentiel analytique coïncide avec le front d'onde analytique de Hörmander et le spectre singulier de Sato Kawai Kashiwara introduits indépendamment par des méthodes différentes, cet objet commun étant aussi appelé *microsupport* selon la terminologie mathématique proposée par Sato.

Dans le cas d'une théorie triviale ( $\tilde{C}_2(p) = (p^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1}$ ), on vérifie en tout point physique  $P = (P_1, P_2)$ ,  $P_2 = -P_1$  sur la couche de masse ( $P_2^2 = m^2, (P_2)_0 > 0$ ) :

$$E S_P(\tilde{C}_2) = \{u = (u_1, u_2); u_2 - u_1 = \alpha P_2, \alpha > 0\} \quad (2.2)$$

Il en sera de même pour les théories non triviales à  $N = 2$ . Les résultats — ou conjectures — à  $N$  quelconque seront plus généralement des types suivants :

a) Un résultat axiomatique général (voir Sect. 3.2) qui traduira en particulier l'idée que l'énergie-impulsion ne peut se transmettre (des points initiaux aux finaux, ou des particules initiales aux finales) que dans les cônes futurs (= du passé vers le futur) ; ceci modulo décroissance exponentielle bien spécifiée dans les autres cas.

A  $N = 4$ , pour un processus avec 1,2 initiaux et 3,4 finaux et en un point physique  $P = (P_1, \dots, P_4)$ , l'on a ainsi

$$E S_P(\tilde{C}^{\text{amp}}) = \{u = (u_1, \dots, u_4), u_1 = u_2, u_3 = u_4, u_3 - u_1 \in \bar{V}_+\} \quad (2.3)$$

On peut affiner ce résultat grâce à l'invariance de Lorentz :  $u_3 - u_1 = \alpha(P_3 + P_4), \alpha \geq 0$ , mais il n'y aura pas d'amélioration appréciable en général à  $N > 4$ .

b) Dans le programme axiomatique dit "non linéaire" (voir Sect. 3.1) ou dans la Sect. 4, les résultats ou conjectures indiquent plus précisément que l'énergie-impulsion ne peut se transmettre que par des particules intermédiaires réelles

(stables), sur la couche de masse, selon les lois de la cinématique classique. Ceci, à nouveau dans un sens asymptotique et modulo décroissance exponentielle de forme générale bien spécifiée et donnant les propriétés de microsupport ci-dessous (Les taux précis peuvent ici dépendre de modèle : existence possible de particules instables,...).

Par exemple dans le cas  $N = 4$  ci-dessus

- $ES_P(\tilde{C}^{\text{amp}})$  sera vide ( $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$ ) si  $P$  n'appartient pas à l'une des "surfaces de Landau"  $(P_1 + P_2) = (nm)^2$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ,  $[(P_1 + P_2)^2 \text{ est l'énergie au carré } (P_1 + P_2)_0^2 \text{ du processus dans un système où } \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0]$ .

- Si  $(P_1 + P_2) = (nm)^2$ , il y a possibilité de transfert par  $n$  particules d'énergie-impulsion  $K = -(P_1 + P_2)/n$  (sur la couche de masse comme il se doit) si  $u_3 - u_1 = \alpha K, \alpha > 0$ , de sorte que  $E S_P(\tilde{C}^{\text{amp}}) = \{u; u_1 = u_2, u_3 = u_4, u_3 - u_1 = \alpha K, \alpha \geq 0\}$ .

De manière générale, on aura pour  $N$  quelconque et tout point physique  $P$  d'un processus  $N_1 \rightarrow N_2$  :

$$E S_P(\tilde{C}_N^{\text{amp}}) \subset u\{u; \exists \text{ diagramme classique connexe } \mathcal{D}_+(P, u) \text{ de diffusion multiple, avec interactions ponctuelles}\} \quad (2.4)$$

où, dans un diagramme  $\mathcal{D}_+$ , chaque particule intermédiaire doit avoir une énergie-impulsion  $K_\ell$ , sur la couche de masse, dans la direction de laquelle elle doit se propager  $((v_\ell)_f - (v_\ell)_{in} = \alpha_\ell K_\ell, \alpha_\ell \geq 0$  si  $\ell$  va du vertex  $(v_\ell)_{in}$  au vertex  $(v_\ell)_f$ ), et où l'énergie-impulsion doit être conservée à chaque vertex.  $\mathcal{D}_+(P, u)$  doit avoir de plus les impulsions externes  $P_1, \dots, P_N$ , et les vertex d'interaction où elles sont impliquées doivent se trouver aux points correspondants  $u_1, \dots, u_N$ .

Le microsupport (2.4) est vide si  $P$  n'appartient à aucune surface de Landau  $d'\alpha \geq 0 L_+(G)$  associée à un graphe  $G$  de diffusion multiple (Par définition  $P \in L_+(G)$  s'il existe un  $\mathcal{D}_+(P, u)$  non trivial de structure  $G$ . La "surface de Landau"  $L(G)$ , qui n'est pas toujours une surface, — dont  $L_+(G)$  est une partie — s'obtient en autorisant des  $\alpha_\ell$  réels quelconques = situations "anticausales" possibles, pour les lignes internes dans les relations  $(v_\ell)_f - (v_\ell)_{in} = \alpha_\ell K_\ell$ ). Les surfaces  $L_+(G)$  sont en général des sous variétés régulières de codimension 1 ou plus. Si  $P$  appartient à une seule  $L_+(G)$ , localement de codimension 1, il y a un seul  $\mathcal{D}_+(P, u)$  (modulo translation et dilatations) et donc une seule direction "causale" conormale en  $P$  à  $L_+(G)$ . Il y a un cône de directions causales si  $P$  appartient à plusieurs  $L_+(G_\alpha)$  "reliées" en  $P$  (par contraction des graphes,...). De manière générale  $E S_P$  est l'union des directions causales (ou cônes causaux) précédents, union toujours contenue dans un cône convexe fermé saillant.

(iv) Dans le cas des amplitudes de collision, les propriétés de causalité de type (iii) se rapportent aux amplitudes entre particules initiales et finales de "paquets d'onde" de la forme (2.1) après restriction à la couche de masse. Les théorèmes standards sur la restriction des distributions indiquent que la restriction de la fonction amputée à la couche de masse est bien définie presque partout et  $E S_P(S^c)$  est alors obtenu en remplaçant chaque  $u_k$  par la trajectoire  $(P_k, u_k)$  passant par  $u_k$  et parallèle à  $P_k$ . (Un point dans l'espace cotangent en  $P$  à la couche de masse peut effectivement être caractérisé par un ensemble de telles trajectoires). Aux points  $P$  tels que certains  $P_k$  initiaux, ou certains finaux, sont égaux, les théorèmes standards ne s'appliquent plus

(situation “ $u = 0$ ”, d’où résultats ou conjectures avec certaines modifications. Si on laisse ici ces cas de côté, le microsupport s’obtient à partir de la description donnée dans (iii) : il est à nouveau vide en dehors des  $L_+(G)$  (considérées ici sur la couche de masse), il y a une direction causale en général si  $P \in L_+(G)$  ou un cône convexe fermé saillant dans le cas de surfaces reliées, ou il est l’union de ces directions (ou cônes). L’union n’est plus toujours contenue dans un cône convexe fermé saillant : il existe des cas simples où  $P$  appartient à plusieurs  $L_+(G_\alpha)$  avec des directions causales opposées.

## 2.2 Propriétés d’analyticité

Quand le cône est (contenu dans un cône) convexe fermé saillant, les propriétés de type (i) entraînent, d’après le théorème habituel de la transformée de Fourier–Laplace, que  $\tilde{c}$ , est valeur au bord d’une fonction analytique dans un tube. L’utilisation de la condition spectrale et du théorème de l’edge-of-the-wedge permettront alors d’introduire, pour chaque  $N$ , une fonction analytique à  $N$  points qui en est un prolongement commun, dont la fonction chronologique  $\tilde{c}$  sera aussi valeur au bord : voir Sect. 3.2. Les résultats obtenus dans le cadre axiomatique général sur le domaine initial de la fonction analytique à  $N$  points ou sur son enveloppe d’holomorphie ne donnent à  $N > 4$  que des résultats faibles par restriction à la couche de masse complexe, et donc pour les amplitudes de collision. Les propriétés de type (iii) et (iv), correspondent par les théorèmes généraux de la théorie du support essentiel, ou microsupport, à des propriétés plus raffinées, en particulier des décompositions locales d’intérêt en sommes de valeurs au bord de fonctions analytiques avec (pour chacune) intersection non vide avec la couche de masse complexe, au voisinage de chaque point réel  $P$ .

Dans le cas (iii) a) la somme ne se réduit à un terme que pour des points réels dans une région limitée.

Dans le cas (iii) b) cela est vrai presque partout et on a de plus analyticité en dehors des surfaces de Landau  $d'\alpha \geq 0$ . Cela n’est plus vrai aux points (qui existent toujours mais appartiennent à des surfaces de codimension  $>1$  si  $d > 2$ ) mentionnés à la fin de la Sect. 2.1.

En fait, dans le cadre (partiellement) du programme axiomatique “non linéaire”, et de manière plus complète dans la Sect.4, l’on obtiendra des “équations de structure” représentant des décompositions générales (ou développements ayant des propriétés de convergence) dont les résultats précédents seront des sous-produits.

### 3 La théorie axiomatique

#### 3.1 Le cadre axiomatique

##### Cadre Général

Nous décrivons brièvement le cadre de Wightman pour une théorie avec un champ fondamental  $A$  d'où pourront être engendrés tous les états physiques comme expliqué ci-dessous ; on suppose de plus ci-dessous que  $A$  est un champ scalaire, engendrant un seul type de particule stable, de masse  $m$  (l'on supposera donc que  $A$  n'engendre pas d'états liés).

Le champ  $A$  est une distribution sur l'espace temps de Minkowski, à valeurs opérateurs dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  des états physiques (états "sub specie aeternitatis" : avec toute leur évolution) :  $A(f)$  est un opérateur dans  $\mathcal{H}$  pour les fonctions test  $f$  adéquates. Les axiomes généraux sont

(i) la localité ou commutativité locale ( $A(x)A(y) = A(y)A(x)$  si  $x - y$  est de genre espace).

(ii) l'existence dans  $\mathcal{H}$  d'une représentation unitaire  $g \rightarrow U(g)$  du groupe de Poincaré (Lorentz et translations d'espace temps) et propriétés correspondantes d'invariance,

(iii) la "condition spectrale", version relativiste de la positivité de l'énergie : l'opérateur d'énergie-impulsion  $\mathcal{P}$  (générateur infinitésimal des translations d'espace temps :  $U(a) = e^{i\mathcal{P}\cdot a}$ ,  $\mathcal{P}a = \mathcal{P}_0 a_0 - \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{a}$ ) doit avoir son spectre dans le cône  $\bar{V}_+$  ( $p^2 \geq 0, p_0 \geq 0$ ).

(iv) l'existence dans  $\mathcal{H}$  d'un vecteur "vide"  $|\Omega\rangle$ , unique (modulo multiplication par  $\lambda$  complexe), invariant ( $U(g)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ ), tel que l'espace  $\mathcal{H}$  peut être engendré "par excitation du vide" ou "action du champ sur le vide", au sens suivant : le sous-espace engendré pour les vecteurs de la forme  $A(f_1)\dots A(f_n)|\Omega\rangle$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) est dense dans  $\mathcal{H}$ .

Si l'on souhaite considérer une théorie massive, avec un seul type de particule de masse  $m > 0$ , on partira d'une condition spectrale renforcée : spectre contenu dans  $\{0\}UH_+(m)U\bar{V}_+(2m)$  où

$$\begin{aligned} H_+(m) &= \{p; p^2 = m^2, p_0 > 0\} \\ \bar{V}_+(2m) &= \{p; p^2 \geq 4m^2, p_0 > 0\} \end{aligned}$$

et l'origine,  $H_+(m)$  et  $\bar{V}_+(2m)$  correspondront respectivement au vide, aux états à une particule et aux états multiparticules.

Les axiomes précédents et la condition spectrale renforcée permettent de définir dans  $\mathcal{H}$  deux sous-espaces,  $\mathcal{H}_{\text{in}}$  et  $\mathcal{H}_{\text{out}}$ , d'états physiques qui peuvent être naturellement interprétés comme états de particules libres asymptotiquement avant et après interactions respectivement.

##### Cadre axiomatique du programme "non linéaire"

L'axiome supplémentaire de *complétude asymptotique*, à savoir la condition  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{in}} = \mathcal{H}_{\text{out}}$ , est ajouté : tous les états physiques sont asymptotiquement,

avant et après interactions, des états de particules libres, en général différents (et l'on suppose aussi ici qu'il n'y a pas d'autres types de particules stables, telles que particules "chargées" qui pourraient être engendrées par paires de charges opposées même si le champ est "neutre", auquel cas  $\mathcal{H}$  serait plus grand que  $\mathcal{H}_{\text{in}} = \mathcal{H}_{\text{out}}$ ).

### *Produits et fonctions chronologiques*

Le produit chronologique  $\mathcal{C}(x_1, \dots, x_N)$  (au sens des distributions) des opérateurs  $A(x_1), \dots, A(x_N)$  aux points  $x_1, \dots, x_N$  est obtenu en rangeant, dans le produit, les opérateurs selon l'ordre des composantes de temps de  $x_1, \dots, x_N$ . La fonction chronologique (non connexe) est définie comme  $\langle \Omega | \mathcal{C}(x_1, \dots, x_N) | \Omega \rangle$ . En fait, il y a à priori des difficultés aux points coïncidents et le cadre axiomatique ci-dessus est légèrement étendu pour les couvrir.

Chaque fonction non connexe est égale à la fonction connexe plus la somme, sur toutes les partitions non triviales des points  $(x_1, \dots, x_N)$  en sous-groupes, du produit des fonctions connexes correspondantes : ceci définit par induction les fonctions connexes. Ces dernières ont en général des propriétés plus intéressantes et correspondent physiquement à des interactions "impliquant toutes les particules ensemble".

### *3.2 Causalité et fonctions analytiques à $N$ points*

Je suis l'analyse d'Epstein–Glaser–Stora (les Houches, 1975) dans le cadre général. On introduit des fonctions (distributions)  $C_s$ , à  $N$  points associées à des "paracellules"  $s$  de  $(1, \dots, N)$  (où chaque  $s$  est une classe particulière de sous-ensembles  $I$  de  $(1, \dots, N)$ ).  $C_s$  est la valeur moyenne dans le vide, non plus de  $\mathcal{C}(x_1, \dots, x_N)$ , mais d'une combinaison de produits d'opérateurs  $\mathcal{C}$ . Pour  $N = 2$ , il y en a deux, les fonctions "avancée" et "retardée", obtenues en remplaçant  $\mathcal{C}(x_1, x_2)$  par  $\mathcal{C}(x_1, x_2) - \mathcal{C}(x_1)\mathcal{C}(x_2)$  et  $\mathcal{C}(x_1, x_2) - \mathcal{C}(x_2)\mathcal{C}(x_1)$  respectivement ( $\mathcal{C}(x_i) \equiv A(x_i)$ ), et la localité entraîne trivialement la propriété de support  $x_2 - x_1 \in \bar{V}_+$  ou  $x_1 - x_2 \in \bar{V}_+$ . Pour  $N$  quelconque, la localité entraîne encore des propriétés de support qui généralisent le cas  $N = 2$  : voir un exemple dans la Sect. 3.3. Le support est encore un cône convexe fermé saillant pour des paracellules particulières appelées *cellules*. Les fonctions  $\tilde{c}_s$  correspondantes sont donc (théorème de la transformée de Fourier Laplace) valeurs au bord de fonctions analytiques dans des tubes (parties réelles arbitraires, parties imaginaires dans les cônes ouverts  $\Gamma_s$ , duaux des cônes supports précédents). Par ailleurs, la condition spectrale entraîne, elle, certaines propriétés de support dans l'espace (réel) des énergies-impulsions  $p_1, \dots, p_N$ .

(i) on peut diviser cet espace en régions réelles telles que plusieurs des  $\tilde{c}_s$  coïncident dans chacune. Toutes coïncident en particulier dans un voisinage de l'origine. Par le théorème de l'edge-of-the-wedge il existe alors, pour chaque  $N$ , une fonction unique, prolongement commun des fonctions analytiques ci-dessus, analytique dans l'union des tubes précédents, avec agrandissements locaux (près des réels) par enveloppes convexes de cônes  $\Gamma_s$ , grâce aux théorèmes des tubes locaux.

(ii) dans un voisinage de chaque point réel, la fonction chronologique  $\tilde{c}$  coïncide aussi avec au moins une des  $\tilde{c}_s$ . Elle est donc aussi valeur au bord de la fonction analytique à  $N$  points ci-dessus, selon des directions dépendant ici de la région réelle



considérée.

L'espoir dans ce type d'analyse est d'obtenir en fin de compte des propriétés d'analyticité sur la couche de masse complexe (définie pour chaque  $N$  par les relations  $p_k^2 = m^2$ ,  $p_k \in \mathbb{C}^d$ ,  $p_1 + \dots + p_N = 0$ , et contenant les couches de masse réelles, disjointes, de différents processus physiques), pour en déduire des résultats physiquement intéressants sur les amplitudes de collision. Malheureusement, le domaine "primitif" d'analyticité de la fonction analytique à  $N$  points a une intersection vide avec la couche de masse complexe. Comme ce n'est pas un domaine naturel d'holomorphie, on peut l'agrandir dans le cadre axiomatique général par une utilisation plus complète de techniques d'enveloppe d'holomorphie avec des résultats bons à  $N \leq 4$  mais jusqu'à présent faibles à  $N > 4$ , et il semble bien que les résultats que l'on peut espérer ici resteront très limités.

La question qu'on est amené à se poser alors, et résolue du point de vue local au voisinage de chaque point réel dans la Sect. 3.3, est non plus seulement la recherche de l'enveloppe d'holomorphie, mais de manière plus générale, celle de décompositions d'intérêt de la fonction analytique à  $N$  points en somme (finie) de fonctions dont chacune sera analytique dans un domaine plus large, ayant une intersection non vide avec la couche de masse complexe.

### 3.3 Causalité et structure analytique locale

Je suis ici l'analyse que j'ai donnée récemment (CMP 1992) qui est une version plus directe et un peu plus complète de l'analyse originale de Bros–Epstein–Glaser (1972). On reste ici dans le cadre axiomatique général. Etant donné un point réel  $P = (P_1, \dots, P_N)$ , soit  $S(P)$  l'ensemble des paracellules  $s_1, s_2, \dots$  telles que  $\tilde{c}_{s_i} = \tilde{c}$  dans un voisinage de  $P$  par suite de la condition spectrale. On voit simplement que  $C_N(\{\varphi_{k,\tau}\})$  pour des  $\varphi_{k,\tau}$  de la forme (2.1) décroît exponentiellement avec  $\tau$  si, pour au moins une paracellule  $s_i$  de  $S(P)$ ,  $u \notin \text{support de } C_{s_i}$ , et l'on a en particulier

$$E S_P(\tilde{C}) \subset \bigcap_{s \in S(P)} \{\text{supports des } C_s\} \quad (3.1)$$

Quel que soit  $P$ ,  $S(P)$  est non vide et l'information (3.1) est non triviale. On peut le voir en se restreignant aux fonctions paracellules (qui ne sont pas des cellules à  $N > 2$ ) élémentaires de la forme  $\langle \Omega | C(x_1, \dots, x_N) - C(x(I))C(x(J)) | \Omega \rangle$  où  $J = (1, \dots, N) \setminus I$  (paracellule  $s$  composée de l'unique sous-ensemble  $I$ ). La localité et la définition du  $\mathcal{C}$ -produit entraînent la propriété de factorisation

$$\mathcal{C}(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{C}(x(I))\mathcal{C}(x(J)) \quad (3.2)$$

si  $x(I) \succcurlyeq x(J)$ , ce qui signifie qu'il n'y a pas de  $x_j$  dans le futur de  $x(I)$  (= l'union des cônes futurs fermés  $\tilde{V}(x_i)$  issus de  $x_i$ ,  $i \in I$ ). La propriété de support de  $C_s$  en découle. La condition spectrale entraîne par ailleurs que dans ce cas  $\tilde{c}_s = \tilde{c}$  en dehors de la région  $p_I \in \tilde{V}_+(p_I^2 \geq 0, (p_I)_0 \geq 0)$  où  $p_I$  est la somme des  $p_i$ ,  $i \in I$ . L'on obtient alors en particulier

$$E S_P(\tilde{C}) \subset \{u; \forall I \subset (1, \dots, N) \text{ tel que } u(I) \text{ n'a pas de point } u_j, j \notin I, \text{ dans son futur, alors } P_I \in \tilde{V}_+\} \quad (3.3)$$

Pour une théorie avec masse  $m$ , la condition  $P_I \in \bar{V}_+$  dans (3.3) est remplacée par  $P_I \in H_+(m)U\bar{V}_+(2m)$ , et dans le cas de  $\tilde{c}_N^{\text{amp}}$ , la condition spectrale entraîne une amélioration du résultat. En particulier les points  $u$  dans  $E S_P(\tilde{C}^{\text{amp}})$  pour un point  $P$  d'un processus physique  $N_1 \longrightarrow N_2$  sont tels qu'il n'existe pas de point  $u_j$  extrême initial (=pas d'autre  $u_k$  dans son cône passé) ou extrême final (=pas d' $u_k$  dans son futur) isolé.

Le résultat (3.3) traduit en particulier l'idée générale exprimée dans la Sect. 2 (paragraphe (iii)a).

Le taux de décroissance exponentielle en  $\tau$  dans un cas non causal est (arbitrairement proche de)

$$[\beta(P, u, \gamma)]^{\text{env.}} \quad (3.4)$$

où

$$\beta = \text{Sup}_I \beta_I \quad (3.5)$$

$$\beta_I(P, u, \gamma) = \text{Inf} \left[ \frac{d_I(u)^2}{4\gamma}, r_I(P)^2 \gamma \right] \quad (3.6)$$

Dans (3.4)-(3.6),  $d_I(u)$  est la distance de  $u$  aux points  $v$  tels que  $v(I)$  a des points  $v_j$  dans un futur,  $r_I(P)$  est la distance de  $P$  aux points  $p$  tels que  $p_I \in \bar{V}_+$  ou  $H_+(m)U\bar{V}_+(2m)$ , et  $\beta^{\text{env}}$  est la "fonction enveloppe" de  $\beta$  : la connaissance que le taux est au moins la fonction  $\beta$  entraîne qu'il est en général meilleur (d'où  $\beta^{\text{env}}$ ). Les résultats précédents ont entre autres les conséquences suivantes :

- propriétés d'analyticité des fonctions  $\tilde{c}_N^{\text{amp}}$  : en général décompositions bien spécifiées, dans le voisinage de chaque point réel, en somme de valeurs au bord de fonctions analytiques dans des tubes locaux ayant (localement) une intersection avec la couche de masse complexe : la somme se réduit à un terme dans certains cas, limités en général.

- propriétés de causalité et d'analyticité correspondantes pour les amplitudes de collision.

## 4 Théories perturbative et constructive

### 4.1 L'espace-temps euclidien et les modèles

Bien que l'on souhaite définir ultérieurement les modèles dans l'espace-temps de Minkowski, il est utile et commode de les définir d'abord dans l'espace-temps non physique dit "euclidien" qui correspond à des temps imaginaires purs du point de vue minkowskien:  $x^2$  est alors égal à  $x_0^2 + \bar{x}^2$  (avec conventions appropriées). L'analogue du champ  $A$  et de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de la Sect. 3.1 est alors la donnée d'une mesure de probabilité  $d\mu$  sur l'espace des distributions  $\varphi$  définies sur l'espace-temps euclidien  $\mathbb{R}^d$ . Des conditions générales sur  $d\mu(\varphi)$  permettent de reconstruire, par prolongement analytique (des temps imaginaires aux temps réels), une théorie de Wightman du côté minkowskien satisfaisant les axiomes du cadre général décrit dans la Sect. 3.1 (Osterwalder, Schrader, 1973) avec la condition spectrale générale non renforcée. Les

fonctions à  $N$  points euclidiennes  $S_N$  sont les moments  $\int \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) d\mu(\varphi)$  de la mesure et donnent aussi, par prolongement analytique adéquat, les fonctions à  $N$  points minkowskiennes. Cependant, les procédés ci-dessus ne donnent pas à priori de renseignements sur le spectre de masse, la complétude asymptotique et la structure des fonctions de Green et amplitudes de collision. Une analyse plus raffinée, esquissée plus loin, est nécessaire et s'appliquera pour une large classe de modèles. Un modèle est la donnée d'une mesure  $d\mu(\varphi)$  particulière correspondant à un certain type d'interactions fondamentales des "champs". L'exemple du modèle  $\lambda\varphi_d^4$ ,  $\lambda \geq 0$ , est le suivant modulo modifications pour que  $d\mu$  ait un sens précis et corresponde à un modèle d'intérêt : cela sera le cas en dimension  $d = 2$  ou  $3$  (mais pas  $4$  : il y a de forts doutes sur l'existence de la théorie  $\lambda\varphi_d^4$  comme modèle non trivial à  $d = 4$ , dimension pour laquelle n'existeraient que des modèles plus compliqués tels que théories de jauge, ... qui sortent du cadre de cet exposé):

$$d\mu(\varphi) = Z(\lambda)^{-1} \exp \left\{ -\lambda \int \varphi^4(x) dx - \frac{m_0^2}{2} \int \varphi^2(x) dx - \int (\nabla\varphi)^2 dx \right\} \prod_{x \in \mathbb{R}^d} d\varphi_x \quad (4.1)$$

où  $x$  varie dans l'espace-temps réel euclidien  $\mathbb{R}^d$ , les intégrales sont sur  $\mathbb{R}^d$  et  $d\varphi_x$  est en chaque point  $x$  fixé une mesure de Lebesgue. Le cas d'une théorie libre (sans interactions) correspond à  $\lambda = 0$  et la masse physique  $m$  est alors  $m_0$ ; on vérifie dans ce cas que les fonctions à  $N$  points connexes sont nulles, la fonction à 2 points étant égale au propagateur libre (euclidien au départ)  $C(x_1, x_2)$  transformée de Fourier en  $x_1 - x_2$  de  $(p^2 + m^2)^{-1}$ . A  $\lambda > 0$ ,  $m$  dépend de  $\lambda$  et est différent de  $m_0$ . Selon les modèles, on introduit d'abord des masses et constantes de couplage "renormalisées"  $m_{\text{ren}}$  et  $\lambda_{\text{ren}}$ . Dans les modèles "asymptotiquement libres" comme le modèle de Gross-Neveu en dimension 2 d'espace-temps, la constante de couplage initiale sera en fait nulle, mais non  $\lambda_{\text{ren}}$ . La définition rigoureuse de  $d\mu$  se fait en introduisant d'abord des "cut-offs" adéquats, par exemple en remplaçant  $\mathbb{R}^d$  par un réseau carré ( $d = 2$ ) ou cubique ( $d = 3$ ) de pas  $\chi$  et contenu dans une boîte  $\Lambda$ , et en étudiant les limites ( $\chi \rightarrow 0$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$  dans le cas précédent). D'autres types de cut-offs ("ultraviolets" et "infrarouges") sont aussi utilisés. Nous commençons dans la Sect. 4.2 par l'approche perturbative.

#### 4.2 L'approche perturbative

Cette approche, non rigoureuse, a joué et joue toujours un rôle heuristique important. On développe  $\exp -\lambda \int \varphi^4$  par rapport à  $\lambda$ . La fonction connexe à  $N$  points  $S_N$  peut s'écrire alors, après quelques manipulations simples, sous la forme

$$S_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{\substack{\text{graphes } G \\ \text{connexes à} \\ n \text{ vertex}}} I_G(x_1, \dots, x_N) \quad (4.2)$$

où chaque  $I_G$  est une intégrale de Feynman associée à un graphe  $G$  connexe de diffusion multiple à  $n$  vertex internes, qui sont des vertex à 4 lignes dans le modèle  $\varphi^4$ , et  $N$  vertex externes.

Plus précisément,  $I_G$  est obtenue en associant un point  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  à chaque vertex externe, un point  $y_j$  dans  $\mathbb{R}^d$  à chaque vertex interne et un propagateur libre (euclidien au départ)  $C(y_\alpha - y_\beta)$  où  $C(x_\alpha - y_\beta)$  à chaque ligne :  $I_G$  est l'intégrale de convolution, sur chaque point  $y_j$  dans  $\mathbb{R}^d$ , du produit de ces propagateurs. En Fourier,  $\tilde{I}_G(p_1, \dots, p_N)$  est le produit de propagateurs  $\tilde{C}(p_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , externes et de l'intégrale  $\int \prod_\ell \tilde{c}(k_\ell) \prod_v \delta(e.m.c.) \prod_\ell dk_\ell$  : une variable d'énergie-impulsions  $k_\ell$  est associée à chaque ligne interne  $\ell$  et une "fonction- $\delta$ " de conservation de l'énergie-impulsion à chaque vertex (Energie-impulsions externes :  $p_1, \dots, p_N$ ).

Les intégrales de Feynman minkowskienne (dont les sommes formelles donneront les fonctions chronologiques à  $N$  points) sont obtenues de manière analogue, avec intégrales minkowskienne et propagateurs causaux (en  $(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-2}$ ).

L'approche perturbative se heurte a priori à deux difficultés :

(i) chaque intégrale de Feynman individuelle peut ne pas avoir de sens, par exemple (pour  $m_0 > 0$ ) être divergente "ultraviolette" (= à l'infini pour les grandes valeurs des variables  $k_\ell$ ). Ce problème est résolu par la théorie de la renormalisation (= modification adéquate de la mesure  $d\mu$ ), qui permet de remplacer la série (4.2) par une nouvelle série (par rapport, selon les modèles, à une constante de couplage renormalisée) avec intégrales de Feynman renormalisées convergentes.

(ii) même après renormalisation, la série, elle, est et reste divergente. On peut, pour certains modèles, montrer des propriétés de type sommabilité au sens de Borel comme sous-produit des méthodes de la théorie constructive.

Nous indiquons simplement ici comment des indications heuristiques sur la structure (minkowskienne) des fonctions chronologiques peuvent être obtenues. Rappelons d'abord que la masse physique  $m$  sera différente de  $m_0$  à  $\lambda \neq 0$ . Des resommations partielles des séries perturbatives seront nécessaires si l'on veut faire des déductions sensées. Elles conduisent à des séries de même type avec propagateurs modifiés avec pôle à la masse physique  $m$ . Ceux-ci ont maintenant d'autres singularités que ces pôles, mais qui ne devraient pas jouer un rôle crucial et nous faisons ci-dessous comme si l'on avait affaire à des intégrales de Feynman avec pôles à la masse  $m$ . Si d'autres problèmes (comme il y en a par exemple pour des modèles avec états liés,...) n'interfèrent pas, on peut alors espérer obtenir des informations heuristiques à partir de l'analyse de la structure des intégrales individuelles.

Celle-ci a été faite d'abord dans les années 50 et surtout 60 et a été complétée et approfondie dans les années 70 par le groupe de Kyoto (Sato, Kawai, Kashiwara,...) dans le cadre de la théorie des microfonctions. Indiquons quelques résultats:

- le microsupport de chaque  $\tilde{I}_G$  en chaque point physique  $P$  est effectivement l'ensemble des  $u$  tels qu'il existe un diagramme  $\mathcal{D}_+(P, u)$ , au sens de la Sect. 2, de structure  $G$ . En particulier, les singularités sont les surfaces de Landau d' $\alpha \geq 0$  de  $G$  et des graphes obtenus par contraction.

- chaque intégrale de Feynman est régulière holonome (au sens de Sato, Kawai, Kashiwara) en ses singularités (du type puissance, log, ...)

*Remarque* : Les fonctions de Green et les amplitudes de collision, elles, ne sont

pas holonomes en général (voir l'analyse de Bros-Iagolnitzer, 1982). Du point de vue perturbatif, cela est dû à l'accumulation en un même point de Landau d'un nombre infini de termes associés à des graphes différents conduisant à la même singularité mais ayant des degrés d'holonomie arbitrairement élevés. Par exemple, de type  $(lnz)^n$ ,  $z = (p_1 + p_2)^2 - 9m^2$ ,  $n$  arbitrairement grand, pour des graphes avec  $n$  sous-ensembles successifs de 3 lignes. (Tous ces graphes conduisent ici à la singularité  $z = 0$ ). La somme conduit alors par exemple à des singularités en  $1/lnz$ , non holonomes.

— on peut étudier les propriétés analytiques dans l'espace des énergies-impulsions complexes et la structure multifeuillets obtenue en "tournant autour" des singularités. Les singularités obtenues sont des singularités de Landau "modifiées" selon l'analyse de Kashiwara Kawai (1978).

Différentes formules de discontinuité, différences entre déterminations obtenues dans différents feuillets, sont intéressantes pour les applications physiques. Certaines sont connues. D'autres peuvent être conjecturées. (Iagolnitzer, 1985) mais ne sont pas démontrées en général. Voir aussi à ce propos la fin de la Sect. 4.3.

#### 4.3 Théorie constructive et approches semi-axiomatiques

La définition rigoureuse des fonctions à  $N$  points dans l'espace-temps euclidien se fait en théorie constructive par des "développements en amas" ("cluster expansions") et — pour les théories avec renormalisation — des développements "d'espace de phase" qui sont une version rigoureuse des méthodes type groupe de renormalisation de Wilson. Ces développements sont plus raffinés — et plus restreints — que les développements perturbatifs et sont maintenant convergents au moins à petite constante de couplage  $\lambda$  ou  $\lambda_{\text{ren}}$ , ou le cas échéant autres petits paramètres. Les idées et travaux de base sont dus en particulier à Glimm et Jaffe dans les années 60 et 70 et ont été développés dans les années 80 par plusieurs groupes pour les théories avec renormalisation. Les travaux principaux ont concerné surtout l'étude des développements les plus simples appropriés à la définition euclidienne des modèles, ainsi qu'à la preuve des conditions euclidiennes permettant de retrouver (voir Sect. 4.1) une théorie satisfaisant le cadre général de Wightman par prolongement analytique (des temps imaginaires aux temps réels).

En vue d'obtenir des renseignements plus précis sur le spectre de masse et de prouver le cas échéant la complétude asymptotique et les résultats souhaités sur la structure causale et analytique des fonctions de Green et amplitudes de collision, d'autres méthodes complémentaires ont été développées d'abord par différents auteurs dans les années 75-82, puis par des méthodes plus générales sous différents aspects par moi-même avec J. Magnen et pour une partie J. Bros, dans les années 85-90. Ces méthodes consistent essentiellement à la mise au point de développements plus fins que les précédents permettant par regroupements de termes d'obtenir des "équations de structure" appropriées, par prolongement analytique de l'espace des énergies-impulsions euclidiennes à l'espace des énergies-impulsions minkowskiennes, à l'étude de différentes régions d'énergie du côté minkowskien.

Ces équations de structure sont des développements "semi-perturbatifs", qui ont maintenant des propriétés de convergence, en termes d'intégrales à la Feynman avec fonctions à deux points adéquates (avec pôle à la masse physique du côté minkowskien)

sur chaque ligne interne et noyaux "irréductibles" adéquats à chaque vertex (Du point de vue perturbatif et pour des théories sans normalisation, ces noyaux sont des sommes d'intégrales de Feynman de graphes ayant des propriétés d'irréductibilité au sens graphique : on ne peut "couper" le graphe qu'en coupant un nombre suffisant de lignes internes selon la voie, c'est-à-dire pour chaque division de l'ensemble des lignes externes en deux sous-ensembles. Du point de vue constructif, on aura à nouveau des propriétés graphiques analogues et ces noyaux irréductibles seront bien définis).

Les équations de structure considérées dépendront de la région d'énergie à explorer du côté minkowskien. Elles sont choisies de telle manière que, du point de vue de la structure analytique des intégrales à la Feynman (puis de leur somme) dans cette région, tout se passe comme si les noyaux irréductibles étaient analytiques et les fonctions à deux points sur les lignes internes étaient aussi analytiques à part leur pôle à la masse physique : les singularités des intégrales du côté minkowskien devraient être engendrées, comme pour les intégrales de Feynman, par les pôles des fonctions à deux points et non par les autres singularités de ces fonctions à deux points et des noyaux irréductibles.

La masse physique  $m$  apparaît elle-même comme le pôle de la vraie fonction à deux points. Par exemple pour une théorie comme  $\lambda\phi^4$  en dimension 2, la fonction à deux points est la somme du propagateur  $\tilde{C}(p) = (p^2 - m_0^2 + i\varepsilon)^{-1}$  et des termes successifs  $\tilde{C}(p)K(p)\tilde{C}(p)$ ,  $\tilde{C}(p)K(p)\tilde{C}(p)K(p)\tilde{C}(p)$ ,... où  $K$  est le noyau 1-particule irréductible bien défini en théorie constructive, analytique dans une "bande" assez large autour de l'eulidien et borné par  $\text{cst } |\lambda|$ , en module, à petit  $\lambda$ . La masse physique  $m(\lambda)$  est le zéro du dénominateur  $p^2 - m_0^2 - K(p)$  qui apparaît dans la somme.

Outre les renseignements sur le spectre de masse et la structure analytique, certaines formules de discontinuité des termes individuels, et par suite de la somme, doivent permettre de prouver la complétude asymptotique.

Mentionnons les limites actuelles de l'analyse. D'une part certaines modifications sont nécessaires en dimension 2 ou 3 où des divergences des séries, dues à des facteurs cinématiques, peuvent apparaître du côté minkowskien. D'autre part, les résultats sont obtenus pour des constantes de couplage de plus en plus petites si l'on veut explorer des régions d'énergie de plus en plus élevée. Enfin, même indépendamment des problèmes précédents, l'étude de la structure analytique des intégrales à la Feynman doit être complétée. Un sous-produit de l'analyse sera alors en particulier la structure causale et analytique "en termes de particules" mentionnée dans la Sect. 2. Comme indiqué à la fin de la Sect. 4.2, différentes formules de discontinuité d'intérêt, conjecturées pour l'instant, restent aussi à démontrer pour les intégrales à la Feynman précédentes.