

BR 9432396
INIS-BR -- 3423

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

MÉTODOS DE TEORIA DE CAMPOS NO
ESTUDO DA SUPERCONDUTIVIDADE EM
SISTEMAS UNIDIMENSIONAIS

Marcio José Martins



Dissertação apresentada ao Instituto de Física e Química de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Física Básica.

Orientador: Prof.Dr. Eduardo Cantera Marino

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

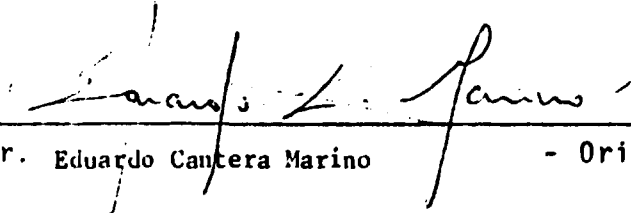
1986

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE _____

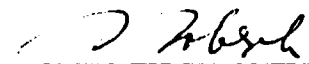
Márcio José Martins

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 14 DE abril DE 1986.


COMISSÃO JULGADORA:



Dr. Eduardo Cantera Marino - Orientador



Dr. Roland Küberle



Dr. Ivan Ventura

A Romeu (in Memoriam) e
Dolores Martins

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Eduardo Cantera Marino, pela sugestão do tema desta dissertação, bem como pela ajuda na solução dos problemas apresentados pela mesma,

à Marcia pela sua ajuda na correção final desta dissertação, paciência e incentivo que contribuíram para o aprimoramento deste trabalho,

aos colegas Umbelino, Chico Bosco, Lula, Caparica, Buriti, Jayme, Paulinho, Filósofo e a Lenilda,

à Nêuri, pela rapidez e presteza que datilografou o manuscrito, à Cecília, Nicete e Wladeres,

à CAPES e FAPESP, pelo suporte financeiro.

RESUMO

Mostramos que a hamiltoniana de Fröhlich em uma dimensão espacial é idêntica à de uma Teoria de Campos exatamente solúvel. O espectro da teoria é calculado. Encontramos um valor crítico da constante de acoplamento onde o sistema torna-se instável, sugerindo uma transição supercondutora. Também propomos e investigamos uma teoria de campos relativística, renormalizável e assintoticamente livre em duas dimensões, com uma interação uma interação quártica entre fermions de N componentes, a qual apresenta geração dinâmica de um gap supercondutor. Temperatura finita é introduzida e para $N \rightarrow \infty$ um valor crítico T_c é encontrado, acima da qual o gap se anula.

ABSTRACT

It is shown that the Fröhlich's hamiltonian in one spatial dimension is identical to that of an exactly solvable field Theory. The spectrum of the theory is computed. A critical coupling is found above which the system becomes unstable, indicating a superconducting transition. We also propose and investigate a renormalizable relativistic field theory model in two space-time dimensions, with quartic self-interaction among N species of fermions, which undergoes dynamical generation of a superconducting gap and is asymptotically free. A finite temperature is introduced and, for $N \rightarrow \infty$ a critical value T_c is found above which the gap vanishes.

ÍNDICE

	pag.
INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO I - DESCRIÇÃO DE UM MODELO DE MATÉRIA CON- DENSADA COM UMA INTERAÇÃO TRILINEAR EN- TRE ELETRONS E FONONS E SUA RELAÇÃO COM UMA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS.....	03
I.A - Descrição do Modelo	03
I.B - Mapeamento do Modelo numa Teoria Quân- tica de Campos	08
I.C - Desacoplamento do Campo dos fonons - Teoria efetiva	10
CAPÍTULO II - BOSONIZAÇÃO DO MODELO: MÉTODO 1	16
II.A - Bosonização da teoria efetiva	16
II.B - Estrutura do espectro e Autoestados de H	20
CAPÍTULO III - BOSONIZAÇÃO DO MODELO - MÉTODO 2	27
III.A - A representação de Mandelstam	27
III.B - Correntes conservadas e equações de Mo- vimento da teoria	34
III.C - Diagonalização da Hamiltoniana	39
III.D - Transição supercondutora do Modelo ...	42

CAPÍTULO IV	- UMA TEORIA DE CAMPOS RELATIVÍSTICA COM GERAÇÃO DINÂMICA DE UM GAP SUPERCONDU- TOR	51
IV.A	- Motivação e Descrição do Modelo	51
IV.B	- Potencial efetivo, renormalizibilida- de e Liberdade Assintótica da Teoria..	53
IV.C	- Discussão de Generalidades da Teoria..	61
 CAPÍTULO V	 - CONCLUSÃO	 64
	- Apêndice A	65
	- Apêndice B	68
	- Apêndice C	74
	- Apêndice D	76
	- Apêndice E	79
 REFERÊNCIAS		 93
 FIGURAS		 100

INTRODUÇÃO

A formulação de modelos de Teoria Quântica de Campos em um espaço-tempo bidimensional é um tema de grande interesse tanto acadêmico como de aplicação prática. Sob o ponto de vista acadêmico, aqui podem ser estudados e testados conceitos relativos a teorias relativísticas da física de partículas elementares, tais como quebra espontânea de simetria, vácuos topológicos, etc., num contexto de modelos exatamente solúveis. No que diz respeito a aplicações práticas, diversos modelos de teoria quântica de campos formulados em um espaço-tempo bidimensional tem se mostrado extremamente úteis. Por exemplo é o caso da teoria Sine-Gordon que descreve a dinâmica de condensados de ondas de densidade de Carga (C.D.W.) a baixa temperatura, ⁽¹⁾, do modelo ϕ^4 que descreve a dinâmica de transições de fase estruturais em ferroelétricos uniaxiais ⁽²⁾, bem como do modelo de Gross-Neveu quirial que descreve o efeito Kondo ⁽³⁾. Neste sentido, esta tese dá suporte a estas idéias, pois em uma primeira etapa mapeamos um modelo de matéria condensada com interação trilinear entre eletrons e fonons acústicos, em uma dimensão, numa Teoria de Campos exatamente solúvel, e argumentamos que este sistema pode apresentar um comportamento supercondutor análogo ao da Teoria B.C.S., para um certo valor crítico da constante de acoplamento da teoria. Em uma segunda etapa, propomos um modelo relativístico, a duas dimensões, com interação quártica entre fermions de N componentes, o qual pa-

ra $N \rightarrow \infty$, apresenta geração dinâmica de um gap superconductor abaixo de uma certa temperatura crítica T_c , idêntica à da teoria B.C.S.

No Capítulo I mapeamos a hamiltoniana de Fröhlich com a relação de dispersão dos elétrons linearizada, numa Teoria de Campos. O Campo dos fonons é desacoplado, recaindo numa Teoria efetiva com interação quártica entre os elétrons.

No Capítulo II e III bosonizamos a teoria efetiva obtida no capítulo anterior, segundo os procedimentos de Mattis e Lieb e de Mandelstam, respectivamente. Em ambos os casos, o espectro exato é encontrado, bem como uma constante de acoplamento crítica G_c acima da qual a bosonização perde sentido. Ainda no Capítulo III, argumentamos que o modelo possa apresentar um comportamento superconductor, quando $G \rightarrow G_c$.

No Capítulo IV, propomos e investigamos um modelo relativístico a duas dimensões com uma interação quártica entre fermions de N componentes. Este, além de ser renormalizável e assintoticamente livre, apresenta geração dinâmica de um gap superconductor o qual se anula a uma temperatura crítica idêntica à da teoria B.C.S.

O Capítulo V será reservado para a conclusão, enquanto que as demonstrações necessárias à compreensão do texto são agrupados nos Apêndices A, B, C, D, E.

CAPÍTULO I

DESCRIÇÃO DE UM MODELO DE MATÉRIA CONDENSADA COM UMA INTERAÇÃO TRILINEAR ENTRE ELÉTRONS E FONONS E SUA RELAÇÃO COM UMA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

Neste capítulo, iremos descrever um modelo de matéria condensada com uma interação trilinear entre elétrons e fonons. Quanto à interação elétron-fonon o modelo é equivalente ao de Fröhlich ^(4,5), mas no que se refere à relação de dispersão dos elétrons este equivale-se ao de Luttinger ⁽⁶⁾.

O modelo será mapeado numa Teoria Quântica de Campos e finalmente o campo dos fonons será desacoplado para obter-se uma teoria efetiva com uma interação quártica entre os elétrons.

I.A. DESCRIÇÃO DO MODELO

Considere um gás de elétrons interagindo com os fonons de uma rede unidimensional com uma relação de dispersão arbitrária. Caso esta interação seja de longo alcance é justificado ⁽⁷⁾ considerar apenas estados eletrônicos nas vizinhanças de $\pm R_f$, de modo que podemos linearizar a relação de dispersão em torno destes pontos. Isto é mostrado na Figura 1. Apesar de aparentemente a linearização deixar o modelo sem esta

do fundamental, veremos posteriormente que isto é fundamental para que o modelo seja mapeado numa Teoria de Campos exatamente solúvel. É interessante observar que este tipo de linearização é devido a Luttinger (6).

Ao linearizarmos a relação de dispersão, efetivamente dividimos o gás de elétrons em duas espécies: "Tipo 1" com relação de dispersão $\epsilon_1(R)$, e "Tipo 2" com relação de dispersão $\epsilon_2(R)$, sendo que então a parte cinética do hamiltoniano eletrônico pode ser escrita como:

$$H_0^{e-} = \sum_{k,\sigma} v_{fk} (C_{k_f+k,\sigma}^\dagger C_{k_f+k,\sigma} - C_{k_f+k,\sigma}^\dagger C_{-k_f+k,\sigma}) \quad (I.1)$$

onde $C_{k,\sigma}^\dagger$, $C_{k,\sigma}$ são operadores de criação e destruição de elétrons com momento k e "spin" σ , $\sigma = \uparrow, \downarrow$.

A interação elétron-fonon também pode ser dividida em dois processos. No primeiro, um elétron com momento nas vizinhanças de k_f ($-k_f$) continua com momento próximo a k_f ($-k_f$) depois do espalhamento por um fonon (espalhamento direto). No segundo processo, um elétron com momento nas vizinhanças de k_f ($-k_f$) é espalhado com momento final próximo a $-k_f$ (k_f) (espalhamento reverso). A interação elétron-fonon é então descrita por

$$\begin{aligned}
H_{e-f} = & \sum_{k_1, k_2} V_1(|k_1 - k_2|) (C_{k_F+k_1, \sigma}^\dagger C_{k_F+k_2, \sigma} + \\
& C_{k_F+k_1, \sigma}^\dagger C_{k_F+k_2, \sigma}) (b_{k_1-k_2} + b_{k_1-k_2}^\dagger) + \\
& + \sum_{k_1, k_2} V_2(|k_1 - k_2|) C_{k_F+k_1, \sigma}^\dagger C_{-k_F+k_2, \sigma} \\
& (b_{2k_F+k_1-k_2} + b_{-(2k_F+k_1-k_2)}^\dagger) \\
& - \sum_{k_1, k_2} V_2(|k_1 - k_2|) C_{-k_F+k_1, \sigma}^\dagger C_{-k_F+k_2, \sigma} \\
& (b_{-2k_F+k_1-k_2} + b_{-(2k_F+k_1-k_2)}^\dagger) \quad (I.2)
\end{aligned}$$

onde b_k^\dagger , b_k são operadores de criação e destruição de fonons.

O primeiro termo da equação (I.2) representa o espalhamento direto e os dois últimos o espalhamento reverso. No nosso trabalho consideraremos apenas o sistema polarônico, onde a interação relevante é entre a densidade de carga e a deformação da rede, implicando exclusivamente na existência de espalhamento direto ($V_2 \cong 0$). Também iremos tratar apenas o caso de fonons acústicos, de modo que o potencial V_1 ^(4,5) é dado por:

$$V_1(k) = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\sqrt{21}} \sqrt{V_s h k} ; k > 0 \\ \frac{\lambda_i}{\sqrt{21}} \sqrt{V_s h k} ; k < 0 \end{cases} \quad (I.3)$$

enquanto que a parte cinética dos fonons é:

$$H_0^\dagger = \sum_k v_s \hbar |k| b_k^\dagger b_k \quad (I.4)$$

Com a finalidade de simplificarmos a notação da parte eletrônica na Hamiltoniana do modelo, é conveniente introduzirmos a seguinte identificação:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{k_F+k} = a_{1k} \\ C_{-k_F+k} = a_{2k} \end{array} \right. \quad (I.5)$$

e das regras de anticomutação dos operadores " C_k^\dagger, C_k ", segue-se que os operadores a_{jk}^\dagger, a_{jk} satisfazem as seguintes relações de anticomutação:

$$\left\{ a_{jk}, a_{ik'}^\dagger \right\} = \delta_{ij} \delta_{k,k'}; \quad \left\{ a_{jk}, a_{ik'} \right\} = 0 \quad (I.6)$$

Agora das equações (I.1) a (I.5), temos que a hamiltoniana total do modelo pode ser escrita na forma:

$$H = H_0^{e-} + H_0^f + H_{e-f} \quad (I.7)$$

onde

$$H_0^{e-} = \sum_{k,\sigma} v_F \hbar k (a_{1k,\sigma}^\dagger a_{1k,\sigma} - a_{2k,\sigma}^\dagger a_{2k,\sigma}) \quad (I.8)$$

$$H_0^f = \sum_k v_s \hbar |k| b_k^\dagger b_k \quad (I.9)$$

$$H_{e-f} = \frac{\lambda_i}{\sqrt{2L}} \sum_{k,q>0} \sqrt{v_s \hbar q} \left[(a_{1k+q,\sigma}^\dagger a_{1k,\sigma} + a_{2k+q,\sigma}^\dagger a_{2k,\sigma}) (b_{-q}^\dagger + b_q) - (a_{1k,\sigma}^\dagger a_{1k+q,\sigma} + a_{2k,\sigma}^\dagger a_{2k+q,\sigma}) (b_q^\dagger + b_{-q}) \right] \quad (I.10)$$

Neste ponto é interessante notarmos que H_0^{e-} não tem estado fundamental, de modo que o nosso modelo descrito pela hamiltoniana acima é mal definido. Isto nos motiva a preencher os estados de energia negativa (mar de Dirac) e introduzir a representação elétron-buraco:

$$a_{1k,\sigma} = \begin{cases} c_{k,\sigma} & ; k \geq 0 \\ d_{-k,\sigma}^\dagger & ; k < 0 \end{cases} \quad (I.11)$$

$$a_{2k,\sigma} = \begin{cases} d_{-k,\sigma}^\dagger & , k \geq 0 \\ c_{k,\sigma} & , k < 0 \end{cases}$$

de modo que nesta nova representação H_0^{e-} é dada por:

$$H_0^{e-} = \sum_{k,\sigma} V_F \hbar |k| (C_{k,\sigma}^\dagger C_{k,\sigma} + d_{k,\sigma}^\dagger d_{k,\sigma}) - 2 \sum_{k>0} k \quad (I.12)$$

onde o primeiro termo da equação (I.12) deve ser considerado a energia cinética eletrônica "física", e o segundo termo é a energia do mar de Dirac.

Veremos que nesta nova representação o modelo pode ser mapeado numa Teoria Quântica de Campos (I.B) e que possui um estado fundamental bem definido (II.B).

I.B. MAPEAMENTO DO MODELO NUMA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

O modelo descrito pela hamiltoniana dada pela equação (I.7) pode ser mapeado numa Teoria Quântica de Campos ao definirmos os campos ϕ e ψ_σ , na representação de Schrödinger:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (e^{-ikx} b_k^\dagger + e^{ikx} b_k) \quad (I.13)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} (e^{-ikx} b_k^\dagger - e^{ikx} b_k), \omega_k = v_s |k|$$

$$\psi_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ikx} \begin{pmatrix} a_{1k,\sigma} \\ a_{2k,\sigma} \end{pmatrix}, \quad \sigma = +, - \quad (I.14)$$

Das equações (I.13) vemos que $\phi(x)$ é um campo escalar real sem massa, enquanto que as equações (I.14) descrevem um campo spinorial sem massa. Isto pode ser visto usando as equações (I.11) em (I.14). De modo que $\psi_{\sigma}(x)$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \psi_{\sigma}(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k>0} e^{ikx} \begin{pmatrix} C_{k,\sigma} \\ d_{k,\sigma}^{\dagger} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k<0} e^{ikx} \begin{pmatrix} d_{k,\sigma}^{\dagger} \\ C_{k,\sigma} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k>0} e^{ikx} C_{k,\sigma} \begin{pmatrix} \theta(k) \\ \theta(-k) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k<0} e^{-ikx} d_{k,\sigma}^{\dagger} \begin{pmatrix} \theta(k) \\ \theta(-k) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ikx} u(k) C_{k,\sigma} + e^{-ikx} v(k) d_{k,\sigma}^{\dagger} \quad (I.15) \end{aligned}$$

onde $u(k)$ e $v(k)$ satisfazem a equação de Dirac sem massa:

$$\gamma^{\mu} k_{\mu} \begin{cases} u(k) \\ v(k) \end{cases} \equiv 0 \quad (I.16)$$

com

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (I.17)$$

Podemos agora usar as equações (I.13) e (I.14) para escrever a hamiltoniana do modelo em termos dos campos ϕ e ψ_σ , obtendo:

$$H_0^{e-} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sum_{\sigma} -i\hbar v_F \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \partial_x \psi_{\sigma}$$

$$H_0^f = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\dot{\phi}^2 + v_S^2 (\partial_x \phi)^2) \quad (I.18)$$

$$H_{e-f} = G \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \partial_x \phi \quad G = \lambda v_S$$

I.C. DESACOPLAMENTO DO CAMPO DOS FONONS - TEORIA EFETIVA

A Lagrangiana deste modelo pode ser escrita como:

$$L = \int dx \left\{ \Pi_{\phi} \dot{\phi} + \sum_{\sigma} \Pi_{\psi_{\sigma}} \dot{\psi}_{\sigma} - H \right\} \quad (I.19)$$

mas segue da definição dos campos ϕ e ψ_{σ} que :

$$\left[\dot{\phi}(x), \dot{\phi}(y) \right] = i \hbar \delta(x - y) \quad (\text{I.20})$$

$$\left\{ \psi_{\sigma}(x), i \hbar \psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \right\} = i \hbar \delta_{\sigma\sigma'} \delta(x - y)$$

assim podemos escolher:

$$\Pi_{\psi_{\sigma}} = i \hbar \psi_{\sigma}^{\dagger} \quad (\text{I.21})$$

$$\Pi_{\phi} = \dot{\phi} + \chi ; \quad \phi, \chi = 0$$

onde ϕ e χ são campos bosônicos independentes, com χ a ser determinado posteriormente.

Agora usando as equações (I.18) e (I.21) na equação (I.19), a Lagrangiana toma a forma:

$$L = \int dx \left\{ \sum_{\sigma} i \hbar \psi_{\sigma}^{\dagger} \partial_t \psi_{\sigma} + i \hbar V_F \psi_{\sigma}^{\dagger} \gamma^5 \partial_x \phi + \frac{1}{2} \left((\partial_t \phi)^2 - V_S^2 (\partial_x \phi)^2 \right) - G \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \partial_x \phi + \dot{\phi} \chi \right\} \quad (\text{I.22})$$

da qual obtemos a seguinte equação de movimento para $\phi(x)$:

$$\partial_t (\chi + \dot{\phi}) = V_S^2 \partial_x^2 \phi + G \partial_x \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \right) \quad (\text{I.23})$$

e se escolhermos a solução:

$$\dot{\phi} = -\chi \quad (\text{I.24})$$

segue que

$$\partial_x \phi = -\frac{G}{V_S^2} \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \right) \quad (\text{I.25})$$

e derivando a equação (I.24) em relação à variável x e (I.25) em relação a t , obtemos:

$$\partial_x \chi = \frac{G}{V_S^2} \partial_t \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \right) \quad (\text{I.26})$$

Por outro lado a Lagrangiana é invariante frente à transformação $\psi_{\sigma} \rightarrow e^{i\theta} \psi_{\sigma}$, o que implica na seguinte lei de conservação:

$$\partial_t \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \right) = V_F \partial_x \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \psi_{\sigma} \right) \quad (\text{I.27})$$

e das equações (I.26) e (I.27), temos:

$$\chi = -\dot{\phi} = -\frac{G}{V_S^2} V_F \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \psi_{\sigma} \right) \quad (\text{I.28})$$

É interessante observarmos que as equações (I.25) e (I.28) nos dão a deformação na rede provocada por uma dada densidade de carga e corrente, respectivamente. Introduzindo finalmente estas equações em (I.28) e (I.22) obtemos a hamiltoniana e Lagrangiana efetivas do modelo:

$$H = \int dx \left[\sum_{\sigma} -ihV_F \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \partial_x \psi + \frac{1}{2} \frac{G^2 V^2}{V_S} \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma_3 \psi_{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{G^2}{V_S^2} \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \right)^2 \right] \quad (I.29)$$

$$L = \int dx \left[\sum_{\sigma} ihV_F \psi_{\sigma}^{\dagger} \partial_t \psi_{\sigma} + ihV_F \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \partial_x \psi_{\sigma} - \frac{1}{2} \frac{G^2 V_F^2}{V_S} \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \psi_{\sigma} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{G^2}{V_S^2} \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \right)^2 \right] \quad (I.30)$$

A equação (I.27) também pode ser reobtida, se fizermos uma integração funcional sobre os campos dos fonons. De fato, o funcional gerador das funções de Green da teoria é dada por:

$$\begin{aligned}
W = \int D\psi^\dagger D\psi D\phi \exp -i \left\{ \int d^2x \left(\sum_{\sigma} i\hbar \psi_{\sigma}^{\dagger} \partial_t \psi_{\sigma} + \right. \right. \\
\left. \left. \sum_{\sigma} i\hbar V \psi_{\sigma} \gamma^3 \partial_x \psi_{\sigma} + \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - V_S^2 (\partial_x \phi)^2) - \right. \right. \\
\left. \left. G \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \partial_x \phi + \dot{\phi} \chi \right) \right\} \quad (I.31)
\end{aligned}$$

agora se definirmos a translação

$$\partial_x \phi \rightarrow \partial_x \phi' - \frac{G}{V_S^2} \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \right) \quad (I.32)$$

e se derivarmos a equação (I.32) em relação a t e usarmos a equação (I.27), temos:

$$\partial_t \phi \rightarrow \partial_t \phi + \frac{G V_F}{V_S^2} \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \psi_{\sigma} \right) \quad (I.33)$$

e escolhendo:

$$\chi = - \frac{G V_F}{V_S^2} \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \psi_{\sigma} \right) \quad (I.34)$$

a integração funcional pode ser feita mediante a translação de φ finida pelas equações (I.32) e (I.33), de modo que:

$$W = \int D\psi^\dagger D\psi D\phi' \exp -i \left\{ \int d^2x \left(\sum_{\sigma} i\hbar \psi_{\sigma}^{\dagger} \partial_x \psi_{\sigma} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma} i\hbar V_F \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \partial_x \psi_{\sigma} + \frac{1}{2} \left[(\partial_t \phi' + \frac{GV_F}{V_S^2} \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \psi_{\sigma})^2 \right. \\
& \left. - V_S^2 (\partial_x \phi' - \frac{G}{V_S^2} \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma})^2 \right] \\
& - G \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} (\partial_x \phi' - \frac{G}{V_S^2} \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma}) \\
& - \frac{GV_F}{V_S^2} \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \psi_{\sigma} (\partial_t \phi' + \frac{GV_F}{V_S^2} \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \psi_{\sigma}) \Big\} \\
& = \int D\psi^{\dagger} D\psi \exp -i \left\{ \int d^2x \left(\sum_{\sigma} i\hbar \psi_{\sigma}^{\dagger} \partial_t \psi_{\sigma} + i\hbar V \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \gamma^3 \partial_x \psi_{\sigma} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{G^2 V_F^2}{V_S^4} \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \psi_{\sigma} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{G^2}{2V_S^2} \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \right)^2 \right) \right\} \tag{I.35}
\end{aligned}$$

onde reobtemos a Lagrangiana efetiva dada pela equação (I.30).

Para finalizar, podemos explicitar a parte de interação da hamiltoniana (equação (I.29) em termos das componentes dos campos ψ_{σ} , de modo que:

$$H = \int dx \left\{ \sum_{\sigma} -i\hbar V_F \psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \partial_x \psi_{\sigma} + \right.$$

$$g_2 \left[\left(\sum_{\sigma} \psi_{1\sigma}^{\dagger} \psi_{1\sigma} \right)^2 + \left(\sum_{\sigma} \psi_{2\sigma}^{\dagger} \psi_{2\sigma} \right)^2 + \right. \\ \left. 2g_1 \left(\sum_{\sigma} \psi_{1\sigma}^{\dagger} \psi_{1\sigma} \right) \left(\sum_{\sigma} \psi_{2\sigma}^{\dagger} \psi_{2\sigma} \right) \right] \quad (I.36)$$

onde

$$g_2 = \frac{1}{2} \frac{G^2 V_F^2}{V_S^2} \left(\frac{1}{V_S^2} - \frac{1}{V_F^2} \right); \\ g_1 = \frac{G^2 V_F^2}{2V_S^2} \left(\frac{1}{V_S^2} + \frac{1}{V_F^2} \right) \quad (I.37)$$

CAPÍTULO II

BOSONIZAÇÃO DA TEORIA EFETIVA: MÉTODO I

Neste capítulo utilizaremos o formalismo proposto por Mattis-Lieb⁽⁸⁾, para reescrever a hamiltoniana efetiva obtida no capítulo anterior em termos de operadores bosônicos, e em seguida, esta será diagonalizada, com a finalidade de obter o espectro e os autoestados exatos, para um certo intervalo da constante de acoplamento.

II.A. BOSONIZAÇÃO DA TEORIA EFETIVA

Iniciaremos esta seção reescrevendo a equação (I.36) em termos dos operadores $a_{jk, \sigma}^\dagger$, $a_{jk, \sigma}$. Isto pode ser feito com a ajuda da equação (I.14), obtendo:

$$H_0 = H_0^{e-} + H_{int} \quad (II.1)$$

onde

$$H_0^{e-} = \sum_{k, \sigma} \hbar v_F k (a_{1k, \sigma}^\dagger a_{1k, \sigma} - a_{2k, \sigma}^\dagger a_{2k, \sigma}) \quad (II.2)$$

$$H_{int} = \frac{g_2}{L} \sum_{\substack{q, k, k' \\ \sigma, \sigma'}} (a_{1k-q, \sigma}^\dagger a_{1k, \sigma} a_{1k'+q, \sigma'}^\dagger a_{1k', \sigma'})$$

$$a_{2k-q, \sigma}^\dagger a_{2k, \sigma} a_{2k'+q, \sigma}^\dagger a_{2k', \sigma} +$$

$$\frac{2g_1}{L} \sum_{\substack{q, k, k' \\ \sigma, \sigma'}} a_{1k-q, \sigma}^\dagger a_{1k, \sigma} a_{2k'+q, \sigma}^\dagger a_{2k', \sigma} \quad (\text{II.3})$$

Como foi afirmado na seção I.A., na representação dos operadores $a_{jk, \sigma}$, o modelo torna-se mal definido, no entanto podemos continuar a usá-la, desde que sempre lembremos que o mar de Dirac está preenchido. Este fato será crucial para a sorte das relações de comutação entre operadores que definiremos logo a seguir.

Motivados pelo fato da hamiltoniana efetiva conter termos quárticos, é conveniente definirmos os operadores:

$$\rho_{j\sigma}(q) = \sum_k a_{jk+q, \sigma}^\dagger a_{jk, \sigma} \quad (\text{II.4})$$

A diagonalização da hamiltoniana efetiva depende fundamentalmente das relações de comutação entre os operadores definidos pela equação (II.4) e por exemplo para os campos do "tipo I", temos:

$$\begin{aligned} \left[\rho_{1\sigma}(-q), \rho_{1\sigma}(q') \right] &= \\ &= \delta_{\sigma, \sigma'} \sum_k (a_{1k, \sigma}^\dagger a_{1k+q-q', \sigma} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{1k+q', \sigma'}^\dagger a_{1k+q, \sigma'} = \\
& = \delta_{\sigma, \sigma'} \sum_k (a_{1k, \sigma}^\dagger a_{1k+q-q\sigma} - \\
& a_{1k+q', \sigma}^\dagger a_{1k+q, \sigma}) \quad (II.5)
\end{aligned}$$

Aparentemente, se no segundo termo da equação (II.5) fizermos uma translação na variável $k = k' - q'$, este torna-se idêntico ao primeiro termo, de modo que a relação de comutação acima seria nula. Aqui devemos ter cuidado pois estas somas podem divergir, e uma maneira mais confiável de obter estas relações de comutação é calculando os elementos de matrizes destes comutadores entre estados arbitrários do sistema, levando em conta o fato de que o mar de Dirac está preenchido. Isto é feito no Apêndice I, e aqui daremos apenas os resultados:

$$\begin{aligned}
\left[\rho_{1\sigma}(-p), \rho_{1\sigma'}(p') \right] &= \delta_{p, p'} \delta_{\sigma, \sigma'} \frac{PL}{2\pi} \\
\left[\rho_{2\sigma}(p), \rho_{2\sigma'}(-p') \right] &= \delta_{p, p'} \delta_{\sigma, \sigma'} \frac{PL}{2} \quad (II.6) \\
\left[\rho_{1\sigma}(p), \rho_{2\sigma'}(p') \right] &= 0
\end{aligned}$$

Outro ponto a ser destacado é que excitações de um

sistema livre de fermions sem massa, descrito por H_0^{e-} , pode ser visto como um sistema livre de bosons sem massa. Isto pode ser visto calculando os comutadores de H_0^{e-} com os operadores $\rho_{j\sigma}(p)$:

$$\begin{aligned}
 \left[H_0^{e-}, \rho_{1\sigma}(p) \right] &= \\
 &= \sum_{\substack{k, k' \\ \sigma}} \left[a_{1k, \sigma}^\dagger a_{1k, \sigma}, a_{1k'+p, \sigma}^\dagger a_{1k', \sigma} \right] \\
 &= \sum_k (k+p) a_{1k+p, \sigma}^\dagger a_{1k, \sigma} - \\
 &\quad \sum_k k a_{1k+p, \sigma}^\dagger a_{1k, \sigma} \\
 &= p \sum_k a_{1k+p, \sigma}^\dagger a_{1k, \sigma} = p \rho_{1, \sigma}(p) \quad (II.7)
 \end{aligned}$$

analogamente:

$$\begin{aligned}
 \left[H_0^{e-}, \rho_{2\sigma}(p) \right] &= \\
 &= \sum_{\substack{k, k' \\ \sigma}} \left[-k a_{2k, \sigma}^\dagger a_{2k, \sigma}, a_{2k'+p, \sigma}^\dagger a_{2k', \sigma} \right] \\
 &= -p \rho_{2\sigma}(p) \quad (II.8)
 \end{aligned}$$

e assim concluímos que $\rho_{1\sigma}(p)$ e $\rho_{2\sigma}(p)$ são operadores levantamento e abaixamento de H_0^{e-} respectivamente. Por outro lado as equações (II.6) implicam que o operador:

$$T = \frac{2\pi\hbar V_F}{L} \sum_{\substack{p>0 \\ \sigma}} (\rho_{1\sigma}(p) \rho_{1\sigma}(-p) + \rho_{2\sigma}(-p) \rho_{2\sigma}(p)) \quad (\text{II.9})$$

possui os mesmos comutadores com os operadores $\rho_{j\sigma}(q)$ que H_0^{e-} de modo que $H_0^{e-} - T$ comuta com $\rho_{j\sigma}(p)$. Isto sugere escrevermos a hamiltoniana total em duas partes:

$$H = H_1 + H_2 \quad (\text{II.10})$$

$$H_1 = T + H_{int} \quad ; \quad H_2 = H_0^{e-} - T$$

Agora a hamiltoniana H_1 pode ser colocada numa forma bilinear em termos dos operadores $\rho_{j\sigma}(p)$ ao usarmos as equações (II.4), (II.3), (II.9), obtendo:

$$H = \frac{2\pi\hbar V_F}{L} \sum_{\substack{p>0 \\ \sigma}} (\rho_{1\sigma}(p) \rho_{1\sigma}(-p) + \rho_{2\sigma}(-p) \rho_{2\sigma}(p)) + \frac{2g_2}{L} \sum_{\substack{p>0 \\ \sigma \sigma'}} (\rho_{1\sigma}(p) \rho_{1\sigma'}(-p) + \rho_{2\sigma}(-p) \rho_{2\sigma'}(p)) + 2g_2 \sum_{p>0} \frac{p}{\pi} + \frac{2g_1}{L} \sum_{\substack{p>0 \\ \sigma \sigma'}} (\rho_{1\sigma}(-p) \rho_{2\sigma'}(p) + \rho_{1\sigma}(p) \rho_{2\sigma'}(-p)) \quad (\text{II.11})$$

donde também concluímos que $[H_1, H_2] = 0$.

II.B. ESTRUTURA DO ESPECTRO E AUTOESTADOS DE H

Iniciaremos esta seção com a diagonalização de H_1 , e para isto é conveniente reescrever a equação (II.11) na forma:

$$\begin{aligned}
 H_1 = A \sum_{\substack{p > 0 \\ \sigma}} & (\rho_{1\sigma}(p) \rho_{1\sigma}(-p) + \rho_{2\sigma}(-p) \rho_{2\sigma}(p)) \\
 + B \sum_{\substack{p > 0 \\ \sigma}} & (\rho_{1\sigma}(p) \rho_{1\sigma'}(-p) + \rho_{2\sigma}(-p) \rho_{2\sigma'}(p)) \\
 + C \sum_{\substack{p > 0 \\ \sigma}} & (\rho_{1\sigma}(-p) \rho_{2\sigma'}(p) + \rho_{1\sigma}(p) \rho_{2\sigma'}(-p)) \\
 + 2g_2 \sum_{p > 0} & \frac{p}{\pi} \quad (II.12)
 \end{aligned}$$

onde:

$$A = \frac{2}{L} (\pi \hbar v_F + g_2); \quad B = \frac{2g_2}{L}; \quad C = \frac{2g_1}{L} \quad (II.13)$$

A primeira parte da diagonalização de H_1 , consta em separarmos $\rho_{j\uparrow}(p)$ dos $\rho_{j\downarrow}(p)$. Isto é feito mediante a transformação canônica ξ^{jS_1} , com S_{\uparrow} dada por:

$$\begin{aligned}
 S_1 = -1 \sum_{p > 0} & \frac{\hbar^2}{2Lp} (\rho_{\uparrow\uparrow}(p) \rho_{\uparrow\uparrow}(-p) - \rho_{\uparrow\uparrow}(-p) \rho_{\uparrow\uparrow}(p) + \\
 & + \rho_{\uparrow\downarrow}(p) \rho_{\uparrow\downarrow}(-p) - \rho_{\uparrow\downarrow}(p) \rho_{\uparrow\downarrow}(-p)) \quad (II.14)
 \end{aligned}$$

portanto

$$\mathcal{L}^{i s_1} \rho_{j\uparrow}(p) \mathcal{L}^{-i s_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_{j\uparrow}(p) + \rho_{j\downarrow}(p)) \quad (\text{II.15})$$

$$\mathcal{L}^{i s_1} \rho_{j\downarrow}(p) \mathcal{L}^{-i s_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_{j\uparrow}(p) - \rho_{j\downarrow}(p))$$

e usando as equações (II.15) segue-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= \mathcal{L}^{i s_1} H_1 \mathcal{L}^{-i s_1} \\ &= \frac{2}{L} \left[hV_F + \frac{G^2 V_F^2}{V_S^2} \left(\frac{1}{V_S^2} - \frac{1}{V_F^2} \right) \right] \\ &\quad \sum_{p>0} (\rho_{\uparrow\uparrow}(-p) \rho_{\uparrow\uparrow}(p) + \rho_{\uparrow\downarrow}(-p) \rho_{\uparrow\downarrow}(p)) \\ &\quad - \frac{2G^2 V_F^2}{V_S^2 L} \left(\frac{1}{V_S^2} + \frac{1}{V_F^2} \right) \sum_{p>0} (\rho_{\uparrow\uparrow}(-p) \rho_{\uparrow\downarrow}(p) + \\ &\quad \rho_{\uparrow\downarrow}(p) \rho_{\uparrow\uparrow}(-p)) + \\ &\quad + \frac{2\pi hV_F}{L} \sum_{p>0} (\rho_{\uparrow\uparrow}(p) \rho_{\uparrow\downarrow}(-p) + \rho_{\uparrow\downarrow}(-p) \rho_{\uparrow\uparrow}(p)) \\ &\quad + 2g_2 \sum_{p>0} \frac{p}{\pi} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

de modo que o campo $\rho_{j\downarrow}(p)$ torna-se livre.

A diagonalização da hamiltoniana torna-se completa, quando fizermos uma segunda transformação canônica i^{S_2} , com S_2 (8,9) dada por:

$$S_2 = \frac{2\pi i}{L} \sum_{p>0} \frac{\phi(p)}{p} (\rho_{1\uparrow}(p) \rho_{2\uparrow}(-p) + \rho_{1\uparrow}(-p) \rho_{2\uparrow}(p)) \quad (\text{II.17})$$

onde:

$$T_{a\#h}(2\phi) = \frac{\frac{G^2 V_F^2}{V_S^2} \left(\frac{1}{V_S^2} + \frac{1}{V_F^2} \right)}{\hbar h V_F + \frac{G^2 V_F^2}{V_F^2} \left(\frac{1}{V_S^2} - \frac{1}{V_F^2} \right)} \quad (\text{II.18})$$

sendo que tal transformação é bem definida para $|T_{a\#h}(2\phi)| < 1$, ou seja para:

$$0 < G < G_C \quad (\text{II.19})$$

onde

$$G_C = V_S \sqrt{\frac{\hbar V_F}{2}} \quad (\text{II.20})$$

Analogamente à primeira parte da diagonalização, das equações (II.17) segue-se que:

$$e^{iS_2} \rho_{1\uparrow}(p) e^{-iS_2} = \rho_{1\uparrow}(p) \cosh \phi + \rho_{2\uparrow}(p) \sinh \phi$$

(II.21)

$$e^{iS_2} \rho_{2\uparrow}(p) e^{-iS_2} = \rho_{2\uparrow}(p) \cosh \phi + \rho_{1\uparrow}(p) \sinh \phi$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= e^{iS_2} \hat{H}_1 e^{-iS_2} \\ &= \sum_{p>0} \epsilon(p) (\rho_{1\uparrow}(p) \rho_{1\uparrow}(-p) + \rho_{2\uparrow}(-p) \rho_{2\uparrow}(p)) \\ &\quad + \frac{2\pi\hbar V_F}{L} \sum_{p>0} (\rho_{1\uparrow}(p) \rho_{1\uparrow}(-p) + \rho_{2\uparrow}(-p) \rho_{2\uparrow}(p)) \\ &\quad + W \end{aligned}$$

(II.22)

onde W é a energia do vácuo dada por:

$$W = \sum_{p>0} \frac{Lp}{2\pi} \epsilon'(p) - \sum_{p>0} p\hbar V_F$$

com

$$\epsilon'(p) = \frac{2\pi\hbar V_F}{L} \sqrt{1 + \frac{2G^2 (V_F^2 - V_S^2)}{V_S^* \pi \hbar V_F}} - \frac{4G^*}{V_S^* (\pi\hbar)^2}$$

(II.24)

Definimos agora um estado, $|\phi_0(N_0)\rangle$ $\left(N_0 = \frac{2Lk}{\pi}\right)$, onde temos partículas do tipo $C_{k\sigma}$, com momento até um dado k , e nenhuma partícula do tipo $d_{k\sigma}$. Segue então da definição dos operadores $\rho_\sigma(p)$ em termos dos operadores $C_{k\sigma}$ e $d_{k\sigma}$ que:

$$\rho_{1\sigma}(-p)|\phi_0(N_0)\rangle = 0 \quad ; \quad p > 0 \quad (\text{II.25})$$

$$\rho_{2\sigma}(p)|\phi_0(N_0)\rangle = 0$$

consequentemente

$$T|\phi_0(N_0)\rangle \equiv 0 \quad (\text{II.26})$$

e portanto $|\phi_0(N_0)\rangle$ é o estado fundamental de \hat{H}_1 , e os auto-estados são então dados por:

$$|\phi_{m_1, m_2, n_1, n_2}\rangle = \prod_{p>0} (\rho_+(p))^{n_1(p)} (\rho_+(-p))^{n_2(p)} \prod (\rho_+(p))^{m_1(p)} (\rho_+(-p))^{m_2(p)} |\phi_0(N_0)\rangle \quad (\text{II.27})$$

onde m_1, m_2, n_1, n_2 são inteiros para cada valor permitido de p .

Como a hamiltoniana H_2 comuta com os operadores $\rho_{j\sigma}(p)$ e também pela equação (II.26), temos que:

$$\begin{aligned}
 H |\phi_{n_1, n_2, n_1, n_2}\rangle &= H_0^L |\phi_{n_1, n_2, n_1, n_2}\rangle \\
 &= \epsilon_0(N_0) |\phi_{n_1, n_2, n_1, n_2}\rangle
 \end{aligned}
 \tag{II.28}$$

onde

$$\epsilon_0(N_0) = 2N_0 k_F \tag{II.29}$$

Por outro lado, como $\hat{H}_2 = H_2$, desde que $[H_2, S_1] = [H_2, S_2] = 0$, temos:

$$\hat{H} |\phi_{n_1, n_2, n_1, n_2}\rangle = E_{n_1, n_2, n_1, n_2} |\phi_{n_1, n_2, n_1, n_2}\rangle
 \tag{II.30}$$

onde

$$\begin{aligned}
 E_{n_1, n_2, n_1, n_2} &= \epsilon_0(N_0) + \\
 &+ \sum_{p > 0} (n_1(p) + n_2(p)) \frac{p \epsilon'(p)L}{2\pi} \\
 &+ \sum_{p > 0} h v_f p (n_1(p) + n_2(p))
 \end{aligned}
 \tag{II.31}$$

de onde vemos que o espectro de \hat{H} contém dois tipos de excitações com velocidades diferentes. Uma é idêntica à velocidade de Fermi, enquanto a outra depende da constante de acoplamento

G de tal forma que se anula quando $G \rightarrow G_c$ (equação (II.20)).

Finalmente como os operadores \hat{H} e H são relacionados por uma transformação canônica, segue que:

$$H |\tilde{\phi}_{n_1, n_2, n_1, n_2}\rangle = E_{n_1, n_2, n_1, n_2} |\tilde{\phi}_{n_1, n_2, n_1, n_2}\rangle \quad (\text{II.32})$$

onde

$$|\tilde{\phi}_{n_1, n_2, n_1, n_2}\rangle = \prod_{p>0} (\tilde{\rho}_{1+}(p))^{n_1(p)} (\rho_{2+}(-p))^{n_2(p)} \prod_{p>0} (\tilde{\rho}_{1+}(p))^{n_1(p)} (\tilde{\rho}_{2+}(-p))^{n_2(p)} |\psi_0(N_0)\rangle \quad (\text{II.33})$$

com

$$|\psi_0(N_0)\rangle = e^{-iS_1} e^{-iS_2} |\phi_0(N_0)\rangle$$

$$\tilde{\rho}_{j\sigma}(p) = e^{-iS_1} e^{-iS_2} \rho_{j\sigma}(p) e^{iS_2} e^{iS_1} \quad (\text{II.34})$$

CAPÍTULO III

BOSONIZAÇÃO DO MODELO: MÉTODO 2

Aqui usaremos a representação de Mandelstam ⁽¹⁰⁾ para mapear o modelo descrito no Capítulo I numa teoria contendo dois campos escalares livres sem massa, e a partir daí reobteremos o espectro do modelo, como no Capítulo II. Também daremos algumas conjeturas de que o modelo possa descrever uma transição supercondutora no limite de validade da bosonização.

III.A. A REPRESENTAÇÃO DE MANDELSTAM

Antes de apresentarmos a representação de Mandelstam é conveniente definirmos os campos $\tilde{\psi}_\sigma$ como função dos campos originais ψ_σ , mediante a transformação canônica \mathfrak{k} , definida pela equação (II.14), como

$$\tilde{\psi}_\sigma = \mathfrak{k} \psi_\sigma \mathfrak{k} \quad (\text{III.1})$$

Veremos mais adiante que esta definição permite reescrever a hamiltoniana do modelo em duas partes onde cada uma delas depende somente de $\tilde{\psi}_+$ ou de $\tilde{\psi}_-$.

Por outro lado, pela própria definição de ψ_σ (equação (I.14)) e das equações (II.14), segue-se que:

$$\int \psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma + \psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma) \quad j=1,2 \quad (\text{III.2})$$

$$\int \psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma - \psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma)$$

de forma que:

$$\psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\psi}_\sigma^\dagger \tilde{\psi}_\sigma + \tilde{\psi}_\sigma^\dagger \tilde{\psi}_\sigma)$$

$$\psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\psi}_\sigma^\dagger \tilde{\psi}_\sigma - \tilde{\psi}_\sigma^\dagger \tilde{\psi}_\sigma)$$

Introduzimos agora o ansatz de Mandelstam para os campos ψ_σ :

$$\tilde{\psi}_\sigma = \left(\frac{\mu V}{2\pi\hbar} \right) : \exp \left\{ \pm i a_\sigma \eta_\sigma (x, t) + \frac{i\pi}{\hbar a_\sigma} \int_x^\infty d\xi \eta_\sigma (\xi, t) \right\} : \quad (\text{III.4})$$

onde o sinal mais (menos) corresponde a $j = 1(2)$ e $\eta_\sigma (\sigma = +, -)$ são campos escalares livres, satisfazendo as seguintes equações de movimento:

$$\eta_{\sigma} - V_{\sigma}^2 \partial_x^2 \eta_{\sigma} = 0 \quad (\text{III.5})$$

Os parâmetros a_{σ} e V_{σ} serão determinados univocamente na seção (III.B), enquanto u permanecerá arbitrário com a finalidade de deixar os campos ψ_{σ} com a dimensão correta ($\mu = \text{mas}$ sa).

As relações de anticomutação entre os campos ψ_{σ}^{\dagger} e ψ_{σ} , podem ser determinadas usando o ansatz de Mandelstam, e para isto devemos calcular produtos da forma $\psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma}$. A fim de alcançarmos estes propósitos é conveniente redefinirmos a equação (III.4) mediante a transformação canônica:

$$\eta_{\sigma} \rightarrow \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\tilde{\Pi} \tilde{V}_{\sigma}}{h}} \tilde{\eta}_{\sigma} \quad (\text{III.6})$$

$$\dot{\eta}_{\sigma} \rightarrow \sigma \sqrt{\frac{h}{\Pi \tilde{V}_{\sigma}}} \dot{\tilde{\eta}}_{\sigma}$$

e portanto os campos $\tilde{\eta}_{\sigma}$ satisfazem as equações de movimento:

$$\tilde{\eta}_{\sigma} - \tilde{V}_{\sigma}^2 \partial_x^2 \tilde{\eta}_{\sigma} = 0 \quad (\text{III.7})$$

com

$$\tilde{V}_{\sigma} = \frac{V_{\sigma}^2 \Pi}{a \sigma^2 h} \quad (\text{III.8})$$

de modo que o ansatz em termos dos campos $\tilde{\eta}_{\sigma}$, torna-se

$$\tilde{\psi}_\sigma = \left(\frac{\mu \tilde{V}_\sigma}{2\pi h} \right) : \exp \left\{ \pm i \sqrt{\frac{\pi \tilde{V}_\sigma}{h}} \tilde{\eta}_\sigma + \right.$$

$$\left. i \sqrt{\frac{\pi}{h \tilde{V}_\sigma}} \int_x^\infty d\xi \tilde{\eta}_\sigma(\xi, t) \right\} : \quad (\text{III.9})$$

Utilizando as equações (III.9) os produtos $\tilde{\psi}_\sigma(x, t) \tilde{\psi}_\sigma(y, t)$ e $\tilde{\psi}_\sigma(y, t) \tilde{\psi}_\sigma(x, t)$ podem ser calculados. Isto é feito em detalhes no Apêndice (B.1). Aqui daremos apenas os resultados finais:

$$\tilde{\psi}_\sigma(x, t) \tilde{\psi}_\sigma(y, t) = \frac{1}{2\pi(y-x)} \exp$$

$$\pm \frac{i\pi}{2} (\theta(x-y) - \theta(y-x))$$

$$\times : \exp \left\{ \pm i \sqrt{\frac{\pi \tilde{V}_\sigma}{h}} (\tilde{\eta}_\sigma(y, t) - \tilde{\eta}_\sigma(x, t)) - \right.$$

$$\left. i \sqrt{\frac{\pi}{h \tilde{V}_\sigma}} \int_x^\infty d\xi \tilde{\eta}_\sigma(\xi, t) \right\} :$$

$$\tilde{\psi}_\sigma(y, t) \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x, t) = \frac{1}{2\pi(y-x)} \exp$$

$$\pm \frac{i\pi}{2} (\theta(x-y) - \theta(y-x))$$

$$\begin{aligned}
X : \exp \left\{ \pm i \sqrt{\frac{\pi \tilde{V}_\sigma}{h}} (\tilde{n}_\sigma(y,t) - \tilde{n}_\sigma(x,t)) - \right. \\
\left. i \sqrt{\frac{\pi}{h \tilde{V}_\sigma}} \int_x d\xi \dot{\tilde{n}}_\sigma(\xi,t) \right\} : \quad (III.11)
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
\left\{ \tilde{\psi}_\sigma(y,t), \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x,t) \right\} = \\
\frac{1}{\pi(y-x)} \cos \frac{\pi}{2} (\theta(x-y) - \theta(y-x)) \\
X : \exp \left\{ \pm i \sqrt{\frac{\pi \tilde{V}_\sigma}{h}} (\tilde{n}_\sigma(y,t) - \tilde{n}_\sigma(x,t)) - \right. \\
\left. i \sqrt{\frac{\pi}{h \tilde{V}_\sigma}} \int_x d\xi \dot{\tilde{n}}_\sigma(\xi,t) \right\} \quad (III.12)
\end{aligned}$$

Quando $y \neq x$, vemos da equação (III.12) que:

$$\left\{ \tilde{\psi}_\sigma(y,t), \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x,t) \right\} = 0$$

por outro lado quando $y \rightarrow x$, o limite:

$$f(x-y) = \lim_{\rightarrow} \frac{1}{\pi(y-x)} \cos \frac{\pi}{2} (\theta(x-y) - \theta(y-x)) \rightarrow \frac{0}{0}$$

e esta indeterminação pode ser levantada usando a regra de

L'Hospital, de modo que:

$$f(x-y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} \cdot 2 \delta(y-x) + \delta(y-x)$$

e portanto:

$$\left\{ \tilde{\psi}_\sigma(y,t), \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x,t) \right\} = \delta(y-x)$$

comprovando o caráter fermiônico dos campos $\tilde{\psi}_\sigma$.

Devemos observar que ao usarmos as equações (III.10) e (III.11) para calcular produtos de campos, aparecem divergências intrínsecas pelo fato de estarmos fazendo o produto de campos no mesmo ponto. Isto pode ser sanado ao definirmos as densidades de correntes (11)

$$\tilde{J}_\sigma^\mu(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ |x-y|^\sigma \tilde{\psi}_\sigma(x) \gamma^\mu \tilde{\psi}_\sigma(y) + F(x-y) \right\} \quad (\text{III.13})$$

onde σ e a função $F(x-y)$ é escolhida de modo a deixar o lado direito da equação (III.13) finito. Ao usarmos as equações (III.10) na expressão que define $\tilde{J}_\sigma^\mu(x)$, esta pode ser escrita em função dos campos $\tilde{\eta}_\sigma$ (Apêndice B.1) como:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\sigma^0(x,t) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi V_\sigma}{h}} \partial_x \tilde{\eta}_\sigma, \\ \tilde{J}_\sigma^1(x,t) &= -\frac{1}{\pi \tilde{V}_\sigma} \sqrt{\frac{\pi \tilde{V}_\sigma}{h}} \partial \tilde{\eta}_\sigma \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

de modo que os produtos de campos definidos da forma:

$$\begin{aligned} \psi_{\sigma}^{\dagger}(x, t) \tilde{\psi}_{\sigma}(x, t) &= \frac{1}{2} (J_{\sigma}^0 + J_{\sigma}^1)(x, t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi \tilde{V}_{\sigma}}{h}} \left(\partial_x \tilde{\eta}_{\sigma} - \frac{1}{\tilde{V}_{\sigma}} \partial \tilde{\eta}_{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\sigma}(x, t) \psi_{\sigma}(x, t) &= \frac{1}{2} (J_{\sigma}^0 - J_{\sigma}^1)(x, t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi \tilde{V}_{\sigma}}{h}} \left(\partial_x \tilde{\eta}_{\sigma} + \frac{1}{\tilde{V}_{\sigma}} \partial \tilde{\eta}_{\sigma} \right) \end{aligned}$$

tornam-se finitos.

Lembremos agora, que no Capítulo II, para diagonalizarmos a hamiltoniana do modelo foi fundamental escrevermos ca da parte desta em termos de campos de bosons. O ansatz de Mandelstam tem uma função semelhante, e isto fica claro através da identidade (Apêndice B.2):

$$-1 \psi_{\sigma}^{\dagger}(x, t) \sigma^3 \partial_x \tilde{\psi}_{\sigma} = \pi \left\{ (\tilde{\psi}_{\sigma}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\sigma})^2 + (\tilde{\psi}_{\sigma} \tilde{\psi}_{\sigma}^{\dagger})^2 \right\} \quad (\text{III.16})$$

e como a transformação que liga $\tilde{\psi}_{\sigma}$ com ψ_{σ} é canônica, a iden tidade anterior também é válida para os campos ψ_{σ} , ou seja:

$$-i \psi_{\sigma}^{\dagger}(x, t) \sigma^3 \partial_x \tilde{\psi}_{\sigma} = \Pi \left\{ (\psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma})^2 + (\tilde{\psi}_{\sigma}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\sigma})^2 \right\} \quad (\text{III.17})$$

Podemos também usar as equações (III.3) para deduzirmos novas identidades, tais como:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} (\psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma})^2 &= \sum_{\sigma} (\tilde{\psi}_{\sigma}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\sigma})^2 \\ \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \right)^2 &= 2 (\tilde{\psi}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\uparrow})^2 \\ \left(\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \right) \left(\sum_{\sigma} \tilde{\psi}_{\sigma}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\sigma} \right) &= 2 (\tilde{\psi}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\uparrow}) (\tilde{\psi}_{\downarrow}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\downarrow}) \quad (\text{III.18}) \end{aligned}$$

e se usarmos as equações (III.17) e (III.18) a hamiltoniana do modelo (equação I.36) pode ser escrita em termos dos campos $\tilde{\psi}_{\sigma}(x)$, tomando a forma:

$$\begin{aligned} H = \int dx \left\{ -i\hbar v \sum_{\sigma} \tilde{\psi}_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \partial_x \tilde{\psi}_{\sigma} + \right. \\ \left. + 2g \left[(\tilde{\psi}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\uparrow})^2 + (\tilde{\psi}_{\downarrow}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\downarrow})^2 \right] + \right. \\ \left. + 4g (\tilde{\psi}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\downarrow}) (\tilde{\psi}_{\downarrow}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\uparrow}) \right\} \quad (\text{III.19}) \end{aligned}$$

onde g e g foram definidos na equação (I.37).

III.B. CORRENTES CONSERVADAS E EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA TEORIA

Neste ponto, já estamos em condições de determinar os parâmetros a_0 e V_σ , até então arbitrários, e para isto é interessante reescrevermos a hamiltoniana (equação III.19) com ajuda da identidade (III.17) na forma:

$$H = \int dx \left\{ -i \hbar \left(V + \frac{2g}{\hbar\pi} \right) \tilde{\psi}_\dagger^\dagger \sigma^3 \partial_x \tilde{\psi}_\dagger - \hbar V \tilde{\psi}_\dagger^\dagger \sigma^3 \partial_x \tilde{\psi}_\dagger \right. \\ \left. + 4g (\tilde{\psi}_\dagger^\dagger \tilde{\psi}_\dagger) (\tilde{\psi}_\dagger^\dagger \tilde{\psi}_\dagger) \right\} \quad (\text{III.20})$$

A hamiltoniana acima é invariante frente às simetrias $U(1)$ ($\tilde{\psi}_\sigma \rightarrow e^{i\theta} \tilde{\psi}_\sigma$) e Quiral ($\tilde{\psi}_\sigma \rightarrow e^{i\theta\sigma^3} \tilde{\psi}_\sigma$), de modo que temos as seguintes leis de conservação:

$$\partial (\tilde{\psi}_\sigma^\dagger \tilde{\psi}_\sigma) + \bar{V}_\sigma \partial_x (\tilde{\psi}_\sigma^\dagger \sigma^3 \tilde{\psi}_\sigma) = 0 \quad (\text{III.21})$$

$$\partial (\tilde{\psi}_\sigma^\dagger \sigma^3 \tilde{\psi}_\sigma) + \bar{V}_\sigma \partial_x (\tilde{\psi}_\sigma^\dagger \tilde{\psi}_\sigma) = 0$$

com $\bar{V}_\dagger = V + \frac{2g}{\hbar\pi}$, $\bar{V}_\dagger = V$

Por outro lado o ansatz de Mandelstam permite a identificação:

$$\tilde{J}_\sigma^0 \equiv \tilde{\psi}_\sigma^\dagger \tilde{\psi}_\sigma = \frac{a\sigma}{\hbar} \partial_x \eta_\sigma \quad (III.22)$$

$$\tilde{J}_\sigma \equiv \tilde{\psi}_\sigma^\dagger \sigma^3 \tilde{\psi}_\sigma = - \frac{a\sigma}{\hbar V_\sigma} \partial_x \eta_\sigma$$

e segue das equações (III.21), (III.22), e das equações de movimento para os campos η_σ que:

$$V_\uparrow = V + \frac{2g}{\hbar\pi}, \quad V_\downarrow = V$$

As equações de movimento para os campos $\tilde{\psi}_\sigma$ são dadas por:

$$-i\hbar \partial_t \tilde{\psi}_\sigma = \frac{\delta H}{\delta \tilde{\psi}_\sigma^\dagger}$$

e usando a equação (III.20), temos para a componente $\tilde{\psi}_\sigma$:

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \tilde{\psi}_\uparrow + i\hbar \left(V + \frac{2g}{\hbar\pi} \right) \partial_x \tilde{\psi}_\uparrow &= \\ &= \text{Lim}_{\delta x \rightarrow 0} g \left[\tilde{J}_\uparrow^0(x+\delta x) + \tilde{J}_\uparrow^0(x-\delta x) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{J}_\uparrow(x+\delta x) - \tilde{J}_\uparrow(x-\delta x) \right] \tilde{\psi}_\uparrow(x, t) \end{aligned}$$

$$i\hbar \partial_t \tilde{\psi}_\downarrow + i\hbar V \partial_x \tilde{\psi}_\downarrow = 0 \quad (III.23)$$

onde usamos a prescrição de Klaiber para definirmos o produto $J^\mu(x,t) \psi_\sigma(x,t)$ ⁽¹¹⁾. Agora as equações (III.4) permitem escrever as expressões:

$$i \hbar \partial \tilde{\psi}_\sigma = - \hbar a_\sigma : \partial \eta_\sigma \tilde{\psi}_\sigma : + \frac{\hbar}{a_\sigma} V_\sigma^2 : \partial_x \eta_\sigma \tilde{\psi}_\sigma :$$

$$i \hbar \partial_x \tilde{\psi}_\sigma = - \hbar a_\sigma V_\sigma : \partial_x \eta_\sigma \tilde{\psi}_\sigma : + \frac{\hbar V_\sigma}{a_\sigma} : \partial \eta_\sigma \psi_\sigma :$$

assim:

$$i \hbar \partial \tilde{\psi}_\sigma + i \hbar V_\sigma \partial_x \psi_\sigma = h \left(\frac{\hbar V_\sigma}{a_\sigma h} - a_\sigma \right) : \left(\partial \eta_\sigma + V_\sigma \partial_x \eta_\sigma \right) \tilde{\psi}_\sigma : \quad (\text{III.24})$$

Os operadores $\partial \eta_\sigma$ e $\partial_x \eta_\sigma$ podem ser colocados fora do produto normal ao usarmos a identidade:

$$A : e^\beta : = : \left\{ A + \left[A^\dagger, E^- \right] e^\beta \right\} : \quad (\text{III.25})$$

e como:

$$\left[\partial \eta_\sigma^\dagger(y,t) + V_\sigma \partial_x \eta_\sigma^\dagger(y,t) \right] a_\sigma \eta_\sigma^-(x,t) +$$

$$+ \frac{\hbar}{\hbar a_\sigma} \int_x^\infty dt \partial_t \eta_\sigma(\xi, t) \Big] = - \frac{1}{2\hbar(y-x)} \left(a_\sigma + \frac{\hbar V_\sigma}{a_\sigma} \right)$$

(III.26)

a equação (III.24) pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} i \hbar \partial_t \tilde{\psi}_\sigma + i \hbar V_\sigma \partial_x \tilde{\psi}_\sigma &= \\ &= \hbar \left(\frac{\hbar}{a_\sigma h} V_\sigma - a_\sigma \right) \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[(\partial_t \eta_\sigma + V_\sigma \partial_x \eta_\sigma)(x+\delta x) \right. \\ &\quad \left. (\partial_t \eta_\sigma + V_\sigma \partial_x \eta_\sigma)(x-\delta x) \right] \tilde{\psi}_\sigma(x) \\ &= \frac{\hbar V_\sigma}{a_\sigma} \left(\frac{\hbar V_\sigma}{a_\sigma h} - a_\sigma \right) \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[(\tilde{\eta}_\sigma(x+\delta x) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\eta}_\sigma(x-\delta x) - \tilde{J}_\sigma(x+\delta x) - \tilde{J}_\sigma(x-\delta x)) \right] \tilde{\psi}_\sigma(x) \end{aligned}$$

(III.27)

e comparando as equações (III.23) e (III.27), segue:

$$2g = \hbar V_\dagger \left(\frac{\hbar}{a_\dagger^2 h} V_\dagger - 1 \right), \quad \frac{\hbar V_\dagger}{a_\dagger^2 h} = 1$$

de modo que:

$$a_\dagger = \frac{\sqrt{\frac{\hbar}{h} \left(v + \frac{2g}{\hbar h} \right)}}{(1+\gamma)}, \quad a_\dagger = \sqrt{\frac{\hbar}{h}} v \quad (III.28)$$

onde:

$$\gamma = \frac{2g}{\hbar \pi \left(v + \frac{2g}{\pi \hbar} \right)} \quad (\text{III.29})$$

e das equações (III.29) e (III.28) vemos que quando $\gamma \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow -1$ e $a_{\dagger} \rightarrow \infty$. e portanto neste limite o processo de bosonização fica mal definido, reafirmando o resultado obtido no Capítulo II (equação II.18).

Aqui cabe observar que o procedimento acima pode ser repetido para a componente $\tilde{\psi}_{\sigma}$.

III.C. DIAGONALIZAÇÃO DA HAMILTONIANA

Como no Capítulo II, a diagonalização da hamiltoniana depende também da bosonização da teoria. No presente caso este fato reflete-se na necessidade de expressar cada termo da hamiltoniana em termos dos campos $\tilde{\eta}_{\sigma}$, e isto pode ser efetuado usando as equações (III.14) e (III.16), de modo que:

$$-i \hbar \tilde{\psi}_{\sigma}^{\dagger} \sigma^3 \partial_x \tilde{\psi}_{\sigma} = \frac{1}{2V_{\sigma}} (: (\partial \tilde{\eta}_{\sigma})^2 : + \tilde{V}_{\sigma}^2 (\partial_x \tilde{\eta}_{\sigma})^2 :)$$

$$(\tilde{\psi}_{\dagger}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\dagger}) (\tilde{\psi}_{\dagger}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\dagger}) = \frac{1}{4\pi V_{\dagger}} (: \tilde{V}_{\dagger}^2 (\partial \tilde{\eta}_{\dagger})^2 - (\partial \tilde{\eta}_{\dagger})^2 :)$$

e assim:

$$\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2V_{\uparrow}} \int dx \left(\alpha \tilde{V}_{\uparrow}^2 : (\partial_x \tilde{\eta}_{\uparrow})^2 : + \beta : (\partial \tilde{\eta}_{\uparrow})^2 : \right) + \\
& + \frac{V}{2V_{\uparrow}} \int dx \left(V_{\uparrow}^2 : (\partial \tilde{\eta}_{\uparrow})^2 : + : (\partial \tilde{\eta}_{\uparrow})^2 : \right)
\end{aligned}
\tag{III.31}$$

com:

$$\alpha = V + \frac{2}{h\pi} (g + g) = V_{\uparrow}(1+\gamma)$$

$$\beta = V + \frac{2}{h\pi} (g - g) = V_{\uparrow}(1-\gamma)$$

$$\tilde{V}_{\uparrow} = \frac{V_{\uparrow}^2 \pi}{a_{\uparrow}^2 h} = V_{\uparrow}(1+\gamma)$$

$$\tilde{V}_{\uparrow} = \frac{V_{\uparrow}^2 \pi}{a_{\uparrow}^2 h} = V_{\uparrow}$$

onde γ foi definido na equação (III.29). Usando as equações (III.32) e (III.33) em (III.31), temos:

$$\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2} \int dx \left(V_{\uparrow}^2 (1+\gamma)^2 : (\partial_x \tilde{\eta}_{\uparrow})^2 : + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right) : (\partial \tilde{\eta}_{\uparrow})^2 : \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int dx (V_{\dagger}^2 : (\partial_x \tilde{\eta}_{\dagger})^2 : + : (\partial \tilde{\eta}_{\dagger})^2 :)$$

(III.34)

Definindo, agora, a seguinte transformação canônica:

$$\tilde{\eta}_{\dagger} = \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) \bar{\eta}_{\dagger}, \quad \tilde{\eta} = \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right) \eta_{\dagger} \quad (III.35)$$

de modo que a hamiltoniana pode ser reescrita na forma:

$$H = \frac{1}{2} \int dx (\bar{V}_{\dagger}^2 : (\partial_x \bar{\eta}_{\dagger})^2 : + (\partial \bar{\eta}_{\dagger})^2 : + V_{\dagger}^2 : (\partial_x \tilde{\eta}_{\dagger})^2 : + : (\partial \tilde{\eta}_{\dagger})^2 :)$$

(III.36)

onde:

$$\bar{V}_{\dagger} = V_{\dagger} (1-\gamma^2) \quad (III.37)$$

e finalmente expressando os campos $\bar{\eta}_{\dagger}$ e $\tilde{\eta}_{\dagger}$ em termos de suas componentes de Fourier, temos que:

$$H = \bar{V}_{\dagger} \int_{-\infty}^{\infty} h|k| \bar{C}_{\dagger}^{\dagger}(k) \bar{C}_{\dagger}(k) + v \int h|k| \tilde{C}_{\dagger}^{\dagger}(k) \tilde{C}_{\dagger}(k)$$

(III.38)

com

$$\bar{V}_\dagger = V \left[+ \frac{2G^2}{V^2 \pi \hbar V} (V^2 - V^2) - \frac{4G^2}{V^2 (\pi \hbar)^2} \right]$$

(III.39)

reobtendo assim, o resultado do Capítulo II (equação II.24).

III.D. TRANSIÇÃO SUPERCONDUTORA DO MODELO

A primeira conjectura de que o modelo descrito pela hamiltoniana definida pela equação (III.20) possa apresentar uma transição supercondutora quando $G \rightarrow G_c$, vem do fato de que a função de correlação $G(x,t) = \langle 0 | (\tilde{\psi}_\dagger(x,t) \tilde{\psi}_\dagger^\dagger(0) - \tilde{\psi}_\dagger^\dagger(0) \tilde{\psi}_\dagger(x,t)) | 0 \rangle$ (11) tem a forma:

$$G(x,t) = (2\pi)^{-2} \int \int \tilde{\psi}_\dagger^\dagger(x,t) \tilde{\psi}_\dagger(x,t)$$

onde:

$$\mu = (x + \tilde{V}_\dagger t), \quad V = (x - \tilde{V}_\dagger t)$$

pois para $G \rightarrow G_c$, $a_\dagger^2 \rightarrow \infty$ e $|\langle 0 | \tilde{\psi}_\dagger \tilde{\psi}_\dagger^\dagger | 0 \rangle|^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} G(x,t) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2}$ de modo que o estado $|\phi\rangle = \tilde{\psi}_\dagger^\dagger(x) \tilde{\psi}_\dagger^\dagger(x) | 0 \rangle$ não é ortogonal ao vácuo. Podemos, agora, calcular o valor esperado da hamiltoniana neste estado, na região $0 < G < G_c$. Isto pode ser feito usando o ansatz (equação III.9) para escrever a iden

tidade:

$$\psi_{\uparrow}^{\sim}(x) \psi_{\uparrow}^{\sim}(x) = i \left(\frac{\mu V_{\uparrow}}{2\pi h} \right) : \exp \left\{ -2i \sqrt{\frac{\pi}{hV_{\uparrow}}} \int_x^{\infty} \tilde{\eta}_{\uparrow}^{\sim}(\xi, t) d\xi \right\} \quad (\text{III.40})$$

e o valor médio $\langle \phi | H | \phi \rangle$ é então dado por:

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = \left(\frac{\mu V_{\uparrow}}{2\pi h} \right)^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \langle 0 | : \exp A(x) : H x : \exp - A(y) : | 0 \rangle \quad (\text{III.41})$$

onde $A(X)$ é dado por:

$$A(X) = 2i \sqrt{\frac{\pi}{hV_{\uparrow}}} \int_x^{\infty} \tilde{\eta}_{\uparrow}^{\sim}(\xi, t) d\xi \quad (\text{III.42})$$

e usando a equação (III.35) e expressando o campo $\tilde{\eta}$ em termos de suas componentes de Fourier temos:

$$A = 2 \sqrt{\frac{\pi}{h}} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) \int d\xi \int d \sqrt{\frac{|h|}{2}} (\bar{c}_h e^{i(hx - \omega_h t)} - \bar{c}_k^{\dagger} e^{-i(kx - \omega_k t)}) \quad (\text{III.43})$$

Usando agora a identidade:

$$\begin{aligned}
:e^A : H : e^{-A} : &= e^{-[A^\dagger, A^-]} e^A H e^{-A} \\
&= e^{-[A^\dagger, A^-]} \left\{ H + [A, H] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2!} [A, [A, H]] + \dots \right\}
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \diamond | H | \diamond \rangle &= \left(\frac{uV_\dagger}{2\pi h} \right)^2 \lim_{x \rightarrow y} e^{-[A^\dagger(x), \tilde{A}(y)]} \langle 0 | H + \\
&\quad + [A, H] + \frac{1}{2} [A(x), [A(y), H]] \rangle + |0 \\
&\hspace{20em} (III.44)
\end{aligned}$$

mas usando as equações (III.43) e (III.38), temos:

$$\begin{aligned}
[A^\dagger, A^-] &= \frac{-4\pi}{hV_\dagger} \left[\int_x^{\tilde{y}} \tilde{\eta}_\dagger^-(\xi, t) d\xi, \int \tilde{\eta}^-(\xi, t) d\xi \right] \\
&\quad e_\eta \left(\frac{uV_\dagger}{h} (x-y) \right)^2 \hspace{10em} (III.45)
\end{aligned}$$

$$[A, H] = 2 \sqrt{\frac{\pi}{h}} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) hV_\dagger (1-\gamma^2)$$

$$\int_x^{\tilde{y}} d\xi \int dk \int dh' \sqrt{\frac{|h'|}{2}} |h'| \left(e^{i(kx - \omega_k t)} \right)$$

$$x \left[\bar{c}_{\dagger h} \bar{c}_{\dagger h'}^\dagger \bar{c}_{\dagger h'} \right] - e^{i(hx - \omega_k t)}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc} \bar{C}_{tk}^+ & \bar{C}_{tk'}^+ & \bar{C}_{tk''}^+ \end{array} \right] \\
& = V_+ \sqrt{2\pi\hbar(1+\gamma)^{3/4} (1-\gamma)^{1/4}} \int_x^\infty d\xi \int_x^\infty dk |h|^{3/2} \\
& \left(e^{-i(kx - \omega_k t)} \bar{C}_{1k}^- + e^{-i(kx - \omega_k t)} \bar{C}_{1k}^+ \right) \quad (III.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[A(x), [A(y), H] \right] & = 2^{3/2} \pi V_+ (1+\gamma) \int_x^\infty d\xi \int_x^\infty d\xi \int_x^\infty dk |h|^2 \\
& \left(e^{i\hbar(\xi - \xi')} + e^{ik(\xi - \xi')} \right) \quad (III.47)
\end{aligned}$$

e das equações (III.44), (III.45) e (III.46), temos:

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = \lim_{x \rightarrow y} \frac{1}{(2\pi(x-y))^2} \langle 0 | [A, [A, H]] | 0 \rangle$$

desde que $\langle 0 | H | 0 \rangle$ e $\langle 0 | [A, H] | 0 \rangle$ são nulos por definição dos operadores \bar{C}_{1k}^- \bar{C}_{1k}^+ , e o termo divergente em $\frac{1}{(x-y)^2}$ na equação anterior vem do fato de que o estado $|\phi\rangle$ não é normalizável, desde que $\langle \phi | \phi \rangle = e^{[A^+, A^-]}$. Por outro lado pela equação (III.47) vemos que $[A, [A, H]] \propto (1+\gamma) \rightarrow 0$, quando $G \rightarrow G_c$, e conseqüentemente $\lim_{G \rightarrow G_c} \langle \phi | H | \phi \rangle \rightarrow 0$. Concluímos então que neste limite o vácuo original não é o único estado de menor energia. Podemos agora fazer o mesmo cálculo anterior sem o uso da bosonização, e para isto é necessário que escrevamos a hamiltoniana e o estado $|\phi\rangle$ em termos dos operadores criação e destruição de elétrons, ou seja:

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3$$

onde

$$H_0 = \sum_k \hbar v_F \hbar (\tilde{C}_{1+k}^\dagger \tilde{C}_{1+k} - \tilde{C}_{2+k}^\dagger \tilde{C}_{2+k})$$

$$H_1 = \frac{2g_2}{L} \sum_{k, h, q} (\tilde{C}_{1+k-q}^\dagger \tilde{C}_{1+k} \tilde{C}_{1+h'+q}^\dagger \tilde{C}_{1+h'} + \\ + \tilde{C}_{2+k-q}^\dagger \tilde{C}_{2+k} \tilde{C}_{2+k'+q}^\dagger \tilde{C}_{2+k'})$$

$$H_2 = \frac{4g_1}{L} \sum_{k, h'} \sum_q \tilde{C}_{+k}^\dagger \tilde{C}_{+k} \tilde{C}_{2+k}^\dagger \tilde{C}_{2+k'}$$

$$H_3 = \sum_k \hbar v_F k (\tilde{C}_{1+k}^\dagger \tilde{C}_{1+k} - \tilde{C}_{2+k}^\dagger \tilde{C}_{2+k}) \quad (\text{III.48})$$

e o estado $|\phi\rangle$ é dado por:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{N} \tilde{\psi}_{1\uparrow}^\dagger(x) \tilde{\psi}_{2\uparrow}^\dagger(x) |0\rangle = \\ = \frac{1}{N} \sum_{k, h'} e^{-i(k+k')} \tilde{C}_{1+k}^\dagger \tilde{C}_{2+k'}^\dagger |0\rangle \\ = \frac{1}{N} \sum_{\substack{k > k_F \\ k < -k_F}} e^{-i(k+k')} \tilde{C}_{1+k}^\dagger \tilde{C}_{2+k'}^\dagger |0\rangle \quad (\text{III.49})$$

$$N = \langle 0 | \tilde{\psi}_{2\uparrow}^\dagger(x) \tilde{\psi}_{1\uparrow}^\dagger(x) \tilde{\psi}_{1\uparrow}(x) \tilde{\psi}_{2\uparrow}(x) |0\rangle$$

$$= \sum_{\substack{> \\ <}} e^{\alpha > \alpha} e^{\alpha < \alpha} \langle 0 | \tilde{C}_{\uparrow \alpha} \tilde{C}_{\uparrow \alpha} \tilde{C}_{\uparrow \alpha}^{\dagger} \tilde{C}_{\uparrow \alpha} | 0 \rangle$$

é o fator de normalização.

Usando as regras de anticomutação dos campos $\tilde{C}_{\uparrow \alpha}$, $\tilde{C}_{\uparrow \alpha}^{\dagger}$ e o fato de que $\tilde{C}_{\sigma} | 0 \rangle = 0, k > k$ e $\tilde{C}_{\sigma} | 0 \rangle = 0, k < -k$, temos:

$$N = \sum_{\substack{> \\ <}} e^{\alpha > \alpha} e^{\alpha < \alpha} \delta_{\alpha, k} \delta_{\alpha', k'}$$

$$= \sum_{\substack{\Lambda \\ > \\ <}}$$

, e Λ é o corte no momento, relacionado com a Linearização da relação de dispersão dos elétrons (Figura 1).

Feitas estas definições, podemos calcular o valor esperado de cada parte da hamiltoniana neste estado $|\phi\rangle$. Isto é feito em detalhes no Apêndice E, e aqui daremos apenas os resultados finais

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = \langle 0 | H | 0 \rangle + \hbar v \frac{2\pi}{L} \eta_0(\Lambda)$$

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = \langle 0 | H | 0 \rangle + \frac{4g}{L} \eta(\Lambda)$$

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = \langle 0 | H | 0 \rangle + \frac{4g}{L} \eta (\Lambda)$$

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = \langle 0 | H | 0 \rangle$$

onde η está relacionado com o corte Λ através da relação $\Lambda = \frac{2\pi}{L} \eta$. As constantes η , $\tilde{\eta}$, e η estão relacionadas entre si, desde que por exemplo no intervalo $0 < G < G$, temos a identidade definida pela equação (III.16), que quando colocada a forma dos operadores criação e destruição \tilde{C}_\uparrow , $\tilde{C}_\uparrow^\dagger$ tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_k & (\tilde{C}_\uparrow^\dagger \tilde{C}_\uparrow - \tilde{C}_\uparrow^\dagger \tilde{C}_\uparrow) = \\ &= \frac{\eta}{L} \sum_k (\tilde{C}_\uparrow^\dagger \tilde{C}_\uparrow \tilde{C}_\uparrow^\dagger \tilde{C}_\uparrow + \\ &+ \tilde{C}_\uparrow^\dagger \tilde{C}_\uparrow \tilde{C}_\uparrow^\dagger \tilde{C}_\uparrow) \end{aligned}$$

de modo que:

$$\langle \phi | \sum_k (\tilde{C}_\uparrow^\dagger \tilde{C}_\uparrow - \tilde{C}_\uparrow^\dagger \tilde{C}_\uparrow) | \phi \rangle =$$

$$\frac{\hbar}{L} \langle \phi | \sum (\tilde{C}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{C}_{\uparrow} + \tilde{C}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{C}_{\uparrow} + \tilde{C}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{C}_{\uparrow} + \tilde{C}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{C}_{\uparrow} +$$

$$+ \tilde{C}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{C}_{\uparrow} + \tilde{C}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{C}_{\uparrow} + \tilde{C}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{C}_{\uparrow} + \tilde{C}_{\uparrow}^{\dagger} \tilde{C}_{\uparrow}) | 0 \rangle$$

ou seja:

$$\frac{2\hbar}{L} \eta_0(\Lambda_0) = \frac{\hbar}{L} 2 \eta(\Lambda) = | \eta(\Lambda) = \eta_0(\Lambda_0)$$

e também pelo fato de que $\langle \phi | H | \phi \rangle \rightarrow 0$ quando $G \rightarrow G$, temos que $\eta(\Lambda) = \eta_0(\Lambda_0)$, de modo que podemos escrever

$$\langle \phi | H | \phi \rangle - \langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{2\hbar hV}{L} \left(1 + \frac{2(g + g)}{\hbar hV} \right) \eta_0(\Lambda_0)$$

$$= \frac{2\hbar hV}{L} \left(1 - \frac{2G^2}{\hbar hV v^2} \right) \eta_0(\Lambda_0)$$

$$= \frac{2\hbar hV}{L} \left(1 - \left(\frac{G}{G} \right)^2 \right) \eta_0(\Lambda_0)$$

de modo que quando $G > G_c$, $\langle \phi | H | \phi \rangle < 0$, e o estado $|\phi\rangle$ passa a ter energia mais baixa do que o vácuo. Isto sugere que quando $G > G_c$, o sistema torna-se instável, indicando uma transição supercondutora, desde que agora o sistema preferiria estar no estado "coletivo" $|\phi\rangle$ ao invés do estado $|0\rangle$.

CAPÍTULO IV

UMA TEORIA DE CAMPOS RELATIVÍSTICA COM GERAÇÃO DINÂMICA DE UM GAP SUPERCONDUTOR

Neste capítulo propomos um modelo relativístico com interação quártica entre fermions com N componentes, renormalizável e assintoticamente livre, e que apresenta geração dinâmica de um gap supercondutor. Introduzimos, então, temperatura finita e encontramos, para $N = \infty$, uma temperatura crítica para a qual o gap se anula, idêntica à da Teoria B.C.S.

IV.A. MOTIVAÇÃO E DESCRIÇÃO DO MODELO

Vários modelos que apresentam geração dinâmica de massa tem sido propostos, desde do trabalho pioneiro de Nambu e Jona-Lasinio ^(12,13). Um membro interessante desta classe é o modelo de Gross-Neveu (GN), em duas dimensões de espaço-tempo, cuja interação é renormalizável, além de encontrarmos na literatura a solução exata para seu espectro ⁽¹⁴⁾ e para a sua matriz - S ^(15,28). O modelo GN é uma adaptação a duas dimensões, com o campo de fermions possuindo N componentes, do modelo de Nambu e Jona-Lasinio, o qual por sua vez está relaciona-

do com a teoria BCS da supercondutividade ⁽¹⁷⁾, onde um gap supercondutor ao invés de massa é gerado dinamicamente. Seria interessante obter um modelo de Teoria de Campos em duas dimensões que por um lado fosse uma adaptação direta da teoria BCS e que por outro apresentasse características do modelo GN, como renormalizabilidade e talvez solução exata. Isto é conseguido com o modelo ^(*) descrito pela densidade Lagrangiana:

$$L = i \bar{\psi} \partial \psi + \frac{g}{4} J^\mu_{ab} J_{\mu ab} \quad (IV.1)$$

onde ψ é um campo fermiônico com um índice interno $a=1, \dots, N$ (a soma sobre os índices internos está subtendida) e $J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$. Explicitando o campo ψ em termos de suas componentes de Dirac, a equação (IV.1) toma a forma:

$$L = i \bar{\psi} \partial \psi + g \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi \quad (IV.2)$$

A Lagrangiana acima possui, além das simetrias $u(1)$ e $\mu(1)$ quiral, uma invariância sob o grupo complexo $O(N)$. As correntes devido às simetrias $U(1)$ e $U(1)$ quiral são dadas por $\Gamma(J^\mu)$ e $\Gamma(J^{\mu 5})$, respectivamente, onde os traços são tomados sobre os índices internos.

A teoria descrita pelas equações (1) e (2) é muito semelhante em sua forma ao modelo GN. Outros modelos relacionados a este são estudados na referência (29).

(*) A solução exata do modelo deverá ser investigada.

Aqui cabe mencionar que a possibilidade de geração dinâmica do gap supercondutor não estará em conflito com o Teorema de Coleman-Mermin-Wagner ⁽²¹⁾, isto já foi demonstrado para o caso de geração dinâmica de massa por Witten ⁽²⁰⁾ e explicitamente verificado nas referências (15,22), e no nosso modelo este mecanismo pode ser adaptado como argumentaremos mais adiante.

IV.B. POTENCIAL EFETIVO, RENORMALIZIBILIDADE E LIBERDADE ASSINTÓTICA DA TEORIA

O funcional gerador das funções de Green para este modelo, na formulação de integrais de trajetória é dado por:

$$Z[0] = [Z_{\psi}^0] \int D\psi D\psi^{\dagger} \exp \left\{ i \int d^2x \left[i \bar{\psi} \partial \psi + g \psi^{\dagger} \psi^{\dagger} \psi \psi \right] \right\} \quad (IV.3)$$

onde Z_{ψ}^0 é o funcional gerador da Teoria de fermions livres.

A interação quártica pode ser eliminada, de modo usual, introduzindo um campo auxiliar complexo σ através da integração funcional quadrática ^(13,18,19,23,24) definida por

$$Z_{\sigma}^0 = \int D\sigma D\bar{\sigma} \exp \left\{ -i \int d^2x |\sigma|^2 \right\} =$$

$$\int D\sigma D\sigma \left\{ -i \int d^2x \frac{1}{g} (\sigma - g\psi^\dagger \psi) \right. \\ \left. (\sigma - g\psi \psi^\dagger) \right\} \quad (IV.4)$$

e usando a equação (IV.3) em (IV.4), temos:

$$Z[0] = (Z_\sigma^0 \ Z_\psi^0) \int D\psi D\psi^\dagger D\psi D\psi^\dagger D\sigma D\sigma^* \\ \exp \left\{ i \int d^2x L(\bar{\psi} \psi \sigma \sigma) \right\} \quad (IV.5)$$

onde

$$L(\bar{\psi} \psi \sigma \sigma) = i \bar{\psi} \partial \psi - \frac{N}{\lambda} \sigma \sigma \gamma \psi \psi + \\ + \sigma \psi^\dagger \psi^\dagger \quad (IV.6)$$

e escolhemos $g = \lambda/N$. As integrações quadráticas na equação (IV.5) primeiro sobre os campos σ e σ^* , e então sobre os campos ψ e ψ^\dagger são feitos em detalhes no Apêndice C. Aqui damos o resultado final:

$$Z[0] = [Z_\sigma^0] \int D\sigma D\sigma^* e^{-\int d^2x \sigma \sigma} \quad (IV.7a)$$

onde

$$(\sigma, \sigma^*) = -\frac{N}{\lambda} \int d^2x \sigma^* \sigma - iN \text{Tr} \ln \frac{1 - |\sigma|^2}{2} \quad (IV.7b)$$

Fazendo a continuação analítica para a região Euclídiana, nós vemos que no limite $N \rightarrow \infty$, a integral funcional (IV.7a) é saturada por uma configuração constante de σ , a qual minimiza:

$$V(\sigma, \sigma^*) = \frac{|\sigma|^2}{\lambda} - \int \frac{d^2}{(2\pi)^2} \ln \left[1 + \frac{|\sigma|^2}{\Lambda^2} \right] \quad (\text{IV.8})$$

onde k é euclidiano.

Podemos calcular a integral da expressão (IV.8), e para eliminarmos as divergências ultravioletas, nos impomos, como é usual, que $\left. \frac{\delta^2 \text{Vet}}{\delta \sigma \delta \sigma^*} \right|_{\sigma = \sigma_0} = \frac{1}{\lambda}$, com a constante de acoplamento renormalizada dada por:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\pi} \left[1 + \ln |\sigma_0|^2 / \Lambda^2 \right]$$

onde σ_0 é uma constante complexa finita arbitrária e Λ é o corte ultravioleta. Isto é feito em detalhes no Apêndice D. O resultado final é:

$$V(\sigma, \sigma^*) = \frac{|\sigma|^2}{\lambda} + \frac{|\sigma|^2}{\pi} \left\{ \ln \frac{|\sigma|^2}{|\sigma_0|^2} - 2 \right\} \quad (\text{IV.9})$$

A configuração que minimiza V deve satisfazer:

$$V \equiv \frac{dV}{d|\sigma|} = |\sigma| \left\{ \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{|\sigma|^2}{|\sigma_0|^2} - 1 \right] \right\} \quad (\text{IV.10a})$$

com

$$V \frac{d^2 \text{Vet}}{d|\sigma|^2} = \left\{ \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{|\sigma|^2}{|\sigma_0|^2} - 1 \right] \right\} + \frac{1}{\pi} > 0 \quad (\text{IV.10b})$$

As soluções das equações (IV.10) são dadas por $\sigma = |\sigma| e^{i\theta}$, com $|\sigma| = |\sigma_0| \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ e

$$V \left| \frac{\partial}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_0} = \frac{1}{\pi}, \text{ e a ocorrência de um valor não nulo}$$

de $|\sigma|$ implica na geração dinâmica de um gap supercondutor. Voltaremos a este ponto posteriormente.

Esta teoria é assintoticamente livre, pois mantendo fixo o valor do gap $\Delta_0 = |\sigma|$ e fazendo $|\sigma_0| \rightarrow \infty$, concluímos que $\lambda \rightarrow 0$. Isto pode também ser visto de uma análise de grupo de renormalização (13,23). Desde que somente Δ_0 é renormalizado, V deve satisfazer:

$$\left[|\sigma| \frac{\partial}{\partial |\sigma_0|} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] V = 0 \quad (\text{IV.11})$$

da qual segue que $\beta(\lambda) = -\lambda r^2 / 2\pi$. Também é fácil de ver que o gap Δ_0 satisfaz a mesma equação anterior do grupo de renormalização, pois:

$$\begin{aligned}
|\sigma_0| \frac{\partial}{\partial |\sigma_0|} |\sigma| &= |\sigma_0| \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}\right) \\
&= |\sigma_0| \frac{\lambda r^2}{\pi} \frac{\lambda}{\partial \lambda} \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}\right) = \\
&= \frac{\lambda r^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda} |\sigma|
\end{aligned}$$

sendo portanto independente de σ_0 , assim Δ_0 é um parâmetro físico livre e como no modelo GN temos o fenômeno de transmutação dimensional.

Devemos notar que para N finito, a análise acima dá o comportamento em $\left(\frac{1}{N}\right)^0$ da expansão em $\left(\frac{1}{N}\right)$, no entanto, o resultado deverá ser exato no limite de $N \rightarrow \infty$.

Estamos agora em condições de introduzir temperatura finita na teoria. A análise novamente é semelhante ao modelo de GN (18,19,23,24). Fazendo as substituições usuais (25,26)

$$k_0 = i\omega_n, \quad \omega_n = (2n + 1)\pi, \quad \int \frac{dk}{2\pi} = iT \sum_{n=-\infty}^{\infty},$$

$$(k_\beta = 1)$$

na equação (IV.8), vemos que para $N = \infty$, o potencial efetivo a temperatura finita é dada por:

$$V(\sigma, \sigma^*) = \frac{|\sigma|^2}{\lambda} - T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk}{2\pi} \left\{ \ln \left[\omega^2 + k^2 + \right. \right.$$

$$\left. + |\sigma|^2 \right] - \ln \left[\omega_n^2 + k^2 \right] \right\} \quad (IV.12)$$

A soma sobre os modos de energia pode ser feita usando a identidade (25):

$$T \sum_n \ln(\omega_n^2 + a^2) = a + 2T \ln(1 + e^{-a/T}) + C \quad (IV.13)$$

onde c é uma constante independente de a . Nós encontramos então que o potencial efetivo pode ser dividido em duas partes:

$$V(\sigma, \sigma^*, T) = V(\sigma, \sigma^*) + V(\sigma, \sigma^*, T) \quad (IV.14)$$

onde

$$V_1(\sigma, \sigma^*) = \frac{|\sigma|^2}{\lambda} - 2 \int_0^{\Lambda'} \frac{dk}{2\pi} \left\{ \left[k^2 + |\sigma|^2 \right]^{1/2} - k \right\} \quad (IV.15)$$

$$V_2(\sigma, \sigma^*, T) = -4T \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[\ln \left(1 + e^{-(k^2 + |\sigma|^2)^{1/2}/T} \right) - \ln \left(1 + e^{-k/T} \right) \right] \quad (IV.16)$$

Introduzindo o corte ultravioleta $\Lambda' = \frac{\Lambda \sqrt{e}}{2}$, o potencial $V_1(\sigma, \sigma^*)$, é idêntico a $V_{ef}(\sigma, \sigma^*)$, dado pela equação (IV.9). De fato, pois:

$$\begin{aligned}
I &= 2 \int_0^\Lambda \frac{dk}{2\pi} \left\{ \left[k^2 + |\sigma|^2 \right]^{1/2} - k \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} k \sqrt{|\sigma|^2 + k^2} + \frac{1}{2} |\sigma|^2 \ln \left(k + \sqrt{|\sigma|^2 + k^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{k^2}{2} \right\} \Big|_0^\Lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{aligned} &|\sigma|^2 + \Lambda + |\sigma|^2 \ln(\Lambda + \sqrt{|\sigma|^2 + \Lambda^2}) - \\ &|\sigma|^2 \ln |\sigma| - \Lambda \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ |\sigma|^2 \ln \frac{2\Lambda}{|\sigma|} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} |\sigma|^2 \left\{ \ln \frac{\Lambda}{|\sigma|} + \frac{1}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi} |\sigma|^2 \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{|\sigma|^2} + 1 \right\}
\end{aligned}$$

de modo que

$$V(\sigma, \sigma^*) = \frac{|\sigma|^2}{\lambda} - \frac{1}{4\pi} |\sigma|^2 \left\{ \ln \frac{a^2}{|\sigma|^2} + 1 \right\} \quad (\text{IV.17})$$

e das equações (IV.4), (IV.7) e (IV.9), temos:

$$V_{ef}(\sigma, \sigma^*, T) = V_{ef}(\sigma, \sigma^*) - 4T \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[\ln \left(1 + e^{-\frac{(k^2 + |\sigma|^2)^{1/2}}{T}} \right) - \ln \left(1 + e^{-k/T} \right) \right] \quad (IV.18)$$

e como a integral da expressão acima é finita, esta não tem nenhum efeito na renormalização de λ .

A condição de extremo para $V(\sigma^*, \sigma, T)$ é:

$$\frac{dV}{d|\gamma|} = V'(\sigma, \sigma^*) + \frac{2|\gamma|}{\pi} \int_0^{\infty} dx \left[x^2 + \frac{|\sigma|^2}{T^2} \right]^{-1/2} \left[1 + \exp \left(x^2 + \frac{|\gamma|^2}{T^2} \right)^{1/2} \right]^{-1} = 0 \quad (IV.19)$$

A integral na equação (IV.19) satisfaz a identidade (25):

$$\int_0^{\infty} dx \left[x^2 + a^2 \right]^{-1/2} \left[1 + \exp \left(x^2 + a^2 \right)^{1/2} \right]^{-1} = -\frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{a}{\pi} \right) + \gamma \right] + O(a^2) \quad (IV.20)$$

onde γ é a constante de Euler.

Introduzindo a equação (IV.20) na equação (IV.19) e usando (IV.10.a), obtemos:

$$\frac{d}{d|\sigma|} V(\sigma, \sigma^*, T) = |\sigma| \left\{ \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\Pi} \left[\gamma + \frac{1}{2} + \ln \left(\frac{|\sigma_0|}{\Pi T} \right) \right] + 0 \left(\frac{|\sigma|^2}{T^2} \right) \right\} \quad (\text{IV.21})$$

A equação acima é satisfeita para $|\gamma| = 0$ e para um valor de $|\gamma|$ que anule o colchetes da equação (IV.21). A última solução dará um gap supercondutor, pelo fato de que a segunda derivada de $V(\sigma, \sigma^*, T)$ é positiva neste ponto. A fase sem gap, por outro lado, ocorrerá quando $V(\sigma, \sigma^*, T) \Big|_{|\sigma|=0} = 0$ for positivo. A temperatura crítica T para a qual o gap supercondutor se anula, é calculada impondo que:

$$V(\sigma, \sigma^*, T) \Big|_{|\sigma|=0} = \frac{2}{\gamma} - \frac{1}{\Pi} \left\{ \gamma + \frac{1}{2} \ln \frac{|\sigma_0|}{\Pi T} \right\} = 0 \quad (\text{IV.22})$$

da qual vemos que $T = \Pi e^{\gamma} \Delta_0$, onde Δ_0 é o gap gerado dinamicamente a $T = 0$. Para $T < T_c$, a segunda derivada do potencial efetivo (equação (IV.22)) é negativa e a fase contendo um gap reaparece.

Para $T > T_c$, $V''(\sigma, \sigma^*, T) \Big|_{|\sigma|=0} > 0$ o sistema estará numa fase sem gap.

A temperatura crítica é exatamente a mesma encontra-

da na Teoria B.C.S. da supercondutividade ^(16,17). Ela é também idêntica à temperatura crítica do modelo GN ^(18,19,23). A razão para esta última coincidência é a semelhança formal entre o modelo GN e o nosso. A razão para a primeira coincidência são certas aproximações feitas na Teoria B.C.S., as quais restringem o espaço de fase e levam a uma equação para o gap, idêntica à nossa.

Este fato foi observado anteriormente em conexão com o modelo de GN ^(18,19).

IV.C. DISCUSSÃO DE GENERALIDADES DA TEORIA

Para N finito e $T \neq 0$, nós não mais esperamos que a função de partição (funcional gerador euclidiano) seja saturada por valores constantes de σ , desde que neste caso devem ser importantes as correções quânticas. Configurações que dependem do espaço, $\sigma(x)$, deverão ser importantes agora e como no modelo de GN ⁽¹⁹⁾, o gap deverá anular-se para todo valor de $T \neq 0$, em concordância com argumentos gerais que proíbem a ocorrência de transição de fase para $T \neq 0$ em uma dimensão espacial ⁽²⁷⁾. A singularidade a $N = \infty$, por outro lado, simula uma temperatura nula, mesmo quando $T \neq 0$ e o argumento mencionado acima ⁽¹⁹⁾ não é mais válida neste caso.

Para N finito e $T = 0$, esperamos que a expansão

$\left(\frac{1}{N}\right)$ em ordem $\left(\frac{1}{N}\right)^0$ dê o resultado exato para o gap supercondutor, como no caso do modelo GN ^(15,20). A solução exata de operadores do nosso modelo, a qual daria suporte para tal afirmação, deverá ser investigada.

Voltemos agora para o fato de que a geração dinâmica de gap supercondutor não está em contradição com o Teorema de Coleman-Mermin-Wagner. O mesmo mecanismo proposto por Witten, o qual permite uma geração dinâmica de massa sem quebra e espontânea de simetria no modelo de GN, funciona nesta Teoria. Usando a equação (IV.6), a equação de movimento para o campo auxiliar é $\sigma = g \psi_{2a} \psi_{1a}$, e vemos que na presença de um gap não nulo, devemos fazer a substituição abaixo, na equação (IV.2)

$$\psi_{2a} \psi_{1a} \rightarrow \psi_{2a} \psi_{1a} - g^{-1} |\sigma| e^{i\theta}$$

e isto dará o termo adicional:

$$|\sigma_m| \left[e^{i\theta} \psi_{1a}^\dagger \psi_{2a}^\dagger + e^{-i\theta} \psi_{2a} \psi_{1a} \right] \quad (IV.23)$$

somado à equação (IV.2). Segundo a prescrição de Witten nós não fixamos θ , mas ao invés disso, introduzirmos um novo campo $\hat{\psi}_{ia} = e^{-i\theta/2} \psi_{ia}$. A Lagrangiana deste novo campo será a mesma dos campos ψ_{ia} , mas com um termo de gap supercondutor (equação IV.23), nós teríamos então que $\langle \hat{\psi}_{1a}^\dagger \hat{\psi}_{2a}^\dagger \rangle \neq 0$. Isto

no entanto, não significa que a simetria $U(1)$ está sendo quebrada, desde que $\hat{\psi}_{i_a}$ não é afetado por rotações do tipo $U(1)$:

$$\psi_{i_a} \rightarrow e^{i\omega} \psi_{i_a}, \theta \rightarrow \theta + 2\omega$$

uma vez que θ é arbitrário. Multiplicando ψ_{i_a} pela fase $e^{-i\theta/2}$, nós extraímos sua carga e quiralidade $U(1)$ (15). Seguindo os passos da referência (20), pode-se mostrar que para o campo ψ , nós temos:

$$\langle [\psi_{1_a}^\dagger \psi_{2_a}^\dagger](x) [\psi_{2_a} \psi_{1_a}](0) \rangle \sim \frac{|x|^{-1/N}}{|x| \rightarrow \infty}$$

e portanto não há quebra espontânea de simetria. Deverá ser interessante investigar, para $N = \infty$, se inexistente quebra de simetria, desde que o comportamento da função de correlação acima indica o contrário neste caso. Pode acontecer que a singularidade associada com o valor infinito de N levaria a uma não aplicabilidade do Teorema de Coleman-Mermin-Wagner (por exemplo através de alguma anomalia), do mesmo modo isto permite transição de fase a $T \neq 0$ em uma dimensão espacial, contrária ao que em geral se acredita (19,24).

CAPÍTULO V

CONCLUSÃO

O nosso trabalho dividiu-se em duas partes, ambas relacionadas pelo fato de apresentarem semelhanças com a Teoria B.C.S. Na primeira parte, mostramos que a hamiltoniana de Fröhlich em uma dimensão, é idêntica a de uma Teoria de Campos exatamente solúvel e além disso sugerimos que acima de um certo valor crítico da constante de acoplamento, o modelo apresenta um comportamento supercondutor. Seria interessante investigarmos se este modelo ajusta-se a metais orgânicos quase-dimensionais ⁽³⁰⁾. Na segunda parte propomos um modelo relativístico em duas dimensões, o qual apresenta geração dinâmica de um gap supercondutor e que ao colocarmos temperatura, este se anula a uma temperatura crítica, idêntica à da teoria B.C.S. Devido à sua semelhança com outros exatamente integráveis, como por exemplo o modelo de Gross-Neveu Quiral, suspeitamos que este modelo também pertença a esta classe, e que além disso possamos usar as generalizações do campo de Mandelstam ⁽¹⁰⁾ para bosonizar esta teoria.

APÊNDICE A

Suponhamos que qualquer possível estado excitado do modelo possa ser alcançado do mar de Dirac por um número finito de excitações de elétrons e buracos. Isto significa que para todo estado $|s\rangle$ existe um $\Delta_\sigma (>0)$ tal que:

$$n_\sigma = \begin{cases} 0, & k > k + \Lambda^1_\sigma \\ 1, & k < k - \Lambda^1_\sigma \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$n_\sigma = \begin{cases} 0, & k < -k - \Lambda^1_\sigma \\ 1, & k > -k + \Lambda^2_\sigma \end{cases}$$

Escolhemos agora dois possíveis estados $|s\rangle$ e $|T\rangle$ definidos por Λ_σ e Λ_σ respectivamente. Então para $k \neq k'$, o elemento de matriz:

$$\langle s | a^\dagger_\sigma a_\sigma | T \rangle = \pm n_\sigma (1 - n_\sigma) \quad (\text{A.2})$$

quando $|T\rangle = \pm a^\dagger_\sigma a_\sigma |s\rangle$, caso contrário é nulo. Por exemplo, para elétrons do "tipo 1" ($p \neq 0$), temos:

$$\langle s | \sum_{\Lambda} a_{\sigma}^{\dagger} a_{\sigma} | T \rangle = \sum_{\Lambda} \langle s | a_{\sigma}^{\dagger} a_{\sigma} | T \rangle \quad (A.3)$$

é um número finito, de modo que nós podemos transladar a variável k na equação (II.5) e para $p \neq p'$ obtemos:

$$\left[\rho(-p), \rho(p') \right] = 0 \quad (A.4)$$

Para $p = p' > 0$, o comutador torna-se:

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda} N_{\sigma} N_{\sigma} &= \\ &= \sum_{\Lambda} \left(N_{\sigma} - N_{\sigma} \right) \\ &= \sum_{\Lambda} N_{\sigma} - \sum_{\Lambda} N_{\sigma} \\ &= \sum_{\Lambda} N_{\sigma} - \sum_{\Lambda} N_{\sigma} \\ &= \sum_{\Lambda} N_{\sigma} - \sum_{\Lambda} N_{\sigma} \\ &= \sum_{\Lambda} N_{\sigma} = \frac{PL}{2\pi} \quad (A.5) \end{aligned}$$

Para $p' = p < 0$, obtemos $-\frac{|p|L}{2\pi} = \frac{pL}{2\pi}$ e portanto:

$$\left[\rho_{\sigma}(-p), \rho_{\sigma}(p') \right] = \delta_{\sigma\sigma} \delta \frac{pL}{2\pi} \quad (\text{A.6})$$

Um cálculo similar para elétrons do "tipo 2" leva-nos à seguinte relação de comutação:

$$\left[\rho_{\sigma}(p), \rho_{\sigma}(-p') \right] = \delta_{\sigma\sigma} \delta \frac{pL}{2\pi} \quad (\text{A.7})$$

APÊNDICE B

Antes de iniciarmos os cálculos deste Apêndice é conveniente reescrevermos o ansatz de Mandelstam e algumas relações de comutação entre campos escalares livres sem massa que usaremos no decorrer do apêndice:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\sigma(x) = & \left(\frac{\mu \tilde{V}_\sigma}{2\pi\hbar} \right) : \exp \left\{ \pm i \sqrt{\frac{\mu \tilde{V}_\sigma}{\hbar}} \tilde{\eta}_\sigma + \right. \\ & \left. + i \sqrt{\frac{\mu}{\hbar \tilde{V}_\sigma}} \int_x^\infty \dot{\tilde{\eta}}_\sigma(\xi, t) d\xi \right\} : \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\eta}_\sigma^+(x, t), \tilde{\eta}_\sigma^-(y, t) \right] &= - \frac{\hbar}{4\pi \tilde{V}_\sigma} \ln \left(\frac{\mu \tilde{V}_\sigma}{\hbar} (x-y) \right)^2 \\ \left[\int_x^\infty d\xi \partial \tilde{\eta}_\sigma^+, \int^\infty d\xi \partial \tilde{\eta}_\sigma^- \right] &= - \frac{\hbar}{4\pi} \tilde{V}_\sigma \ln \left(\frac{\mu \tilde{V}_\sigma}{\hbar} (x-y) \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\left[\int_x^\infty d\xi \partial \tilde{\eta}_\sigma^+(\xi, t), \tilde{\eta}_\sigma^-(y, t) \right] = \frac{i\hbar}{2} \theta(y-x)$$

$$\left[\tilde{\eta}_\sigma^+(x, t), \int^\infty d\xi \partial \tilde{\eta}_\sigma^- \right] = \frac{i\hbar}{2} \theta(x-y)$$

B.1 - CÁLCULO DOS PRODUTOS $\tilde{\psi}_{j\sigma}^{\dagger}(x,t)\tilde{\psi}_{j\sigma}(y,t)$ E DENSIDADES DE CORRENTE

Usando o ansatz definido pela equação (B.1), e a identidade: $e^A : e^B := : e^{A+B} : e^{[A^+, B^-]}$, válida caso o comutador $[A^+, B^-]$ seja constante, temos:

$$\tilde{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(x,t)\tilde{\psi}_{\sigma}(y,t) = \left(\frac{\mu\tilde{V}_{\sigma}}{2\pi\hbar}\right) : \exp\left\{\pm i\sqrt{\frac{\pi\tilde{V}_{\sigma}}{\hbar}}(\tilde{n}_{\sigma}(y,t) - \right.$$

$$\tilde{n}_{\sigma}(x,t) - i \int_x d\xi \dot{\tilde{n}}_{\sigma}(\xi,t)\left. \right\} : X$$

$$X \exp\left[i\sqrt{\frac{\pi\tilde{V}_{\sigma}}{\hbar}}\tilde{n}_{\sigma}^{\dagger}(x,t) - \right.$$

$$i\sqrt{\frac{\pi}{\hbar\tilde{V}_{\sigma}}}\int_x^{\infty}(\xi,t)d\xi, \pm i\sqrt{\frac{\pi\tilde{V}_{\sigma}}{\hbar}}\tilde{n}_{\sigma}^{\dagger}(y,t) +$$

$$\left. i\sqrt{\frac{\pi}{\hbar\tilde{V}_{\sigma}}}\int^{\infty} d\xi \dot{\tilde{n}}_{\sigma}(\xi,t) \right]$$

$$= \left(\frac{\mu\tilde{V}_{\sigma}}{2\pi\hbar}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mu\tilde{V}_{\sigma}(x-y)}{\hbar}\right)^2\right.$$

$$\left. \pm \frac{\pi i}{2}(\theta(x-y) - \theta(y-x))\right\} X$$

$$\begin{aligned}
X &: \exp \left\{ \pm i \sqrt{\frac{\hbar \tilde{V}_\sigma}{h}} (\tilde{\eta}_\sigma(y, t) - \tilde{\eta}_\sigma(x, t)) - \right. \\
& \left. i \sqrt{\frac{\hbar}{h \tilde{V}_\sigma}} \int_x d\xi \dot{\tilde{\eta}}_\sigma(\xi, t) \right\} : \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(y-x)} \exp \pm \frac{i\pi}{2} (\theta(x-y) - \theta(y-x)) X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X &: \exp \left\{ \pm i \sqrt{\frac{\hbar \tilde{V}_\sigma}{h}} (\tilde{\eta}_\sigma(y, t) - \tilde{\eta}_\sigma(x, t)) - \right. \\
& \left. i \sqrt{\frac{\hbar}{h \tilde{V}_\sigma}} \int_x d\xi \dot{\tilde{\eta}}_\sigma(\xi, t) \right\} \quad (B.3)
\end{aligned}$$

Agora no limite $x \sim y$, tais produtos podem ser escritos na forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_\sigma^+(x, t) \tilde{\psi}_\sigma(y, t) &= \pm \frac{i}{(2\pi)(y-x)} \exp \left\{ i(y-x) \right. \\
& \left. \left(\pm \sqrt{\frac{\hbar \tilde{V}_\sigma}{h}} \partial_x \tilde{\eta}_\sigma - \sqrt{\frac{\hbar}{h \tilde{V}_\sigma}} \partial \tilde{\eta}_\sigma \right) \right\} : \\
&= \pm \frac{i}{2\pi(y-x)} \left\{ 1 + (y-x) i \left(\pm \sqrt{\frac{\hbar \tilde{V}_\sigma}{h}} \partial_x \tilde{\eta}_\sigma - \sqrt{\frac{\hbar}{h \tilde{V}_\sigma}} \partial \tilde{\eta}_\sigma \right) + \right. \\
& \left. + O(y-x)^2 \right\} \quad (B.4)
\end{aligned}$$

e usando a definição dada pela equação (III.13), segue que:

$$\begin{aligned}
 J_{\sigma}^{\circ}(x, t) &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar \tilde{V}_{\sigma}}{h}} \partial_x \tilde{\eta}_{\sigma}, \quad J_{\sigma}^{\prime}(x) = \\
 &= - \frac{1}{\hbar \tilde{V}_{\sigma}} \sqrt{\frac{\hbar \tilde{V}_{\sigma}}{h}} \partial \tilde{\eta}_{\sigma} \quad (B.5)
 \end{aligned}$$

B.2 - CÁLCULO DA PARTE CINÉTICA

Nosso objetivo nesta seção é expressar em termos dos campos $\tilde{\eta}_{\sigma}$ ambos os membros da identidade (III-16). Começaremos pela parte cinética. Da equação (B.1), segue-se que:

$$\partial \psi_{\sigma}(y, t) = i: \left(\sqrt{\frac{\hbar \tilde{V}_{\sigma}}{h}} \partial \tilde{\eta}_{\sigma} - \sqrt{\frac{\hbar}{h \tilde{V}_{\sigma}}} \partial \tilde{\eta}_{\sigma} \right) \tilde{\psi}_{\sigma}(y):$$

e escrevendo o campo $\tilde{\eta}(x, t) = \tilde{\eta}(y, t)^{\dagger} + \tilde{\eta}(y, t)^{-}$, temos:

$$\partial \tilde{\psi}_{\sigma}(y, t) = i \left\{ - \right\}^{-} \tilde{\psi}_{\sigma}(y) + i \tilde{\psi}_{\sigma}(y, t) \left\{ - \right\}^{\dagger}$$

com

$$\left\{ \mp \right\}^{\pm} = \left\{ \sqrt{\frac{\hbar \tilde{V}_{\sigma}}{h}} \partial \tilde{\eta}_{\sigma}^{\pm} \mp \sqrt{\frac{\hbar}{h \tilde{V}_{\sigma}}} \partial \tilde{\eta}_{\sigma}^{\pm} \right\}$$

assim:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x) \partial \tilde{\psi}_\sigma(y) &= i \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x) \left\{ - \right\}^- \tilde{\psi}_\sigma(y) + \\ &+ i \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x) \tilde{\psi}_\sigma(y) \left\{ - \right\}^\dagger \end{aligned}$$

e usando o fato de que:

$$\left[\tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x), \left\{ - \right\}^- \right] = \frac{i}{(y-x)} \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x)$$

temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x) \partial \tilde{\psi}_\sigma(y) &= i \left(\left\{ - \right\}^- + \frac{i}{(y-x)} \right) \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x) \tilde{\psi}_\sigma(y) \\ &+ i \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x) \tilde{\psi}_\sigma(y) \left\{ - \right\}^\dagger \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

mas:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x) \tilde{\psi}_\sigma(y) &= \\ &= \frac{-i}{2 \Pi(y-x)} \exp \left\{ i(y-x) \left(\sqrt{\frac{\Pi \tilde{V}_\sigma}{h}} \partial_x \tilde{n}_\sigma - \sqrt{\frac{\Pi}{h \tilde{V}_\sigma}} \partial_x n_\sigma \right) \right\}; \\ &= - \frac{i}{2 \Pi(y-x)} \left\{ 1 + i(y-x) \left\{ - \right\}^- - \frac{(y-x)^2}{2} \left\{ - \right\}^2 + \right. \\ &\left. + O((y-x)^3) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

e substituindo (B.7) em (B.6) temos, no limite $y \sim x$

$$\psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \partial \psi_{\sigma}(y) = \frac{i}{2\pi(y-k)^2} + \frac{i}{4\pi} : \left\{ - \right\}^2 : \quad (\text{B.8})$$

O mesmo cálculo pode ser repetido para a componente $\tilde{\psi}_{\sigma}$ e obtemos:

$$\tilde{\psi}_{\sigma}(x) \partial \tilde{\psi}_{\sigma}(y) = \frac{-i}{2\pi(y-x)^2} - \frac{i}{4\pi} : \left\{ + \right\}^2 : \quad (\text{B.9})$$

e usando as equações (B.8) e (B.9), temos finalmente:

$$\begin{aligned} -i \psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \partial^3 \psi_{\sigma}(y) &= \frac{1}{2} \frac{1}{h\tilde{V}_{\sigma}} (\tilde{V}_{\sigma}^2 (\partial_x \tilde{\eta}_{\sigma})^2 + (\partial \tilde{\eta}_{\sigma})^2) \\ &+ \frac{1}{\pi(y-x)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Agora, usando a definição das densidades de corrente podemos escrever a identidade:

$$\begin{aligned} &(\psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma})^2 + (\tilde{\psi}_{\sigma}^{\dagger} \tilde{\psi}_{\sigma})^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ (J_{\sigma}^0 + J_{\sigma})^2 + (J_{\sigma}^0 - J_{\sigma})^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

e substituindo a equação (b.5) em (b.10), temos:

$$\begin{aligned}
& (\tilde{\psi}_\sigma^\dagger \tilde{\psi}_\sigma)^2 + (\tilde{\psi}_\sigma^\dagger \tilde{\psi}_\sigma)^2 = \\
& = \frac{1}{2\pi h \tilde{V}_\sigma} (\tilde{V}_\sigma^2 (\partial \tilde{n}_\sigma)^2 + (\partial \tilde{n}_\sigma)^2) \quad (B.12)
\end{aligned}$$

e do fato de que:

$$\begin{aligned}
& : \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x) \sigma^3 \partial \tilde{\psi}(y) : = \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x) \sigma^3 \partial \tilde{\psi}(y) - \frac{1}{\pi (y-x)^2} \\
& \quad (B.13)
\end{aligned}$$

segue das equações (B.10), (B.12) e (B.13) que:

$$-i : \tilde{\psi}_\sigma^\dagger(x) \sigma^3 \partial \tilde{\psi}(y) : = \pi \left\{ (\tilde{\psi}_\sigma^\dagger \tilde{\psi}_\sigma)^2 + (\tilde{\psi}_\sigma^\dagger \tilde{\psi}_\sigma)^2 \right\}$$

APÊNDICE C

Das equações (IV.4) e (IV.5), temos que:

$$Z(0) = (Z_\sigma^0 \ Z_\psi^0)^1 \int D\psi_1 D\psi_1^\dagger D\psi_2 D\psi_2^\dagger D\sigma D\sigma^* \exp \left\{ i \int d^2x \psi_1^\dagger M_1 \psi_1 + \right. \\ \left. + \psi_2^\dagger M_2 \psi_2 - \frac{N_\sigma}{\lambda} \sigma^* + \xi^* \psi_1 + \psi_1^\dagger \xi \right\}$$

onde

$$M_1 = i(\partial + \partial_x), \quad M_2 = i(\partial - \partial_x), \quad \xi = \psi_2^\dagger \sigma$$

e fazendo a integração quadrática sobre os campos ψ_1 e ψ_1^\dagger , temos:

$$Z(0) = (Z_\sigma^0 \ Z_\psi^0) \int D\psi_2 D\psi_2^\dagger D\sigma D\sigma^* \exp i \left\{ \int d^2x (\psi_2^\dagger M_2 \psi_2 - \right. \\ \left. \frac{N_\sigma}{\lambda} \sigma - \psi_2 \sigma^* M_1^{-1} \sigma \psi_2^\dagger) (\det M_1) \right\}$$

e agora integrando sobre os campos ψ_2^\dagger e ψ_2 , temos:

$$Z(0) = (Z_\sigma^0 \ Z_\psi^0)^1 \exp \left(- \frac{iN}{\lambda} \int d^2x \sigma^* \sigma \right) X$$

$$X \det(M_2 + \sigma^* M_1^{-1} \sigma) (\det M_1) =$$

$$\begin{aligned}
&= (Z_{\sigma}^{\circ} Z_{\psi}^{\circ})^{-1} \exp \left(-\frac{iN}{\lambda} \int d^2x \sigma^* \sigma \right) (\det M_2 M_1)^N \det \\
&\quad \left(1 - \frac{\sigma^* \sigma}{(\partial^2 - \partial_x^2)} \right)^N \\
&= (Z_{\sigma}^{\circ})^{-1} \exp \left(-\frac{iN}{\lambda} \int d^2x \sigma^* \sigma \right) \det \left(1 - \frac{\sigma^* \sigma}{\square^2} \right)
\end{aligned}$$

e usando a propriedade:

$$\det(A) = e^{-\text{Tr} A}$$

temos finalmente:

$$Z(0) = (Z_{\sigma}^{\circ})^{-1} \exp i \left\{ -\frac{N}{\lambda} \int d^2x \sigma^* \sigma - iN \text{Tr} \ln \left(1 - \frac{\sigma^* \sigma}{\square^2} \right) \right\}$$

APÊNDICE D

O cálculo da integral:

$$I = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \ln \left(1 + \frac{|\sigma|^2}{k^2} \right) \quad (D.1)$$

pode ser feito em coordenadas polares, resultando:

$$I = \int_0^{\Lambda} \frac{d}{(2\pi)} \ln \left(1 + \frac{|\sigma|^2}{r^2} \right)$$

ou

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\Lambda} dx \ln(x + |\sigma|^2) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\Lambda} dx \ln x \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ (x \ln x - x) \Big|_{|\sigma|^2}^{\Lambda^2 + |\sigma|^2} - (x \ln x - x) \Big|_0^{\Lambda^2} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ (\Lambda^2 + |\sigma|^2) \ln(\Lambda^2 + |\sigma|^2) - \Lambda^2 - |\sigma|^2 \ln|\sigma|^2 - \Lambda^2 \ln\Lambda^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ |\sigma|^2 \ln \Lambda^2 + (\Lambda^2 + |\sigma|^2) \ln \left(1 + \frac{|\sigma|^2}{\Lambda^2} \right) - |\sigma|^2 \ln|\sigma|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ |\sigma|^2 \ln \Lambda^2 + (\Lambda^2 + |\sigma|^2) \frac{|\sigma|^2}{\Lambda^2} - |\sigma|^2 \ln|\sigma|^2 \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{|\sigma|^2}{4\pi} \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{|\sigma|^2} + 1 \right\} \quad (D.2)$$

e da equação (IV.8), segue que o potencial efetivo é dada por:

$$V(\sigma, \sigma^*) = \frac{|\sigma|^2}{\lambda} - \frac{|\sigma|^2}{4\pi} \left\{ 1 + \ln \frac{\Lambda^2}{|\sigma|^2} \right\} \quad (D.3)$$

de modo que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \sigma^*} \Big|_{\sigma = \sigma_0} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\pi} \left(1 + \ln \frac{|\sigma_0|^2}{\Lambda^2} \right) \quad (D.4)$$

e impondo a condição de renormalização:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \sigma^*} \Big|_{\sigma = \sigma_0} = \frac{1}{\lambda}$$

temos que:

$$-4\pi \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) + 1 + \ln |\sigma_0|^2 = \ln \Lambda^2 \quad (D.5)$$

e substituindo (D.5) em (D.3) temos:

$$V(\sigma, \sigma^*) = \frac{|\sigma|^2}{\lambda} - \frac{|\sigma|^2}{4\pi} \left\{ 2 + \ln \frac{|\sigma_0|^2}{|\sigma|^2} - \right.$$

$$4\pi \left(\frac{1}{\lambda} \quad \frac{1}{\lambda} \right) \left\{ \right.$$

$$= \frac{|\sigma|^2}{\lambda} + \frac{|\sigma|^2}{4\pi} \left\{ -2 + \ln \frac{|\sigma|^2}{|\sigma_0|^2} \right\}$$

APÊNDICE E

Considerando H e $|\phi\rangle$ definidos pelas equações (III.48) e (III.49), temos:

$$\begin{aligned} \langle \phi | H_0 | \phi \rangle = & \frac{1}{N} \sum_{\substack{\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \\ \alpha < \alpha \quad \beta < \beta}} h\nu_k \quad \alpha \alpha \quad \beta \beta \quad \langle 0 | \tilde{C}_{2+\alpha} \tilde{C}_{1+\alpha} (\tilde{C}_{1+\alpha} \tilde{C}_{1+\alpha} - \\ & - \tilde{C}_{2+\alpha} \tilde{C}_{1+\alpha}) \tilde{C}_{1+\beta} \tilde{C}_{2+\beta} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (E.1)$$

Agora usando as regras de anticomutação dos campos \tilde{C}_+ , \tilde{C}_- e o fato de que $\tilde{C}_{1\sigma} |0\rangle = 0$ $k > k$, $\tilde{C}_{2\sigma} |0\rangle = 0$, $k < -k$ temos:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \tilde{C}_{2+\alpha} \tilde{C}_{1+\alpha} \tilde{C}_{1+\alpha} \tilde{C}_{1+\alpha} \tilde{C}_{1+\beta} \tilde{C}_{2+\beta} | 0 \rangle &= \delta_{\beta \alpha} \langle 0 | \tilde{C}_{1+\alpha} \tilde{C}_{1+\alpha}^\dagger \tilde{C}_{1+\alpha} \tilde{C}_{1+\beta}^\dagger | 0 \rangle = \\ &= \delta_{\beta \alpha} (\langle 0 | -\tilde{C}_{1+\alpha}^\dagger \tilde{C}_{1+\alpha} \tilde{C}_{1+\alpha} \tilde{C}_{1+\beta}^\dagger | 0 \rangle + \delta_{\alpha \alpha} \langle 0 | \tilde{C}_{1+\alpha} \tilde{C}_{1+\beta} | 0 \rangle) \\ &= \delta_{\beta \alpha} (\langle 0 | \tilde{C}_{1+\alpha}^\dagger \tilde{C}_{1+\alpha} \tilde{C}_{1+\alpha} \tilde{C}_{1+\beta}^\dagger | 0 \rangle + \delta_{\alpha \alpha} \delta_{\beta \alpha}) \\ &= \delta_{\beta \alpha} (\langle 0 | \tilde{C}_{1+\alpha}^\dagger \tilde{C}_{1+\alpha} | 0 \rangle \delta_{\alpha \beta} + \delta_{\alpha \alpha} \delta_{\beta \alpha}) \end{aligned}$$

de modo que o valor médio da parte cinética dos elétrons "tipo 1" é:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{\kappa \\ \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \\ \alpha < \alpha \quad \beta < \beta}} \alpha \alpha \quad \beta \beta \quad \langle 0 | \bar{c}_{2+\alpha} \bar{c}_{1+\alpha} \bar{c}_{1+\kappa}^\dagger \quad \times \\
&\quad \times \quad \bar{c}_{1+\kappa} \bar{c}_{1+\beta}^\dagger \bar{c}_{2+\beta}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\substack{\kappa \\ \alpha > \alpha \\ \alpha < \alpha}} hV \kappa \langle 0 | \bar{c}_{1+\kappa}^\dagger \bar{c}_{1+\kappa} | 0 \rangle + \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \\ \alpha < \alpha}} hV \alpha \quad e^{\alpha \beta \times} \quad \delta_{\alpha \beta} \\
&= \sum_{\kappa} hV \kappa \langle 0 | \bar{c}_{1+\kappa}^\dagger \bar{c}_{1+\kappa} | 0 \rangle + \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\hat{0} \\ \alpha > \alpha \\ \alpha < \alpha}} hV \alpha \quad (E.2)
\end{aligned}$$

mas $\alpha = \frac{2\pi}{L} n$, assim:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{\substack{\hat{0} \\ \alpha > \alpha \\ \alpha < \alpha}} hV \alpha &= \frac{hV \ 2\pi/L}{\sum_{\alpha > \alpha}} \sum_{\pi}^{n_0} n \\
&= \frac{1}{\sum_{\alpha > \alpha}} \frac{hV \ 2\pi}{L} \frac{n_0^2}{2}
\end{aligned}$$

$$= h v_F \frac{2\pi}{L} n_0/2$$

portanto:

$$I_1 = \sum_{\kappa} h v_F k \langle 0 | \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} | 0 \rangle + h v_F \frac{2\pi}{L} \left(\frac{n_0}{2} \right) \quad (E.2)$$

analogamente, o valor médio da parte cinética dos elementos "tipo 2" é:

$$I_2 = \frac{1}{N} \sum_{\kappa} h v_F k e^{i\alpha\alpha + i\beta\beta} \langle 0 | \tilde{c}_{2+\alpha} \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{2+\kappa}^\dagger \times \\ \times \tilde{c}_{2+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\beta} \tilde{c}_{2+\beta}^\dagger | 0 \rangle \\ = \sum_{\kappa} h v_F k \langle 0 | \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} | 0 \rangle + \frac{h v_F 2\pi}{L} \frac{n_0}{2} \quad (E.3)$$

e somando as equações (E.2) com (E.3), temos:

$$\langle \phi | H_0 | \phi \rangle = \langle 0 | H_0 | 0 \rangle + h v_F \frac{2\pi}{L} n_0 \quad (E.4)$$

Também

$$\frac{L}{2g_2} \langle \phi | H_1 | \phi \rangle = f_1 + f_2$$

onde:

$$f_1 = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\kappa \kappa \\ \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \\ \alpha < \alpha \quad \beta < \beta}} e^{\alpha \alpha \quad \beta \beta} \langle 0 | \tilde{c}_{2+\alpha} \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{2+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{2+\kappa} \times \\ \times \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{2+\beta}^\dagger | 0 \rangle \quad (E.5)$$

$$f_2 = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\kappa \kappa \\ \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \\ \alpha < \alpha \quad \beta < \beta}} e^{\alpha \alpha \quad \beta \beta} \times \langle 0 | \tilde{c}_{2+\alpha} \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{2+\kappa} \tilde{c}_{2+\kappa} \times \\ \times \tilde{c}_{2+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{2+\kappa} \tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{2+\beta}^\dagger | 0 \rangle \quad (E.6)$$

$$f_3 = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\kappa \kappa \\ \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \\ \alpha < \alpha}} e^{\alpha \beta} \times \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} \times \\ \times \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{1+\beta}^\dagger | 0 \rangle \\ = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\kappa \kappa \\ \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \\ \alpha < \alpha}} e^{\alpha \beta} \times \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} \times \\ \times \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger (-\tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} + \delta_{\kappa \beta}) | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\substack{\kappa \kappa \\ \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \\ \alpha < \alpha}} e^{\alpha \beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} | 0 \rangle$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\substack{\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \\ \alpha < \alpha \quad \kappa}} e^{\alpha \beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{1+\beta}^\dagger | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\substack{\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \\ \alpha < \alpha \quad \kappa \quad \kappa}} e^{\alpha \beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger (-\tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} +$$

$$+ \delta_{\kappa \beta}) \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{1+\kappa} | 0 \rangle$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\substack{\kappa \\ \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha}} e^{\alpha \beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{1+\kappa} x$$

$$x \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} | 0 \rangle$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\substack{\kappa \\ \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha}} e^{\alpha \beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{\alpha \beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\kappa}^{\dagger} \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{1+\beta}^{\dagger} | 0 \rangle \\
& \quad \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha \\
& = \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{\alpha \beta x} \delta_{\alpha \beta} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\kappa}^{\dagger} \tilde{c}_{1+\kappa} x \\
& \quad \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha \\
& x \tilde{c}_{1+\kappa}^{\dagger} \tilde{c}_{1+\kappa} | 0 \rangle + X + Y \tag{E.7}
\end{aligned}$$

onde

$$X = \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{\alpha \beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\beta}^{\dagger} \tilde{c}_{1+\kappa}^{\dagger} \tilde{c}_{1+\kappa} | 0 \rangle$$

$\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha$

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{\alpha \beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\kappa}^{\dagger} \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{1+\beta}^{\dagger} | 0 \rangle$$

$\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha$

agora:

$$X = \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{\alpha \beta x} \langle 0 | (-\tilde{c}_{1+\beta}^{\dagger} \tilde{c}_{1+\alpha} + \delta_{\alpha \beta}) x$$

$\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha$

$$\begin{aligned}
& \times \tilde{c}_{i+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{i+\kappa} |0\rangle \\
&= -\frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i\alpha\beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{i+\beta}^\dagger \tilde{c}_{i+\alpha} \tilde{c}_{i+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{i+\kappa} |0\rangle \\
&\quad \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i\alpha\beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{i+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{i+\alpha} c_{i+\kappa} |0\rangle \\
&\quad \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha \\
&= -\frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i\alpha\beta x} \langle 0 | \tilde{c}_i^\dagger (-c_{i+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{i+\alpha} + \\
&\quad \delta_{\alpha\kappa}) \tilde{c}_{i+\kappa} |0\rangle \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i\alpha\beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{i+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{i+\alpha} \tilde{c}_{i+\kappa} |0\rangle \\
&\quad \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha \\
&= -\frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i\alpha\beta x} \langle 0 | \tilde{c}_{i+\beta}^\dagger \tilde{c}_{i+\alpha} c_{i+\kappa} |0\rangle + \\
&\quad \alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{\alpha \beta x} \langle 0 | \tilde{C}_{1\kappa}^{\dagger} \tilde{C}_{1\kappa} | 0 \rangle = 0 \quad (\text{E.8})$$

e usando o mesmo procedimento anterior:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{\alpha \beta x} \langle 0 | \tilde{C}_{1\kappa}^{\dagger} \tilde{C}_{1\kappa} \tilde{C}_{1\kappa} \tilde{C}_{1\kappa}^{\dagger} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\kappa} = \eta_1(\Lambda_1) \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

das equações (E.7), (E.8) e (E.9) segue que:

$$f_1 = \sum_{\kappa} \langle 0 | \tilde{C}_{1\kappa}^{\dagger} \tilde{C}_{1\kappa} \tilde{C}_{1\kappa} \tilde{C}_{1\kappa}^{\dagger} | 0 \rangle + \eta_1(\Lambda_1)$$

analogamente:

$$f_2 = \sum_{\kappa} \langle 0 | \tilde{C}_{2\kappa}^{\dagger} \tilde{C}_{2\kappa} \tilde{C}_{2\kappa} \tilde{C}_{2\kappa}^{\dagger} | 0 \rangle + \eta_1(\Lambda_1)$$

de modo que:

$$\frac{L}{2g_2} \langle \phi | H_1 | \phi \rangle = \frac{L}{2g_2} \langle 0 | H_1 | 0 \rangle + \dots \eta_1 (A_1)$$

(E.10)

Por outro lado:

$$\frac{L}{4g_1} \langle \phi | H_2 | \phi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\kappa \kappa} e^{\alpha \alpha \beta \beta \times} \langle 0 | \bar{c}_{2+\alpha} \bar{c}_{1+\alpha} \bar{c}_{1+\kappa}^{\dagger}$$

$\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha \quad \beta < \beta$

$$\bar{c}_{1+\kappa} \bar{c}_{2+\kappa}^{\dagger} \bar{c}_{2+\kappa} \bar{c}_{1+\beta}^{\dagger} \bar{c}_{2+\beta}^{\dagger} | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\kappa \kappa} e^{\alpha \alpha \beta \beta \times} \langle 0 | \bar{c}_{1+\alpha} \bar{c}_{1+\kappa}^{\dagger} \bar{c}_{1+\kappa}$$

$\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha \quad \beta < \beta$

$$\bar{c}_{1+\beta}^{\dagger} \bar{c}_{2+\alpha} \bar{c}_{2+\kappa}^{\dagger} \bar{c}_{2+\kappa} \bar{c}_{2+\beta}^{\dagger} | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\kappa \kappa} e^{\alpha \alpha \beta \beta \times} \langle 0 | \bar{c}_{1+\alpha} \bar{c}_{1+\kappa}^{\dagger}$$

$\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha \quad \beta < \beta$

$$(-\tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} + \delta_{\kappa\beta}) \times \tilde{c}_{2+\beta} \tilde{c}_{2+\kappa}^\dagger (-\tilde{c}_{2+\beta}^\dagger \tilde{c}_{2+\kappa} +$$

$$\delta_{\kappa\beta}) |0\rangle$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\substack{\kappa\kappa \\ \alpha > \alpha \\ \beta > \beta \\ \alpha < \alpha \\ \beta < \beta}} e^{\alpha\alpha\beta\beta} \times \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} \times$$

$$\times \tilde{c}_{2+\alpha} \tilde{c}_{2+\kappa}^\dagger (-\tilde{c}_{2+\beta}^\dagger \tilde{c}_{2+\kappa} + \delta_{\kappa\beta}) |0\rangle$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{\alpha\alpha\beta\beta} \times \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{2+\alpha} \tilde{c}_{2+\kappa}^\dagger$$

$$(-\tilde{c}_{2+\beta}^\dagger \tilde{c}_{2+\kappa} + \delta_{\kappa\beta}) |0\rangle$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\substack{\kappa\kappa \\ \alpha > \alpha \\ \alpha < \alpha \\ \beta < \beta}} e^{\alpha\alpha\beta\beta} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{2+\alpha} \tilde{c}_{2+\kappa}^\dagger$$

$$(-\tilde{c}_{2+\beta}^\dagger \tilde{c}_{2+\kappa} + \delta_{\kappa\beta}) |0\rangle$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i\alpha\kappa + i\beta\kappa} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{2+\alpha} \tilde{c}_{2+\beta}^\dagger x$$

$\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha \quad \beta < \beta$

$$x \tilde{c}_{2+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{2+\kappa} |0\rangle$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i\alpha\kappa + i\beta\kappa} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\beta}^\dagger \tilde{c}_{2+\alpha} \tilde{c}_{2+\beta}^\dagger |0\rangle$$

$\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha \quad \beta < \beta$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i\alpha\kappa + i\beta\kappa} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{2+\alpha} x$$

$\alpha > \alpha \quad \alpha < \alpha \quad \beta < \beta$

$$x \tilde{c}_{2+\beta}^\dagger \tilde{c}_{2+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{2+\kappa} |0\rangle$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i\alpha\kappa + i\beta\kappa} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\kappa}^\dagger \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{2+\alpha} \tilde{c}_{2+\beta}^\dagger |0\rangle$$

$\alpha > \alpha \quad \alpha < \alpha \quad \beta < \beta$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i(\alpha - \beta) \kappa} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\beta}^{\dagger} \tilde{c}_{2+\kappa}^{\dagger} \tilde{c}_{2+\kappa} | 0 \rangle$$

$\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i(\alpha - \alpha + \beta - \beta) \kappa} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\alpha} \tilde{c}_{1+\beta}^{\dagger} \tilde{c}_{2+\beta} \tilde{c}_{2+\beta}^{\dagger} | 0 \rangle$$

$\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha \quad \beta < \beta$

$$= \sum_{\kappa} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\kappa}^{\dagger} \tilde{c}_{1+\kappa} \tilde{c}_{2+\kappa}^{\dagger} \tilde{c}_{2+\kappa} | 0 \rangle$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i(\alpha - \alpha) \kappa} \langle 0 | \tilde{c}_{1+\kappa}^{\dagger} \tilde{c}_{1+\kappa} | 0 \rangle \delta_{\alpha - \beta}$$

$\alpha > \alpha \quad \alpha < \alpha \quad \beta < \beta$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa} e^{i(\alpha - \beta) \kappa} \langle 0 | \tilde{c}_{2+\kappa}^{\dagger} \tilde{c}_{2+\kappa} | 0 \rangle$$

$\alpha > \alpha \quad \beta > \beta \quad \alpha < \alpha$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\substack{\alpha > \alpha \\ \beta > \beta}} e^{i(\alpha - \alpha + \beta - \beta) \cdot x} \delta_{\alpha \beta} \delta_{\alpha \beta}$$

$$= \frac{L}{4g_1} \langle 0 | H_2 | 0 \rangle + \eta_2 (\Lambda_2)$$

Agora $\langle \phi | H_3 | \phi \rangle = \langle 0 | H_3 | 0 \rangle$, desde que os operadores $\tilde{C}_{\pm \kappa}$ e $\tilde{C}_{\mp \kappa}$ anticomutam.

REFERÊNCIAS

- (1) P.A. Lee, T.M. Rice and P.W. Anderson, Solid State Comm. 14, 703 (1974).
- (2) J.A. Krumhansl and J.R. Schrieffer, Phys. Rev. B 11, 3525 (1975).
- (3) N. Andrei, K.Furuya and J.H. Lowenstein, Review of Mod. Phys. 55, 331 (1983).
- (4) H. Fröhlich, Proc. Roy. Soc., Ser A 223, 296 (1954).
- (5) G. Whitfield and P. Shaw, Phys. Rev. B 14, 3346 (1976).
- (6) J.M. Luttinger, J. Math. Phys. 4, 1154 (1963).
- (7) S.Tomonaga, Prog. Theoret. Phys. (Kyoto) 5, 544 (1950).
- (8) D.C. Mattis and E.H. Lieb, J. Math. Phys. 6 304 (1965).
- (9) T. Bohr, Lecture Notes in the Series on Low-Dimensional Statistical Mechanics, Nordita - 81/4 preprint.
- (10) S. Mandelstam, Phys. Rev. D 11, 3026 (1975).

- (11) B. Klaiber, em Lectures in Theoretical Physics (1967),
Bouldr, USA.
- (12) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, 345 (1961)
J. Schwinger, Phys. Rev. 125, 397 (1962); Phys. Rev.
128, 2425 (1962).
R. Jackiw and K. Johnson, Phys. Rev. D8, 2386 (1973)
J.M. Cornwall and R.E. Norton, Phys. Rev. D8, 3338
(1973).
S. Weinberg, Phys. Rev. D13, 974 (1976); Phys. Rev.
D19, 1277 (1979).
L. Susskind, Phys. Rev. D20, 2619 (1979).
- (13) D. J. Gross and A. Neveu, Phys. Rev. D10, 3235 (1974).
- (14) N. Andrei and J.H. Lowenstein, Phys. Rev. Lett. 43, 1698
(1979).
- (15) R. Köberle, V. Kurak and J. A. Swieca, Phys. Rev. D20,
897 (1979).
V. Kurak and J.A. Swieca, Phys. Lett. B82, 289 (1979).
- (16) J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer, Phys. Rev.
108, 1175 (1957).
- (17) A.A. Abrikosov, L.P. Gordov and I.E. Dzyaloshinski, "Me-

thods of Quantum Field Theory in Statistical Physics".

(Dover, New York, 1975).

(18) L. Jacobs, Phys. Rev. D10, 3596 (1974).

(19) R.F. Dashen, S.K. Ma and R. Rajaraman, Phys. Rev. D11,
1499 (1975).

(20) E. Witten, Nucl. Phys. B145, 110 (1978).

(21) S.Coleman, Com. Math. Phys. 31, 259 (1973).

N.D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett., 17, 1133
(1966).

(22) A.J. Silva, M. Gomes and R. Köberle, Phys.Rev. D20, 895
(1979).

(23) B.J. Harrington and A. Yildiz, Phys. Rev. D11, 779 (1975).

(24) U. Wolf, Phys. Lett. 157B, 303 (1985).

(25) L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. D9, 3320 (1974).

(26) C. Bernard, Phys. Rev. D9, 3312 (1974).

D. Kirzhnits and A. Linde, Phys. Lett. 42B, 471 (1972).

- (27) L.D. Landau and E.M. Lifshitz, "Statistical Physics"
(Pergamon, London, 1958).
- (28) B. Berg and P. Weisz, Nucl. Phys. B146, 205 (1978).
- (29) N. Andrei and C. Destri, Nucl. Phys. B231, 445 (1984).
M.M. Doria, Phys. Lett. B139, 51 (1984).
T.T. Truong and K.D. Schotte, Phys. Rev. Lett. 47, 285
(1981).
V.N. Dutyshev, Sov. Phys. JETP 51, 671 (1980).
- (30) D. Jérôme, Amazaud, M. Ribault, K. Kechguard, J. Phys.
Lett., (Paris) 41, L95 (1980).
M. Ribault, G. Benedick, D. Jérôme, K. Beehgaard, J.
Phys. Lett. (Paris) 41, L397 (1980).
D.Jérôme, H.J. Schulz, Adv. in Phys. 31, 299 (1981).
-

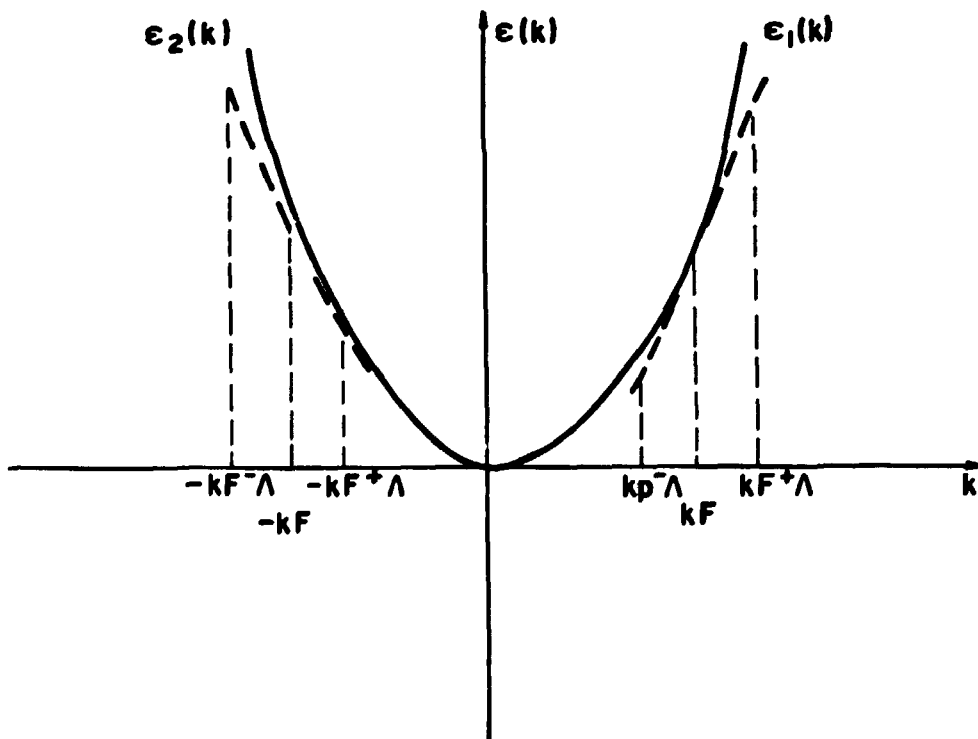


Figura 1