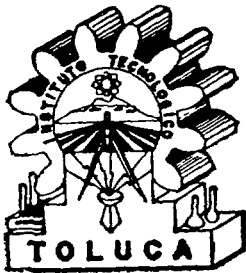


INIS-mf--14398

72 pages

MX 9400039



# **INSTITUTO TECNOLÓGICO de toluca**

**INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES NUCLEARES**

**“ CONTROL LINEALIZADOR ENTRADA-SALIDA  
DE UN REACTOR NUCLEAR ”**

## **TESIS PROFESIONAL**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

**INGENIERO EN ELECTRONICA**

P R E S E N T A :

**VICTOR PEREZ CARBAJAL**

# SEP INSTITUTO TECNOLÓGICO de toluca

DIVISION DE ESTUDIOS  
PROFESIONALES

DEP/318/CAT/94


ASUNTO: Se Autoriza Impresión  
de Trabajo Profesional.

Mayo 20, 1994.

C. VICTOR PEREZ CARBAJAL  
PASANTE DE LA LICENCIATURA EN INGENIERIA  
ELECTRONICA  
P R E S E N T E

De acuerdo con el Reglamento de Titulación del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos, dependiente de la Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológica de la Secretaría de Educación Pública y habiendo cumplido con todas las indicaciones que la Comisión Revisora realizó con respecto a su trabajo profesional intitulado : "CONTROL LINEALIZADOR ENTRADA-SALIDA DE UN REACTOR NUCLEAR", la División de Estudios Profesionales concede autorización para que proceda la impresión del mismo.

A T E N T A M E N T E

  
ING. BENJAMÍN FUENTES MORALES  
JEFE DE LA DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



SECRETARIA DE  
EDUCACION PUBLICA  
INSTITUTO TECNOLÓGICO  
DE TOLUCA  
DIVISION DE ESTUDIOS  
PROFESIONALES

c.c.p.- Expediente.

BFM RZZ maf.

Apartado Postal 890  
C. P. 50000  
Toluca, Méx.

Telefonos: (91-72) 16-03-24  
Conmutador 16-02-45 y 16-03-44  
FAX 11-01-52



# SEP INSTITUTO TECNOLÓGICO de Toluca

Apartado Postal 890

C.P. 50000

Toluca, Méx.

DIVISION DE ESTUDIOS  
PROFESIONALES

DEP/270CAT/94

ASUNTO: Dictamen Impresión  
Comisión Revisora.

Mayo 3, 1994.


C. LIC. MA. DEL ROCIO ZEPEDA ZEPEDA  
COORDINADOR DE APOYO A LA TITULACION  
P R E S E N T E

Por este medio comunicamos a usted, que el Trabajo Profesional intitulado: "CONTROL LINEALIZADOR ENTRADA-SALIDA DE UN REACTOR NUCLEAR ", que presentó el C. VICTOR PEREZ CARBAJAL pasante de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica, en la Opción I, para sustentar el Acto de Recepción Profesional, ha sido revisado y una vez corregido, consideramos que procede su impresión.

Sin otro particular por el momento, quedamos de usted.

A T E N T A M E N T E

  
\_\_\_\_\_  
ING. EFRAÍN GONZALEZ REYES  
REVISOR

  
\_\_\_\_\_  
ING. MIGUEL CAMACHO CORTES  
REVISOR

  
\_\_\_\_\_  
M. en C. OSCAR G. GODOY CABRERA  
REVISOR

  
BFM RZZ maf.



XX ANIVERSARIO DE  
EDUCACION TECNOLÓGICA

*A mis padres:*

*Roberto Pérez Carmona y*

*Elia Carbajal Mejía*

## **Agradecimientos**

*Deseo expresar un sincero y profundo agradecimiento a muchas personas que de alguna forma apoyaron la realización de este trabajo, ya sea en forma intelectual o emotiva. A todas las personas del Departamento de Simulación y Control del Centro Nuclear de México, que con sus valiosas sugerencias contribuyeron a que esta investigación alcanzara sus objetivos. Debo hacer mención especial del Dr. Jorge S. Benítez Read, asesor y director de este trabajo, por sus invaluable sugerencias y por el apoyo brindado en las diversas revisiones del documento.*

*De igual forma, quiero agradecer a los C. Ing. Miguel Camacho, Ing. Efraín Gonzalez, y al M. en C. Oscar G. Godoy, por sus importantes observaciones y puntos de vista que llevaron a la mejora del trabajo.*

*Finalmente, quiero agradecer al Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares la oportunidad y el apoyo que me brindó durante la realización de este trabajo.*

## Contenido

Introducción . . . . .	iv
<b>1. Introducción a la cinética de reactores . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Constitución del núcleo atómico . . . . .	2
1.2 Defecto de masa y la energía de enlace . . . . .	2
1.3 Radiactividad . . . . .	3
1.4 Interacción de los neutrones con la materia . . . . .	4
1.5 Conceptos básicos de la cinética de reactores . . . . .	6
1.6 Ecuaciones dinámicas de un reactor puntual . . . . .	7
1.7 Retroalimentación lineal de la reactividad . . . . .	9
1.8 Modelo puntual del reactor TRIGA Mark III . . . . .	12
<b>2. Análisis de estabilidad de Lyapunov . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1 Conceptos básicos de estabilidad en sistemas no lineales . . . . .	15
2.2 Análisis de Lyapunov de sistemas no lineales no autónomos . . . . .	18
2.3 Análisis de Lyapunov usando el lema de Barbalat . . . . .	23
<b>3. Teoría de linealización . . . . .</b>	<b>26</b>
3.1 Conceptos de geometría y topología diferencial . . . . .	27
3.2 Linealización por retroalimentación . . . . .	31
3.3 Formas normales . . . . .	33
3.4 La dinámica cero . . . . .	34
3.5 Estabilidad y seguimiento . . . . .	35
<b>4. Diseño y simulación del control linealizador entrada/salida . . . . .</b>	<b>38</b>
4.1 Transformación del sistema a la forma normal . . . . .	40
4.2 Análisis de estabilidad de la forma normal . . . . .	42

**Contenido**

<b>4.3 Diseño del controlador . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>4.4 Simulación del controlador . . . . .</b>	<b>44</b>
4.4.1 Simulación de un perfil de potencia trapezoidal . . . . .	45
4.4.2 Simulación a una entrada con secciones no lineales . . . . .	47
<b>5. Conclusiones . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>6. Referencias . . . . .</b>	<b>52</b>

**Anexos**

<b>Anexo A. Programas en Matlab correspondientes a la primer simulación . .</b>	<b>A-1</b>
<b>Anexo B. Programas en Matlab correspondientes a la segunda simulación . .</b>	<b>B-1</b>



## **INTRODUCCION**

Dentro de la gran variedad de sistemas físicos reales, la gran mayoría pertenece al grupo de sistemas no lineales. De hecho, los sistemas conocidos como lineales presentan ciertas características no lineales en determinados intervalos de operación. Los sistemas no lineales son aquellos cuyo comportamiento dinámico se describe por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Una de las características principales de este tipo de sistemas es la variación del comportamiento del sistema según las señales de entrada. Por ejemplo, un sistema no lineal puede comportarse en forma completamente diferente en respuesta a una entrada escalón de diferentes valores.

En general, los procesos de análisis y diseño de los sistemas no lineales se caracterizan por una mayor complejidad, debido a que ya no son válidas algunas de las técnicas empleadas en el análisis y diseño de sistemas lineales tales como el principio de superposición. En consecuencia, se hace necesaria la introducción de sistemas lineales aproximados ó equivalentes que como ya se dijo, son válidos solo en un cierto intervalo de operación. Para el caso de un reactor nuclear, se pueden emplear dos modelos de aproximación lineal: un modelo correspondiente a niveles de baja potencia y encendido del reactor, y otro para niveles de potencia media y alta.

Cuando es necesario que el sistema trabaje en un rango de operación mayor al intervalo de operación lineal se requieren otras técnicas para su análisis y diseño. Cabe hacer notar que la teoría de linealización que se presenta, se aplica solo a un determinado tipo de sistemas, es decir, no todos los sistemas que presentan propiedades no lineales pueden ser linealizados por dicha técnica.

El propósito de este trabajo es el diseño y simulación de un sistema de control no lineal para un reactor de investigación, cuyo intervalo de operación comprende desde el arranque hasta la región

**de plena potencia. Se propone incluir el algoritmo de control aquí desarrollado entre las opciones de control automático que se tendrán en la nueva consola de operación del reactor, la cual se encuentra actualmente en la etapa de diseño. La integración de la nueva consola será aproximadamente a fines de 1995.**

1

# **1** **INTRODUCCION A LA CINETICA DE REACTORES**

---

La etapa inicial en el diseño de un sistema de control automático consiste de una comprensión adecuada de los factores que determinan el comportamiento dinámico del sistema que se quiere controlar.

En el presente capítulo se expone inicialmente una introducción a la física nuclear. Posteriormente se explican los conceptos básicos empleados en cinética de reactores, debido a que es necesario entender adecuadamente los diversos factores que afectan el comportamiento de éstos. A partir de éstos se obtienen las ecuaciones dinámicas de un reactor puntual. Por último, se listan las constantes de las ecuaciones dinámicas del modelo puntual para obtener el modelo del reactor **TRIGA Mark III** del Centro Nuclear de México.

## 1.1 Constitución del núcleo atómico.

El átomo considerado en un tiempo como la partícula más pequeña de la materia consiste de tres partículas fundamentales: electrones, protones y neutrones, siendo las dos primeras las responsables de las características químicas de los elementos. Es bien sabido el arreglo de estas partículas en el átomo: los electrones se mueven en trayectorias orbitales alrededor del núcleo atómico, el cual consiste de  $Z$  protones (número atómico) y  $N$  neutrones. El número total de protones y neutrones determinan el número de masa atómica  $A$ , ( $A = Z + N$ ).

Los núcleos que presentan el mismo número atómico pero difieren en el número de neutrones reciben el nombre de *isótopos*. Todos los elementos presentan un determinado número de isótopos estables, los cuales se encuentran en forma natural, y un determinado número de isótopos inestables, los cuales se pueden obtener en forma artificial.

El *electrón* es una partícula estable (siempre que el átomo se encuentre en estado estable) con una carga negativa igual a  $-1.60210 \times 10^{-19}$  Coul., con una masa aproximada de  $9.109 \times 10^{-28}$  gm. El *protón* tiene una carga positiva igual a  $1.60210 \times 10^{-19}$  Coul., con una masa de  $1.67252 \times 10^{-24}$  gm, y es una partícula estable.

La masa del *neutrón* es ligeramente más grande que la masa del protón y es igual a  $1.67482 \times 10^{-24}$  gm, y es eléctricamente neutro. A menos que se encuentre ligado al núcleo, el neutrón es una partícula inestable. Un neutrón libre decae a un protón con la emisión de rayos  $\beta$  y un antineutrino. La inestabilidad de los neutrones no es de importancia en la teoría de reactores.

## 1.2 Defecto de masa y la energía de enlace.

En general, la masa del núcleo es ligeramente menor (y no igual como podría esperarse) a la suma de las masas individuales de los protones y los neutrones

contenidos en dicho núcleo. Esta diferencia de masa se conoce como *defecto de masa*, y está dado por

$$\Delta = ZM_p + NM_n - M_A \quad (1.2.1)$$

siendo  $M_A$  la masa del núcleo. Cuando  $\Delta$  se expresa en unidades de energía, el defecto de masa representa la energía requerida para separar al núcleo en cada una de sus partes que lo constituyen. Esta energía recibe el nombre de *energía de enlace* del sistema, ya que representa la energía necesaria para mantener unidas las partículas del núcleo. Por otro lado, cuando se forma un núcleo a partir de  $A$  partículas (protones y neutrones),  $\Delta$  es la cantidad de energía liberada en el proceso.

Siempre que es posible formar una configuración más estable mediante la combinación de dos núcleos menos estables existe una liberación de energía en el proceso. En general, el proceso que involucra la formación de núcleos más estables a partir de dos núcleos menos estables y más ligeros, se conoce como *fusión nuclear*. Son este tipo de reacciones que tienen lugar en las bombas de hidrógeno, en las cuales se libera una enorme cantidad de energía.

Por otro lado, al proceso de formación de dos núcleos más ligeros y más estables, a partir de un núcleo más pesado y menos estable se conoce como *fisión nuclear*, y es la fuente de energía de los reactores nucleares de fisión.

### 1.3 Radiactividad.

Se denomina *radiactividad* al proceso de desintegración radiactiva de los núcleos. Este proceso se rige por una ley fundamental: la probabilidad de decaimiento de un núcleo por unidad de tiempo es una constante independiente del tiempo. Esta es la constante de decaimiento denotada por  $\lambda$ .

Existen cuatro tipos de decaimiento radiactivo: 1) emisión de partículas  $\alpha$ , 2) emisión de partículas  $\beta$ , 3) emisión de positrones ( $\beta^+$ ) y, 4) captura  $k$ . Una partícula  $\alpha$  es un núcleo de helio  ${}^4\text{He}$ .

Cuando un núcleo radiactivo decae por emisión de partículas  $\alpha$ , su número atómico  $Z$  disminuye en 2 y su número de masa  $A$  disminuye en 4. Con frecuencia, el nuevo núcleo formado (núcleo hijo) después de la emisión  $\alpha$  se encuentra en un estado excitado de energía, y el núcleo decae entonces a su estado estable mediante la emisión de radiación gamma.

Una partícula  $\beta$  es un electrón emitido desde un núcleo atómico. Los neutrones en el núcleo son transformados en protones y electrones, siendo estos electrones (partículas  $\beta$ ) los emitidos. Las partículas  $\beta$  tienen diferentes niveles de energía formando un espectro. La energía promedio de una de ellas es aproximadamente la tercera parte de la máxima energía de este espectro.

Los isótopos radiactivos que presentan un exceso de protones en el núcleo pueden decaer mediante la emisión de positrones ( $\beta^+$ ). El positrón es una partícula con una masa igual a la masa del electrón pero con carga positiva. Puede considerarse como una partícula  $\beta$  con carga positiva. El positrón es una partícula inestable y reacciona con un electrón para causar la extinción de ambas partículas y la producción adicional de radiación gamma.

La captura  $k$  es un proceso en el que un electrón en la región más interna del átomo es capturado por el núcleo y se combina con un protón para formar un neutrón con la emisión de un neutrino.

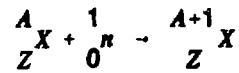
## **1.4 Interacción de los neutrones con la materia.**

La operación de un reactor nuclear depende totalmente de la manera en la cual los neutrones interactúan con el núcleo atómico de los materiales dentro del reactor. Debido a la carencia de carga de los neutrones, no existen fuerzas de repulsión conforme éstos se acercan al núcleo. Como consecuencia, neutrones de cualquier energía pueden interactuar con el núcleo. Existen dos mecanismos mediante los cuales el neutrón interactúa con el núcleo: la dispersión potencial elástica y la formación de núcleos compuestos.

## Introducción a la cinética de reactores

La dispersión potencial es un proceso en el cual el neutrón incidente es dispersado ó rebotado hacia afuera del núcleo. El núcleo permanece sin cambios y en su estado estable de energía.

El proceso de formación de núcleos compuestos involucra primeramente la absorción del neutrón incidente por el núcleo para formar un núcleo compuesto:



y la energía cinética del neutrón se transforma en energía de excitación del núcleo compuesto. El proceso de desexcitación incluye la emisión de partículas, radiaciones electromagnéticas ó ambos. Sin embargo, en el caso de elementos muy pesados el núcleo compuesto se puede formar en un estado de energía tal que decae mediante la ruptura del núcleo en dos núcleos de masa diferente, es decir, mediante fisión.

El primer requerimiento para la obtención de energía nuclear es un sistema en el cual se desarrolle una reacción de fisión en cadena auto-sostenida y controlable. El sistema en el cual tiene lugar la reacción en cadena se denomina reactor nuclear. La condición necesaria para obtener una reacción en cadena auto-sostenida y estable, es que exactamente uno de los neutrones producidos en una fisión origine una segunda fisión, de la cual un neutrón continúe en la generación de una tercera fisión, y así sucesivamente. En este tipo de reacciones, la densidad de neutrones y la razón de la fisión permanecen constantes. Esta condición se puede expresar mediante el factor de multiplicación  $k$ , el cual se define como la razón del número de neutrones en una generación al número de neutrones de la generación precedente. Cuando el factor de multiplicación  $k$  es exactamente la unidad, la condición para una reacción en cadena estable se satisface, y se dice que el reactor está en estado de criticidad ó estado crítico. Si este factor es mayor que la unidad se dice que el reactor es supercrítico, mientras que si es menor a la unidad, entonces se dice que el reactor es subcrítico.

El componente más importante de cualquier reactor es el combustible en el cual tiene lugar la fisión. Actualmente, el uranio es el combustible nuclear más ampliamente usado, aunque el isótopo  $^{239}\text{Pu}$  también está entrando en uso. En muchos

reactores se incluye un elemento llamado moderador con el fin de disminuir la energía de los neutrones desde la energía de fisión hasta la energía térmica. Además, en casi todos los reactores excepto en los de baja potencia se requiere un refrigerante, el cual se usa para transportar la energía liberada en el combustible mediante la fisión hacia intercambiadores de calor externos.

Los neutrones son consumidos en dos formas: por fuga y por absorción. La absorción dentro del reactor incluye los procesos de fisión y captura en el combustible, y captura en otros materiales tales como el moderador, refrigerante, barras de control, etc. Las razones relativas a las cuales se presentan estos procesos dependen del tamaño y composición del reactor.

## **1.5 Conceptos básicos de la cinética de reactores.**

El comportamiento dinámico de la población de neutrones dentro del núcleo del reactor determina tanto la generación de energía como los cambios de temperatura que experimentan los componentes del núcleo. Los reactores nucleares de fisión pueden describirse en una primera aproximación mediante los mismos principios dinámicos básicos, ya sean reactores térmicos ó rápidos, así como si el combustible nuclear es  $U^{235}$ ,  $Pu^{239}$ , ó  $U^{233}$ .

El fenómeno esencial es por supuesto la fisión inducida por neutrones de estos isótopos, acompañada por la liberación de otros neutrones, logrando así una reacción en cadena auto-sostenida. En esta aproximación, la diferencia más importante entre reactores térmicos y rápidos es la escala de tiempo para la reproducción de neutrones.

Los conceptos básicos comunes (en la dinámica de reactores) a todos los tipos de reactores de fisión son la reactividad, el tiempo de generación de neutrones y los neutrones retardados. La reactividad es la desviación relativa del factor de reproducción de neutrones  $k$  con respecto a la unidad. La reactividad es una propiedad integral de todo el reactor, y depende por lo tanto del tamaño del reactor, de las cantidades y densidades relativas de varios materiales, y de las secciones



transversales neutrónicas para la dispersión, absorción y fisión. Ya que estos factores se alteran con la temperatura, presión y otros efectos de la fisión, la reactividad depende de la historia del comportamiento del reactor. El cálculo de esta *retroalimentación* de reactividad es uno de los problemas centrales de la dinámica de reactores. Además, dado que las ecuaciones dinámicas contienen el producto de la reactividad y la potencia instantánea, las ecuaciones son generalmente no lineales.

El tiempo de generación de neutrones es el tiempo promedio para la reproducción neutrónica en un ensamble multiplicador. Es también una propiedad integral del reactor. El tiempo de generación de neutrones depende principalmente del número de colisiones de dispersión que normalmente sufre un neutrón antes de salir del reactor (fuga) ó desaparecer en una reacción nuclear (absorción).

Los neutrones retardados, aún cuando representan menos del uno por ciento de la producción neutrónica en fisión, son extremadamente importantes en la determinación de escalas de tiempo en dinámica de reactores. Estos neutrones se liberan en determinadas transiciones que ocurren en algunos fragmentos de fisión altamente excitados.

## 1.6 Ecuaciones dinámicas de un reactor puntual.

La cinética de reactores estudia el comportamiento de la población de neutrones en un reactor no crítico. Analiza las variaciones transitorias que resultan de una desviación con respecto al estado crítico. Esta desviación lleva al reactor a un estado supercrítico ó subcrítico, y sus propiedades cambian de tal forma que su factor de multiplicación es diferente de la unidad.

Usando la aproximación de difusión, es posible deducir las ecuaciones que describen el comportamiento de la población neutrónica como función de la posición y del tiempo. Para obtener estas ecuaciones se establece un balance entre la razón de producción de neutrones y la razón de pérdida de los mismos en un elemento de volumen  $dV$ , alrededor del punto  $r$  al tiempo  $t$ . En la deducción de estas ecuaciones

## Introducción a la cinética de reactores

se considera generalmente un solo grupo de energía de neutrones por debajo de 0.4 eV, que son los llamados neutrones térmicos.

El modelo puntual es un tratamiento aproximado que parte de la suposición de que las funciones de la potencia neutrónica y de los precursores de neutrones retardados son separables en espacio y tiempo, lo cual es válido solo si el reactor está cerca de criticidad y si no se localiza una gran perturbación. Esta suposición nos lleva finalmente a suponer al núcleo del reactor localizado en un punto, con lo cual se obtienen las ecuaciones del reactor independientes de la posición y en función solo del tiempo<sup>(1)</sup>:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left( \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \right) n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) + q(t) \quad (1.6.1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (1.6.2)$$

en donde

$n(t)$  es la concentración ó potencia neutrónica.

$\rho(t)$  es la reactividad.

$\beta$  es la fracción de neutrones retardados.

$\Lambda$  es el tiempo de generación de neutrones instantáneos.

$\lambda_i$  es la constante de decaimiento del i-ésimo grupo de precursores.

$C_i(t)$  es la concentración debida al i-ésimo grupo de precursores.

$q(t)$  es la intensidad de la fuente efectiva externa de neutrones.

$\beta_i$  es la fracción del  $i$ -ésimo grupo de neutrones retardados.

Las ecuaciones (1.6.1) y (1.6.2) representan la formulación del modelo del reactor puntual. Si agrupamos los seis grupos de precursores de neutrones retardados en un solo grupo equivalente, las ecuaciones cinéticas del reactor puntual las escribimos como:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left( \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \right) n(t) + \lambda C(t) \quad (1.6.3)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda C(t) \quad (1.6.4)$$

en donde la constante de decaimiento equivalente estará dada por<sup>11)</sup>

$$\lambda = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^6 \beta_i \lambda_i \quad (1.6.5)$$

la cual es adecuada para cambios rápidos de concentración de neutrones y precursores.

## 1.7 Retroalimentación lineal de la reactividad.

En general, la reactividad total de un sistema se puede expresar como

$$\rho(t) = \rho_{ext}(t) + \rho_{int}(t) \quad (1.7.1)$$

en donde  $\rho_{ext}(t)$  es la contribución a la reactividad total debido a causas externas,

tales como la inserción ó extracción de barras de combustible ó de control.  $\rho_{int}(t)$  es la contribución a la reactividad total debido a cambios en las características internas de los componentes del reactor como cambios de fase de refrigerante, cambios en la densidad de elementos combustibles y por tanto, de sus distintas secciones macroscópicas eficaces.

Como ejemplo, consideremos el reactor de investigación del Centro Nuclear de México. En este reactor, la extracción de la barra de control produce un aumento rápido en la temperatura de los elementos combustibles, cambiando su densidad al igual que otras propiedades, tales como sus secciones eficaces. Las moléculas de hidruro de circonio presentes en los elementos combustible-moderador tienen niveles de energía cuantizados de tal forma que a temperaturas cuyas energías de vibración están por debajo de la energía térmica (0.4 eV) la molécula se comporta como un moderador; los neutrones rápidos que chocan con ella ceden parte de su energía a la molécula, mientras que los neutrones en la región térmica están en equilibrio con ella. Cuando la temperatura de los elementos combustibles aumenta de tal manera que la energía de vibración es mayor a 0.4 eV, la molécula es excitada y la región de equilibrio térmico se desplaza a otra región dónde se reducen las reacciones de fisión, consiguiéndose así el apagado del reactor.

A los efectos que causan que  $\rho_{int}(t)$  sea diferente de cero se les denomina efectos de retroalimentación. Los modelos más sencillos de retroalimentación son aquellos que involucran solamente los efectos debidos a los cambios de temperatura. En este caso, la reactividad interna se puede expresar como:

$$\rho_{int}(t) = - \alpha (T - T_0) \quad (1.7.2)$$

donde  $\alpha$  es el negativo del coeficiente de reactividad por temperatura ( $\alpha > 0$  para el reactor Triga Mark III),  $T_0$  es la temperatura promedio de referencia para la cual la reactividad de retroalimentación es cero, y  $T$  es la temperatura promedio del reactor.

## Introducción a la cinética de reactores

Ya que la temperatura depende de la potencia del reactor, es necesario encontrar la relación entre la potencia y la temperatura. La ley de enfriamiento de Newton es adecuada para representar la variación de la temperatura cuando se usa el modelo de cinética puntual, y se expresa como:

$$\frac{dT}{dt} = Kn(t) - \gamma(T - T_c) \quad (1.7.3)$$

en donde  $K$  es el recíproco de la capacidad calorífica del reactor ( $^{\circ}\text{C}/\text{Watt}\cdot\text{Seg}$ ),  $\gamma$  es el recíproco del tiempo promedio de transferencia de calor del combustible al refrigerante (1/Seg), y  $T_c$  es la temperatura promedio del refrigerante ( $^{\circ}\text{C}$ ). En la determinación de la constante  $K$ , el valor de la capacidad calorífica no está dada por unidad de masa, sino en forma global para los 88 elementos combustibles del reactor. Si  $T_0$  representa una temperatura de equilibrio a una potencia estacionaria  $n_0$  se obtiene

$$\frac{dT_0}{dt} = Kn_0 - \gamma(T_0 - T_c) = 0 \quad (1.7.4)$$

y combinando las ecuaciones (1.7.3) y (1.7.4) resulta

$$\frac{dT}{dt} = K [n(t) - n_0] - \gamma(T - T_0) \quad (1.7.5)$$

y usando las ecuaciones (1.7.2) y (1.7.5) obtenemos finalmente

$$\frac{d\rho_{inc}(t)}{dt} = -\alpha K(n - n_0) - \gamma\rho_{inc}(t) \quad (1.7.6)$$

## 1.8 Modelo puntual del reactor TRIGA Mark III.

En particular, para el estudio del comportamiento del reactor de investigación Triga Mark III del Centro Nuclear de México, se consideran los siguientes valores correspondientes a los coeficientes de las ecuaciones del modelo de cinética puntual<sup>(2)</sup>:

$$\beta = 0.006433$$

$$\Lambda = 38 \mu\text{Seg.}$$

$$\alpha = 0.01359875 \text{ (}^\circ\text{C)}^{-1}$$

$$K = 1/5.21045 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{C}/(\text{Watt} \cdot \text{Seg})$$

$$\gamma = 0.2 \text{ Seg}^{-1}$$

$$\beta_1 = 0.240 \times 10^{-7}$$

$$\lambda_1 = 0.0124 \text{ Seg}^{-1}$$

$$\beta_2 = 1.410 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_2 = 0.0305 \text{ Seg}^{-1}$$

$$\beta_3 = 1.255 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_3 = 0.1140 \text{ Seg}^{-1}$$

$$\beta_4 = 2.525 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_4 = 0.3013 \text{ Seg}^{-1}$$

$$\beta_5 = 0.737 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_5 = 1.1360 \text{ Seg}^{-1}$$

$$\beta_6 = 0.266 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_6 = 3.0130 \text{ Seg}^{-1}$$

Así, el modelo que se va a considerar para todo el análisis posterior toma la forma:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{1}{\Lambda} \rho_{\text{ind}}(t) n(t) - \frac{\beta}{\Lambda} n(t) + \frac{1}{\Lambda} \rho_{\text{ext}}(t) n(t) + \lambda C(t) \quad (1.8.1)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda C(t) \quad (1.8.2)$$

$$\frac{d\rho_{\text{ind}}(t)}{dt} = -\alpha K(n - n_0) - \gamma \rho_{\text{ind}}(t) \quad (1.8.3)$$

## **2** **ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LYAPUNOV**

---

Dentro del estudio de las diversas características principales de un sistema de control, debemos considerar las condiciones de estabilidad. La razón es que los sistemas inestables presentan un alto riesgo de daño a los componentes del mismo, lo que da como resultado su muy poca (ó nula) utilidad. En forma intuitiva podemos describir a un sistema de control estable como aquél que en operación normal *siempre* se mantiene lo suficientemente cerca del punto de operación deseado, una vez que ha iniciado en algún punto cercano del punto de operación de referencia. Cualquier sistema de control lineal ó no lineal involucra problemas de estabilidad, los cuales deben ser cuidadosamente estudiados.

En un panorama general, podemos visualizar una clara diferencia en las técnicas empleadas para conocer la estabilidad de sistemas de control lineal y no lineal. Esto se debe a la relativa facilidad de análisis de los sistemas lineales. Esto permite la formulación de reglas generales tales como los criterios de Nyquist, Routh y el método del lugar de las raíces, que permiten conocer la estabilidad de un sistema lineal. Esta relativa facilidad de análisis no se presenta para sistemas no lineales.

El método general ampliamente usado para la determinación de la estabilidad de un sistema no lineal se basa en la teoría introducida por el matemático ruso Alexander Mikhailovich Lyapunov. En la teoría de Lyapunov se tienen dos métodos para el análisis de estabilidad de sistemas: el método de linealización (indirecto), y el

método directo (ó el segundo método de Lyapunov). El primero permite conocer la estabilidad *local* alrededor de un punto de equilibrio a partir de su modelo lineal aproximado. El segundo método no se restringe a movimientos locales e investiga las propiedades de estabilidad de un sistema mediante *funciones generalizadas* de energía, características del sistema, sin la necesidad de obtener la solución del modelo no lineal del sistema. Nuestro estudio se basa en el método directo de Lyapunov ó segundo método de Lyapunov.



## 2.1 Conceptos básicos de estabilidad en sistemas no lineales.

La expresión general de un sistema no lineal es de la forma

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.1.1)$$

siendo  $x$  el vector de estado del sistema. Los sistemas no lineales en general se clasifican en autónomos y no autónomos. El sistema no lineal (2.1.1) se dice que es autónomo cuando  $f$  no depende explícitamente del tiempo. Por lo tanto, un sistema no lineal autónomo se puede expresar como

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1.2)$$

mientras que un sistema no autónomo tiene la forma (2.1.1).

Las definiciones que a continuación se presentan, utilizan el concepto de *puntos de equilibrio*. Un punto de equilibrio  $x^*$  para un sistema no autónomo de la forma (2.1.1) se define por

$$f(x^*, t) = 0, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.1.3)$$

Esta ecuación describe el hecho de que el sistema permanece siempre en el punto  $x^*$  después de  $t_0$ .

**Definición 2.1.1** El punto de equilibrio  $0$  es *estable* en  $t_0$  si para cualquier  $R > 0$ , existe un escalar positivo  $r(R, t_0)$  tal que

$$|x(t_0)| < r \quad \rightarrow \quad |x(t)| < R, \quad \forall t \geq t_0$$

De otra forma, el punto de equilibrio  $0$  es *inestable*.

Esta definición nos explica que es posible mantener la trayectoria del sistema  $x(t)$  cerca del origen, siempre que el inicio de dicha trayectoria también se

## Análisis de estabilidad de Lyapunov

encuentre cerca del origen. Si denotamos por  $B_R$  la región definida por  $\|x\| < R$  en el espacio de estado, es posible dar una explicación más formal de la definición 2.1.1, la cual indica que el origen es estable si existe un valor  $r(R)$  tal que el inicio de la trayectoria  $x(t)$  dentro de la región  $B_R$  en  $t = 0$  garantiza la permanencia de  $x(t)$  dentro de  $B_R$  para  $t > 0$ .

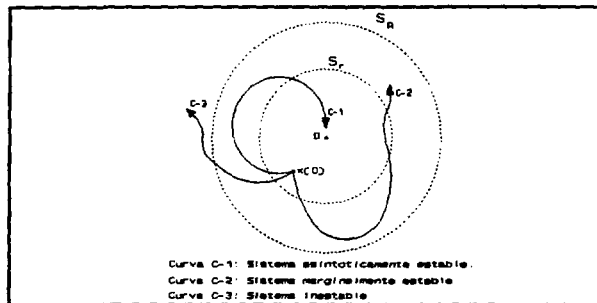
**Definición 2.1.2** El punto de equilibrio  $0$  es asintóticamente estable en  $t_0$ , si

i) es estable

ii) existe un  $r(t_0) > 0$  tal que

$$\|x(t_0)\| < r(t_0) \rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

Es posible dar una interpretación geométrica a las definiciones de estabilidad anteriores. Consideremos las situaciones siguientes.



**Figura 1. Los conceptos de estabilidad.**

En esta figura, se presenta la forma en la que se desarrollan tres trayectorias dentro de las regiones  $S_R$  y  $S_r$ . La curva C-1 representa el comportamiento de un

## Análisis de estabilidad de Lyapunov

sistema asintóticamente estable debido a que con el tiempo, dicha trayectoria se dirige al origen. La curva C-2 representa el comportamiento de un sistema estable. En la figura, la curva número dos (C-2) nunca sale de la región  $S_R$ , pero tampoco se dirige al origen. La curva C-3 por lo tanto, representa a un sistema inestable.

La estabilidad asintótica en la definición 2.1.2 requiere de la existencia de una región atractiva para cualquier valor de  $t_0$ . El tamaño de la región atractiva y la velocidad de convergencia de la trayectoria pueden ser funciones de  $t_0$  según la siguiente definición.

**Definición 2.1.3** El punto de equilibrio  $0$  es exponencialmente estable si existen dos números positivos  $\alpha$  y  $\lambda$  tales que para  $x(t_0)$  suficientemente pequeño

$$|x(t)| \leq \alpha |x_0| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

**Definición 2.1.4** El punto de equilibrio  $0$  es asintóticamente estable en forma global si

$$\forall x(t_0), \quad x(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

Los conceptos de estabilidad de Lyapunov y estabilidad asintótica anteriores para sistemas no autónomos, muestran la importancia de los efectos del tiempo inicial. En la práctica, usualmente se requiere que el sistema presente cierta uniformidad en su comportamiento sin importar cuando inicia la operación, ya que los sistemas no autónomos con propiedades de uniformidad tienen cierta habilidad para soportar perturbaciones. De esto concluimos que debido a que los sistemas autónomos son independientes del tiempo inicial, todas sus propiedades de estabilidad son uniformes.

**Definición 2.1.5** El punto de equilibrio  $0$  es uniformemente estable en forma local si el escalar  $r$  en la definición 2.1.1 se elige independiente de  $t_0$ , es decir, si  $r = r(R)$ .

## **Análisis de estabilidad de Lyapunov**

De igual forma, la definición de estabilidad asintótica uniforme intenta restringir también el efecto del tiempo inicial  $t_0$  en el patrón de convergencia de estado.

**Definición 2.1.6** El punto de equilibrio en el origen es asintóticamente estable en forma uniforme y local si

- i) es uniformemente estable
- ii) existe una región de atracción  $B_{R_0}$  cuyo radio es independiente de  $t_0$ , de tal forma que cualquier trayectoria del sistema con estados iniciales en  $B_{R_0}$  converge uniformemente a  $0$ .

## **2.2 Análisis de Lyapunov de sistemas no lineales no autónomos.**

La filosofía básica del método directo de Lyapunov es la extensión matemática de una observación física fundamental: si la energía total de un sistema mecánico ó eléctrico es disipada en forma continua, entonces el sistema lineal ó no lineal debe quedar eventualmente en un punto de equilibrio. Así, podemos determinar la estabilidad de un sistema mediante el análisis de la variación de una simple función escalar. Este tipo de funciones deben tener ciertas características, las cuales, para su descripción, son necesarias las siguientes definiciones.

**Definición 2.2.1** Una función escalar continua  $V(x)$  es definida positiva localmente si  $V(0) = 0$  y,

$$x \neq 0 \quad \rightarrow \quad V(x) > 0, \quad \forall x \in B_{R_0}$$

## Análisis de estabilidad de Lyapunov

Si  $V(\mathbf{0}) = 0$  y la propiedad anterior se cumple para todo el espacio de estado, entonces  $V(\mathbf{x})$  es definida positiva en forma global.

Una función  $V(\mathbf{x})$  es definida negativa si  $-V(\mathbf{x})$  es definida positiva;  $V(\mathbf{x})$  es semidefinida positiva si  $V(\mathbf{0}) = 0$  y  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;  $V(\mathbf{x})$  es semidefinida negativa si  $-V(\mathbf{x})$  es semidefinida positiva. El prefijo *semi* indica la posibilidad de que  $V$  sea igual a cero para algún valor  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

El estudio de sistemas no autónomos usando el método directo de Lyapunov requiere de funciones escalares con dependencia explícita del tiempo  $V(\mathbf{x}, t)$ .

**Definición 2.2.2** Una función escalar dependiente del tiempo  $V(\mathbf{x}, t)$  es definida positiva localmente si  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  y existe una función definida positiva invariante en el tiempo  $V_0(\mathbf{x})$  tal que

$$\forall t \geq t_0, \quad V(\mathbf{x}, t) \geq V_0(\mathbf{x})$$

Otros conceptos relacionados se pueden definir de una manera semejante, ya sea local ó globalmente; una función  $V(\mathbf{x}, t)$  es definida negativa si  $-V(\mathbf{x}, t)$  es definida positiva;  $V(\mathbf{x}, t)$  es semidefinida positiva si  $V(\mathbf{x}, t)$  domina a una función semidefinida positiva invariante en el tiempo;  $V(\mathbf{x}, t)$  es semidefinida negativa si  $-V(\mathbf{x}, t)$  es semidefinida positiva.

**Definición 2.2.3** Una función escalar  $V(\mathbf{x}, t)$  es decreciente si  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  y si existe una función definida positiva invariante en el tiempo  $V_1(\mathbf{x})$  tal que

$$\forall t \geq 0, \quad V(\mathbf{x}, t) \leq V_1(\mathbf{x})$$

## Análisis de estabilidad de Lyapunov

En otras palabras, una función escalar  $V(x, t)$  es decreciente si es dominada por una función definida positiva invariante en el tiempo.

Con todos estos conceptos, es posible formular ahora el teorema de estabilidad de Lyapunov para sistemas no lineales no autónomos.

**Teorema 2.2.1** Si en una región  $B_{R_0}$  alrededor de un punto de equilibrio, existe una función escalar  $V(x, t)$  con derivadas parciales continuas tales que

1.  $V$  es definida positiva
2.  $\dot{V}$  es semidefinida negativa

Entonces el punto de equilibrio  $0$  es estable; si adicionalmente

3.  $V$  es decreciente

entonces el origen es *uniformemente estable*. Si la condición 2 se restringe a que  $\dot{V}$  sea definida negativa, entonces el punto de equilibrio es *asintóticamente estable en forma uniforme*. Si la región  $B_{R_0}$  está formada por todo el espacio de estado, y las condiciones 1, la restricción de la condición 2, la condición 3 y

4.  $V(x, t) \rightarrow \infty$  conforme  $\|x\| \rightarrow \infty$  se satisfacen, entonces el punto de equilibrio en  $0$  es *asintóticamente estable en forma global y uniforme*.

Si en cierta vecindad del punto de equilibrio,  $V$  es definida positiva y  $\dot{V}$  es semidefinida negativa, entonces  $V$  es llamada *una función de Lyapunov para el sistema*.

## Análisis de estabilidad de Lyapunov

### Ejemplo 2.2.1

Consideremos el siguiente sistema.

$$\dot{x}_1 = -x_1 - e^{-2t} x_2 \quad (2.2.1)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 \quad (2.2.2)$$

Para determinar la estabilidad en el punto de equilibrio  $0$ , podemos usar la función

$$V(x,t) = x_1^2 + (1 + e^{-2t})x_2^2 \quad (2.2.3)$$

El análisis de esta función produce los siguientes resultados:

1. La función  $V(x,t)$  es definida positiva, debido a que  $V(0,t) = 0$  y  $V(x,t)$  domina a la función  $V_0(x) = x_1^2 + x_2^2$ .

2.  $\dot{V}(x,t)$  es definida negativa debido a que

$$\dot{V}(x,t) = -2[x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2(1 + e^{-2t})] \quad (2.2.4)$$

Se observa que  $\dot{V}(0,t) = 0$  y ya que  $-\dot{V}(x,t)$  domina a la función

$$V(x) = 2(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$$

entonces  $\dot{V}(x,t)$  es definida negativa.

3. La función  $V(x,t)$  es decreciente al ser dominada por la función

$$V_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2$$

4. La función  $V(x,t)$  es radialmente no acotada, es decir,  $V(x,t) \rightarrow \infty$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

## **Análisis de estabilidad de Lyapunov**

Por lo que se concluye que el punto de equilibrio  $0$  es asintóticamente estable en forma global y uniforme.

Los resultados anteriores asumen la disponibilidad de una función de Lyapunov para el análisis de estabilidad de sistemas no lineales no autónomos, sin embargo, no proporcionan ninguna información acerca de la existencia de dichas funciones, y tampoco sugieren técnicas para encontrarlas en el caso en que sí existan. Algunos teoremas llamados *Teoremas de Lyapunov inversos* garantizan la existencia de funciones de Lyapunov siempre que se asegure la estabilidad del sistema. La importancia de estos teoremas se debe a que si se sabe que un subsistema presenta ciertas propiedades de estabilidad, entonces, según los teoremas inversos es posible encontrar funciones de Lyapunov para dicho subsistema, que servirán posteriormente para la generación de una función de Lyapunov para todo el sistema. Se presentan en seguida tres de los teoremas de Lyapunov inversos, considerando que existe un teorema para cada teorema de estabilidad (estabilidad, estabilidad uniforme, estabilidad asintótica, estabilidad asintótica uniforme, etc.).

### **Teorema 2.2.2 Teorema de estabilidad<sup>(3)</sup>.**

Si el origen de (2.1.1) es estable, entonces existe una función definida positiva  $V(x,t)$  con una derivada no positiva ( $\dot{V}(x,t) \leq 0$ ).

### **Teorema 2.2.3 Teorema de estabilidad asintótica uniforme<sup>(3)</sup>.**

Si el punto de equilibrio en el origen es asintóticamente estable en forma uniforme, entonces existe una función  $V(x,t)$  definida positiva decreciente con una derivada definida negativa.

De esta forma, si en el sistema formado por las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) sabemos que el origen es estable en forma asintótica y uniforme, los teoremas anteriores aseguran la existencia de funciones de Lyapunov para este sistema, (la ecuación (2.2.3) por ejemplo).



## Análisis de estabilidad de Lyapunov

El siguiente teorema nos permite estimar explícitamente la razón de convergencia de algunos sistemas no lineales.

### **Teorema 2.2.4** Teorema de estabilidad exponencial<sup>39</sup>.

Si la función vectorial  $f(x, t)$  en (2.1.1) tiene primeras derivadas parciales continuas y acotadas con respecto a  $x$  y  $t$ , para  $x$  en una cierta región, y para todo  $t > 0$ , entonces el punto de equilibrio en el origen es exponencialmente estable si y solo si existe una función  $V(x, t)$  y algunas constantes positivas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  tales que

$$\forall x \in B_r, \quad \forall t \geq 0,$$

$$\alpha_1 |x|^2 \leq V(x, t) \leq \alpha_2 |x|^2$$

$$\dot{V} \leq -\alpha_3 |x|^2$$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \leq \alpha_4 |x|$$

## 2.3 Análisis de Lyapunov usando el Lema de Barbalat.

En los procesos de análisis de estabilidad, con frecuencia es difícil encontrar funciones escalares cuya derivada en el tiempo sea definida negativa. En los sistemas autónomos este problema se afronta mediante el uso de los teoremas del conjunto invariante, los cuales pierden validez en sistemas no autónomos.

El lema de Barbalat es un resultado puramente matemático concerniente a las propiedades asintóticas de funciones y sus derivadas. Cuando se aplica a sistemas

## Análisis de estabilidad de Lyapunov

dinámicos, particularmente a sistemas no autónomos, puede conducir a la solución satisfactoria de muchos problemas de estabilidad asintótica.

El uso del lema de Barbalat en un análisis de estabilidad refleja el hecho de que el decrecimiento de una función de Lyapunov  $V$ , tiene que desvanecerse gradualmente (y como consecuencia  $\dot{V}$  tiene que converger a cero), debido a que  $V$  es inferiormente acotado. El lema de Barbalat se presenta en seguida<sup>(3)</sup>.

### Lema 2.3.1

Si la función diferenciable  $f(t)$  tiene un límite finito cuando  $t \rightarrow \infty$ , y si  $\dot{f}(t)$  es uniformemente continua, entonces

$$\dot{f}(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

La condición suficiente para que una función diferenciable sea uniformemente continua, es que su derivada esté acotada. Esto es fácilmente comprobable mediante el teorema que explica que

$$\forall t, t_1, \exists t_2 \text{ (entre } t \text{ y } t_1) \text{ tal que}$$

$$g(t) - g(t_1) = g(t_2)(t - t_1)$$

Para el análisis de estabilidad se emplea el siguiente Lema.

### Lema 2.3.2

Si una función escalar  $V(x,t)$  satisface las siguientes condiciones:

- $V(x,t)$  es inferiormente acotada
- $\dot{V}(x,t)$  es semidefinida negativa
- $\dot{V}(x,t)$  es uniformemente continua en el tiempo

entonces  $\dot{V}(x,t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## Análisis de estabilidad de Lyapunov

### Ejemplo 2.3.1

Sea el sistema

$$\dot{e} = -e + \theta w(t)$$

$$\dot{\theta} = -e w(t)$$

donde  $e$  y  $\theta$  son dos estados de la dinámica de lazo cerrado que representan el error de rastreo ó seguimiento y el parámetro de error respectivamente, y  $w(t)$  es una función continua y acotada. Si analizamos las propiedades asintóticas de este sistema con la función

$$V = e^2 + \theta^2$$

entonces

$$\dot{V} = 2e\dot{e} + 2\theta\dot{\theta} = -2e^2 \leq 0$$

Esto implica que  $V(t) \leq V(0)$  y por lo tanto que los estados  $e$  y  $\theta$  se encuentran acotados. Para emplear el lema de Barbalat, probemos la continuidad de  $\dot{V}$  ;

$$\ddot{V} = -4e(e + \theta w(t))$$

esto demuestra que  $\dot{V}$  es una función acotada debido a que  $w(t)$  es acotada por hipótesis y ya se mostró que  $e$  y  $\theta$  también están acotados. De ahí que  $\dot{V}$  es uniformemente continua. La aplicación del lema de Barbalat indica entonces que  $e \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  .

# 3 **TEORIA DE LINEALIZACION**

---

La teoría de linealización por retroalimentación que aquí se presenta se basa en un concepto totalmente diferente a la teoría de aproximación lineal de ecuaciones no lineales (método indirecto de Lyapunov). Esta última nos permite deducir las propiedades de estabilidad de un sistema en base al análisis de su modelo lineal aproximado. Cuando el sistema linealizado es marginalmente estable, los términos de más alto orden que se desprecian en el proceso de linealización pueden tener un efecto importante en la estabilidad del sistema no lineal, lo cual restringe la aplicación del método a sistemas con variaciones pequeñas, dando como resultado conclusiones de estabilidad en forma local.

Nuestro enfoque de linealización se fundamenta en la teoría de linealización por retroalimentación no lineal de las variables de estado del sistema. La linealización por retroalimentación es una aproximación al diseño de control no lineal. La idea básica es transformar algebraicamente la dinámica de un sistema no lineal a un sistema total ó parcialmente lineal, y así, aplicar las técnicas de control lineal.

Dentro de la linealización por retroalimentación, se encuentra la linealización entrada/salida, la cual consiste en la generación de una relación lineal de la entrada y la salida para la formulación posterior de un controlador.

Es importante mencionar que no todos los sistemas que presentan características no lineales son factibles para la aplicación de la linealización entrada/salida.

### 3.1 Conceptos de geometría y topología diferencial.

Con el fin de desarrollar formalmente el proceso de linealización por retroalimentación, es necesario introducir algunas definiciones de geometría y topología diferencial. En la descripción de estos conceptos, llamaremos a una función vectorial  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^n$ . La razón intuitiva para este término es que a cada función vectorial  $f$  le corresponde un campo de vectores en un espacio  $n$ -dimensional. En lo sucesivo, estaremos interesados solo en campos vectoriales lisos. Por un campo vectorial liso debemos entender que la función  $f(x)$  tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden.

Dada una función escalar lisa  $h(x)$  del estado  $x$ , el gradiente de  $h$  denotado por  $\nabla h$  es igual a

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.1.1)$$

Similarmente, dado un campo vectorial  $f(x)$ , el Jacobiano de  $f$  denotado por  $\nabla f$  es igual a

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Ahora definiremos dos conceptos que ocuparemos muy frecuentemente; el *Lie Bracket*, y la *derivada de una función escalar con respecto a un vector*.

Dada una función escalar  $h(x)$  y un campo vectorial  $f(x)$ , se define una nueva función  $L_f h$  llamada la derivada Lie de  $h$  con respecto a  $f$ .

**Definición 3.1.1** Sea  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar lisa, y  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial liso en  $\mathbb{R}^n$ , entonces la derivada Lie de  $h$  con respecto a  $f$  se define por

$$L_f h = (\nabla h)f$$

## Teoría de linealización

Derivadas repetidas se definen en forma recursiva

$$L_1^0 h = h$$

$$L_1^i h = L_1(L_1^{i-1} h) = \nabla(L_1^{i-1} h) f, \quad i = 1, 2, \dots$$

**Definición 3.1.2** Sean  $f$  y  $g$  dos campos vectoriales en  $\mathbb{R}^n$ . El *Lie Bracket* de  $f$  y  $g$  es un tercer campo vectorial definido por

$$[f, g] = (\nabla g)f - (\nabla f)g$$

El Lie bracket  $[f, g]$  se escribe comúnmente como  $ad_1 g$ . Lie Bracket repetidos se pueden definir en forma recursiva

$$ad_1^0 g = g$$

$$ad_1^i g = [f, ad_1^{i-1} g]$$

El Lie Bracket tiene las siguientes propiedades:

### 1. *Bilinealidad*:

$$[(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2), g] = \alpha_1 [f_1, g] + \alpha_2 [f_2, g]$$

$$[f, (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)] = \alpha_1 [f, g_1] + \alpha_2 [f, g_2]$$

donde  $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2$  son campos vectoriales lisos, y  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son escalares constantes.

2. *Conmutatividad negativa.*

$$[f, g] = -[g, f]$$

3. *Identidad Jacobiana.*

$$L_{x_1} L_{x_2} h = L_1 L_2 h - L_2 L_1 h$$

siendo  $h(x)$  una función escalar de  $x$  lisa.

Una generalización del concepto familiar de transformación de coordenadas es el concepto de *difomorfismo*.

**Definición 3.1.3** Una función  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida en una región  $\Omega$ , es llamada un difomorfismo si es lisa, y si su inversa  $\phi^{-1}$  existe y es lisa.

Dada una función no lineal  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es fácil determinar si es un difomorfismo local mediante el uso del siguiente lema<sup>(3)</sup>, el cual es una consecuencia directa del teorema de función implícita.

**Lema 3.1.1** Sea  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función lisa definida en una región  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^n$ . Si la matriz Jacobiana  $\nabla \phi$  es no singular en un punto  $x = x_0$  de  $\Omega$ , entonces  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  define un difomorfismo local en una subregión de  $\Omega$ .

Un difomorfismo se puede usar para transformar un sistema no lineal en otro sistema no lineal en términos de un nuevo conjunto de estados.

Por último, se definirá la propiedad de involutividad de campos vectoriales.

### Teoría de linealización

**Definición 3.1.4** Un conjunto de campos vectoriales  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  linealmente independientes se dice que es *involutivo* si y solo si existen funciones escalares  $\alpha_{ijk} \in \mathbb{R}^n - \mathbb{R}$  tales que

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk}(x) f_k(x), \quad \forall i, j$$

La involutividad significa que el Lie Bracket de cualquier par de campos vectoriales del conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  se puede expresar como una combinación lineal del conjunto de campos vectoriales original.

#### Ejemplo 3.1.1

Consideremos el sistema

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \text{Sen}(x_1) \quad (3.1.2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 \text{Cos}(x_1) + u \text{Cos}(2x_1) \quad (3.1.3)$$

el cual se puede escribir como

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

con  $f$  y  $g$  definidos por

$$f = \begin{pmatrix} -2x_1 + ax_2 + \text{Sen}(x_1) \\ -x_2 \text{Cos}(x_1) \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x_1) \end{pmatrix}$$

El Lie bracket de estas funciones es igual a

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, \mathbf{g}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\sin(2x_1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_1 + ax_1 + \sin(x_1) \\ -2x_2 \cos(x_1) \end{pmatrix} - \\ &\quad \begin{pmatrix} -2 + \cos(x_1) & a \\ x_2 \sin(x_1) & -\cos(x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos(2x_1) \\ \cos(x_1) \cos(2x_1) - 2\sin(2x_1)(-2x_1 + ax_1 + \sin(x_1)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.2 Linealización por retroalimentación.

Para la aplicación del proceso de linealización, se debe obtener la forma canónica controlable del sistema. Se dice que un sistema está en la forma canónica controlable si su dinámica está representada en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (3.2.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (3.2.1b)$$

siendo  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  campos vectoriales lisos,  $\mathbf{y}$  la función de salida del sistema, y  $u$  la entrada del sistema.

## Teoría de linealización

La forma básica para obtener una relación lineal de la entrada y la salida es simplemente derivar la función de salida en forma repetida hasta encontrar una relación explícita con la entrada, es decir,

$$\dot{y} = (\nabla h)(f + gu) = L_f h(x) + (L_g h(x))u$$

Si  $L_g h(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ , entonces la transformación de entrada

$$u = \frac{1}{L_g h} (-L_f h + v)$$

conduce a una relación diferencial lineal de la entrada y la salida la cual está dada por

$$\dot{y} = v$$

donde  $v$  es una entrada de control auxiliar a ser determinada.

Sin embargo, si  $L_g h = 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ , entonces debemos obtener

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + [L_g(L_f h(x))]u$$

Si  $L_g(L_f h(x)) = 0$  otra vez, es necesario diferenciar nuevamente hasta obtener para algún entero  $r$ ,

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$$

y entonces la ley de control

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (-L_f^r h + v)$$

conduce a la relación

$$y^{(r)} = v$$

El número de diferenciaciones requeridas de  $y$  para que la entrada  $u$  aparezca se denomina *el grado relativo* del sistema.

### 3.3 Formas normales.

Cuando el grado relativo  $r$  de un sistema es menor que la dimensión del espacio de estado  $n$ , el sistema no lineal (3.2.1) se puede transformar en la llamada *forma normal*, usando las funciones  $h, L_1 h, \dots, L_1^{r-1} h$  como parte de los nuevos estados.

La forma normal de un sistema se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_{r-1} \\ \zeta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \vdots \\ \zeta_r \\ a(\zeta, \eta) + b(\zeta, \eta) \end{pmatrix} \quad (3.3.1a)$$

$$\dot{\eta} = w(\zeta, \eta) \quad (3.3.1b)$$

$$y = \zeta_1 \quad (3.3.1c)$$

donde

$$\zeta = (h \quad L_f h \quad \dots \quad L_f^{r-1} h)^T$$

$$\eta = (\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_{n-r})^T$$

$$a(\zeta, \eta) = L_f^r h(x) = L_f^r h(\Phi^{-1}(\zeta, \eta))$$

$$b(\zeta, \eta) = L_g L_f^{r-1} h(x) = L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(\zeta, \eta))$$

y cada  $\eta_i$  satisface la relación  $L_g \eta_i(x) = 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ , siendo  $\Phi(x)$  la transformación de estado del sistema

$$\Phi(x) = (\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \dots \quad \zeta_r \quad \eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_{n-r})^T$$

La condición que un sistema de la forma (3.2.1) debe cumplir para su transformación a la forma normal es que los gradientes de los componentes de  $\zeta$  sean linealmente independientes, de tal forma que sea posible usarlos como parte de los nuevos estados.

### 3.4 La dinámica cero.

Mediante la linealización entrada-salida, la dinámica de un sistema no lineal se descompone en una parte externa (entrada-salida) y una parte interna (no observable). A esta última se le denomina *dinámica interna*.

La dinámica interna asociada con la linealización entrada-salida corresponde a las últimas  $(n-r)$  ecuaciones de la forma normal. Un caso especial de la dinámica interna es la llamada *dinámica cero*, y es una característica intrínseca del sistema no lineal. La dinámica cero de un sistema es la dinámica cuando su salida es idéntica a cero. La importancia de la dinámica cero del sistema se debe a que es posible conocer

## Teoría de linealización

la estabilidad total del sistema mediante el análisis de la dinámica cero. Para que el sistema opere en dinámica cero, la entrada de control auxiliar  $v$  debe ser cero, de tal forma que  $y^{(r)} = 0$ . Esto significa que la entrada original  $u^*$  debe estar dada por

$$u^*(x) = \frac{-L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$$

Por lo tanto, el vector de estado  $x$  del sistema correspondiente a la dinámica cero, se desarrolla de acuerdo a la ecuación

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u^*$$

y la forma normal para la dinámica cero toma la forma

$$\dot{\zeta} = 0$$

$$\dot{\eta} = w(0, \eta)$$

### 3.5 Estabilidad y seguimiento.

Consideremos el sistema no lineal (3.2.1). Si  $x = x_0$  es un punto de equilibrio (estable ó marginalmente estable) y la dinámica cero correspondiente es asintóticamente estable, entonces el diseño del controlador basado en la colocación de polos para la dinámica lineal entrada-salida, puede estabilizar a todo el sistema. Esto es, la ley de retroalimentación de estado

**Teoría de linealización**

$$u(x) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (-L_f^r h - \alpha_{r-1} L_f^{r-1} h - \dots - \alpha_0 h) \quad (3.5.1)$$

conduce a un sistema de lazo cerrado asintóticamente estable en forma local.

La idea anterior se puede extender fácilmente a control de rastreo ó seguimiento, incorporando el movimiento deseado en (3.5.1). Consideremos el problema de rastreo de una trayectoria para el sistema (3.2.1). Si definimos el vector  $e_0(t)$  como

$$e_0(t) = y(t) - y_d(t) \quad (3.5.2)$$

entonces la ley de control

$$u(x) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (-L_f h + v) \quad (3.5.3)$$

en donde  $v$  está dado por

$$v = y_d^{(r)} - \alpha_{r-1} e_{r-1} - \dots - \alpha_0 e_0 \quad (3.5.4)$$

conduce a un sistema de lazo cerrado de la forma

$$\dot{\bullet} = A \bullet$$

$$\eta = w(\bullet + \bar{y}_d, \eta)$$

siendo

$$\bullet = (e_0 \ e_1 \ \dots \ e_{r-1})^T$$

$$\bar{y}_d = (y_d \ \dot{y}_d \ \dots \ y_d^{(r-1)})^T$$

### Teoría de linealización

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{r-1} \end{pmatrix}$$

La ley de control de retroalimentación de estado (3.5.3) hace localmente estable a todo el estado, y exponencialmente convergente al error de seguimiento a cero, siempre que la dinámica cero sea exponencialmente estable.

# 4

## DISEÑO Y SIMULACION DEL CONTROL LINEALIZADOR E/S

---

Hasta ahora se han expuesto los aspectos principales de la teoría de linealización. El estudio del presente capítulo se enfoca a la aplicación de dicha teoría al modelo no lineal de un reactor de investigación para el diseño del controlador linealizador. La entrada de control,  $u$ , del reactor, se define en función de las variables de estado del sistema y de la entrada de control auxiliar  $v$ . Esta última a su vez, se expresará en términos de la variable  $y_d$  y sus derivadas, las cuales definen el comportamiento deseado de la salida del sistema (potencia neutrónica). La razón es la facilidad con la que se puede analizar la dinámica del sistema en respuesta a diferentes *señales* de entrada. Este procedimiento implica solamente el cambio de una simple función como se verá posteriormente.

Debido a que no todos los sistemas son linealizables, y ya que no existe un método bien definido para realizar una prueba de esa factibilidad, se considerará el criterio siguiente: se aplicará la linealización al modelo del reactor y se estudiará su dinámica interna. Por lo que: 1) si es posible la transformación del sistema y, 2) la dinámica cero resultante es estable (aún en forma local) entonces concluiremos que sí es factible la linealización del sistema.

Por lo tanto, el procedimiento que se sigue inicia con la transformación del modelo del sistema a la forma normal. El modelo que se considera es el modelo que se obtuvo en el capítulo 1, Ecs. (1.8.1), (1.8.2), y (1.8.3). Este modelo corresponde



**al reactor de investigación del Centro Nuclear de México. Una vez obtenida la forma normal del sistema, se analiza la estabilidad de la dinámica cero con el fin de asegurar la estabilidad de la dinámica interna en la forma normal. Por último, se propone la forma del controlador en función de la entrada de control auxiliar.**

#### 4.1 Transformación del sistema a la forma normal.

El modelo del reactor obtenido en la sección (1.8) del capítulo 1 se vuelve a escribir,

$$\dot{n}(t) = \frac{1}{\Lambda} \rho_{\text{int}}(t)n(t) - \frac{\beta}{\Lambda} n(t) + \lambda c(t) + \frac{1}{\Lambda} \rho_{\text{ext}}(t)n(t)$$

$$\dot{c}(t) = \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda c(t)$$

$$\dot{\rho}_{\text{int}}(t) = -\alpha K(n - n_0) - \gamma \rho_{\text{int}}(t)$$

Si definimos  $x_1(t) = n(t)$ ,  $x_2(t) = c(t)$ ,  $x_3(t) = \rho_{\text{int}}(t)$  y denotamos a  $\rho_{\text{ext}}(t)$  como la entrada  $u(t)$  del sistema, entonces el modelo anterior toma la forma

$$\dot{x}_1 = \frac{x_3 - \beta}{\Lambda} x_1 + \lambda x_2 + \frac{1}{\Lambda} x_1 u \quad (4.1.1a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\beta}{\Lambda} x_1 - \lambda x_2 \quad (4.1.1b)$$

$$\dot{x}_3 = -\alpha K(x_1 - n_0) - \gamma x_3 \quad (4.1.1c)$$

$$y = x_1 - n_0 \quad (4.1.1d)$$

siendo  $y(t)$  la función de salida, definida como la desviación de la potencia neutrónica del reactor con respecto a su valor en equilibrio en tiempo cero. Es posible escribir el sistema anterior en la forma (3.2.1), donde  $f(x)$  y  $g(x)$  están dadas por:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_3 - \beta}{\Lambda} x_1 + \lambda x_2 \\ \frac{\beta}{\Lambda} x_1 - \lambda x_2 \\ -\alpha K(x_1 - n_0) - \gamma x_3 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Lambda} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y evidentemente

$$h(x) = x_1 - n_0$$

Para llevar a cabo la transformación a la forma normal, denotemos por  $\zeta_1$  la salida  $y(t)$ . De esta forma,

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{x_3 - \beta}{\Lambda} x_1 + \lambda x_2 + \frac{1}{\Lambda} x_1 u \quad (4.1.2)$$

Para completar la forma normal, es necesario encontrar funciones  $\eta_i$  que satisfacen  $L_g \eta_i(x) = 0$ , lo que implica

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x} = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = 0$$

debido a que  $g_1(x) \neq 0$ , además

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x} = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} = 0$$

Así, sea por ejemplo  $\eta_1(x) = x_2$  y  $\eta_2(x) = x_3$ . Entonces las variables en términos de los nuevos estados  $\zeta$  y  $\eta$  están dadas por

$$x_1 = \zeta_1 + n_0$$

$$x_2 = \eta_1(x)$$

$$x_3 = \eta_2(x)$$

y la *forma normal* del sistema es finalmente

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{\eta_2 - \beta}{\Lambda} (\zeta_1 + n_0) + \lambda \eta_1 + \frac{1}{\Lambda} (\zeta_1 + n_0) u \quad (4.1.3a)$$

$$\dot{\eta}_1 = \frac{\beta}{\Lambda} (\zeta_1 + n_0) - \lambda \eta_1 \quad (4.1.3b)$$

$$\dot{\eta}_2 = -\alpha K \zeta_1 - \gamma \eta_2 \quad (4.1.3c)$$

## 4.2 Análisis de estabilidad de la forma normal.

La dinámica interna del sistema (4.1.3) está dada por las dos últimas ecuaciones (4.1.3b) y (4.1.3c). La dinámica cero se obtiene al sustituir  $\zeta_1 = 0$  en la

dinámica interna. Por lo que el sistema correspondiente a la dinámica cero es

$$\dot{\eta}_1 = -\lambda \eta_1 + \frac{\beta \pi_0}{\Lambda} \quad (4.2.1a)$$

$$\dot{\eta}_2 = -\gamma \eta_2 \quad (4.2.1b)$$

El análisis de la estabilidad de la dinámica cero demuestra que el sistema en la forma normal es asintóticamente estable en forma local. Si se elige por ejemplo la función

$$V(\eta) = \frac{1}{2} (\eta_1^2 + \eta_2^2)$$

se observa que la función  $\dot{V}$  es definida negativa cuando

$$\lambda \eta_1^2 + \gamma \eta_2^2 > \frac{\beta}{\Lambda} \pi_0 \eta_1$$

### 4.3 Diseño del controlador.

Para encontrar la ley de control, partimos de la ecuación (4.1.2) la cual nos conduce a una entrada de la forma

$$u = \frac{\Lambda}{x_1} \left( -\frac{x_2 - \beta}{\Lambda} x_1 - \lambda x_2 + v \right) \quad (4.3.1)$$

siendo  $v$  una entrada de control auxiliar que conducirá a la salida al comportamiento requerido.

Según el análisis realizado en la sección 3.5 acerca de problemas de seguimiento, la entrada  $v$  debe estar dada por

$$v = \dot{y}_d - \alpha_0 e_0 \quad (4.3.2)$$

siendo

$$e_0 = y(t) - y_d(t) = x_1 - n_0 - y_d(t)$$

en donde  $y_d(t)$  representa el comportamiento deseado.

#### 4.4 Simulación del controlador.

La ley del controlador sugerida por la ecuación (4.3.1) actuando sobre el sistema (4.1) producirá una salida que estará determinada por la función  $y_d(t)$ . Para visualizar este efecto es necesario obtener las funciones  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$  que satisfacen (4.1) y analizar a  $x_1(t)$ , (el comportamiento de la potencia del reactor). Para la resolución del sistema (4.1) se empleó el paquete **MATLAB**, el cual es un paquete de cómputo diseñado para propósitos matemáticos. Es un sistema interactivo cuyo elemento de datos básico es una matriz. Adicionalmente, es posible crear gráficas de funciones en dos y tres dimensiones. **MATLAB** presenta cierta versatilidad en cuanto a programación debido a que cuenta con una serie de funciones predefinidas. En esta sección se estudia la respuesta del reactor a dos señales diferentes usando un programa de **MATLAB**.

El comportamiento requerido se dará mediante la función  $y_d(t)$  en la ecuación (4.3.2). De esta forma se resuelve el sistema que resulta al sustituir la ecuación (4.3.1) en el sistema (4.1). Si se requiere conocer la respuesta a una señal de entrada diferente, entonces se resuelve el sistema que resulta con la nueva forma de  $u(t)$ .

#### 4.4.1 Simulación de un perfil de potencia trapezoidal.

En la primera prueba de simulación que se presenta, la función  $y_d(t)$  tiene la siguiente forma

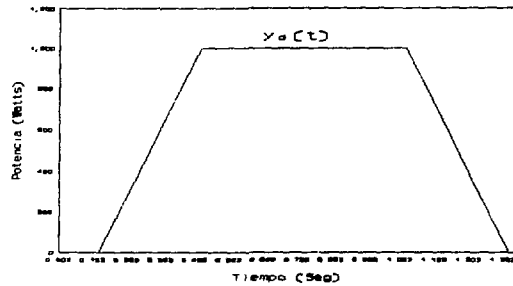


Figura 4.4.1-1. Perfil de potencia trapezoidal.

por lo que  $y_d(t)$  está dada por

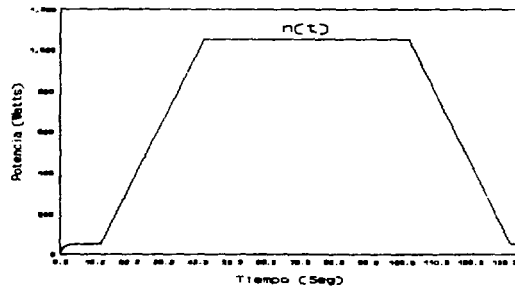
$$y_d(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t \leq 12 \\ \frac{100}{3} (t - 12) & , 12 < t \leq 42 \\ 1000 & , 42 < t \leq 102 \\ -\frac{100}{3} (t - 132) & , 102 < t \leq 132 \\ 0 & , t > 132 \end{cases}$$

y la forma de  $\dot{y}_d(t)$  es igual a

**Diseño y simulación del control linealizador E/S**

$$\dot{y}_d(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t \leq 12 \\ \frac{100}{3} & , 12 < t \leq 42 \\ 0 & , 42 < t \leq 102 \\ -\frac{100}{3} & , 102 < t \leq 132 \\ 0 & , t > 132 \end{cases}$$

El resultado de la simulación se muestra en la figura 4.4.1-2.



**Figura 4.4.1-2. Resultado de la primera simulación.**

Las condiciones iniciales que se consideraron para la resolución de las ecuaciones son:

$$n(0) = 0.01 \text{ Watts}$$

$$c(0) = \frac{n(0)\beta}{\Lambda\lambda} = 4.212 \text{ Watts}$$

$$\rho_{in}(0) = 0$$



Como se podrá observar en la figura (4.4.1-2), el valor de la potencia del reactor que inicia en 0.01 Watts tiende a alinearse al valor de la potencia del reactor en estado estable (50 Watts) en aproximadamente 2 segundos. Después de 12 segundos, el sistema inicia el ascenso en forma lineal que se indicó en la figura (4.4.1-1). Después de 42 segundos, el sistema se mantiene en 1000 Watts por un lapso de 60 segundos, después de los cuales, se inicia el descenso también en forma lineal hasta alcanzar nuevamente el valor de la potencia en estado estable. Así, observamos que el comportamiento del reactor corresponde al preestablecido mediante la ecuación  $y_d(t)$ .

#### 4.4.2 Simulación a una entrada con secciones no lineales.

En este caso,  $y_d(t)$  tiene la forma

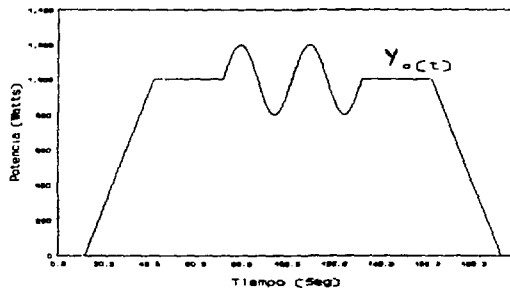


Figura 4.4.2-1. Perfil trapezoidal con oscilaciones.

Las ecuaciones para  $y(t)$  y  $\dot{y}_d(t)$  son respectivamente;

$$y_d(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t \leq 12 \\ \frac{100}{3}(t - 12) & , 12 < t \leq 42 \\ 1000 & , 42 < t \leq 72 \\ 100 \operatorname{Sen}\left[\frac{\pi}{15}(t - 72)\right] + 1000 & , 72 < t \leq 132 \\ 1000 & , 132 < t \leq 162 \\ -\frac{100}{3}(t - 192) & , 162 < t \leq 192 \\ 0 & , t > 192 \end{cases}$$

y

$$\dot{y}_d(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t \leq 12 \\ \frac{100}{3} & , 12 < t \leq 42 \\ 0 & , 42 < t \leq 72 \\ \frac{20}{3} \operatorname{Cos} \frac{\pi}{15}(t - 72) & , 72 < t \leq 132 \\ 0 & , 132 < t \leq 162 \\ -\frac{100}{3} & , 162 < t \leq 192 \\ 0 & , t > 192 \end{cases}$$

El resultado de la segunda simulación, se muestra en la figura 4.4.2-2. Las condiciones iniciales para la simulación del perfil trapezoidal con oscilaciones son exactamente las mismas que se consideraron para la primer simulación. El segundo perfil de simulación se asemeja al de la figura (4.4.1-1). La diferencia es que cuando han transcurrido 72 segundos, la potencia presenta variaciones senoidales por un tiempo de 60 segundos. El valor de la potencia en estado estable es también de 50 Watts. En la figura (4.4.2-2) se observa la coincidencia de tiempos para los cambios

Diseño y simulación del control linealizador E/S

de respuesta, según  $y_d(t)$  .

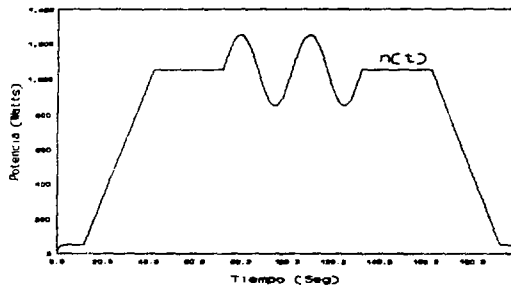


Figura 4.4.2-2. Resultado de la segunda simulación.

# 5 CONCLUSIONES

---

El diseño y simulación del controlador linealizador E/S en este trabajo comprende las siguientes etapas: 1) exposición de los conceptos básicos, 2) desarrollo de la teoría de linealización, y 3) el diseño y simulación del controlador propiamente. Con el fin de obtener conclusiones, realizaremos un análisis de los resultados obtenidos en cada una de estas etapas.

Las ideas que se introducen en los dos primeros capítulos, son básicas para establecer los fundamentos sobre los que se apoya la teoría de linealización, y constituyen la primera etapa del objetivo de este trabajo. Específicamente, el capítulo 2 proporciona uno de los conceptos fundamentales para la teoría de linealización: el análisis de estabilidad de Lyapunov, cuyo objetivo principal es el estudio del comportamiento dinámico de sistemas con características no lineales. De esta manera, se proporcionan bases suficientes para determinar en lo sucesivo, las propiedades de estabilidad de algunos sistemas no lineales.

La segunda etapa del diseño consiste en exponer la teoría de linealización. Aquí se enfatizan las condiciones que un sistema no lineal debe satisfacer para ser susceptible a la linealización exacta mediante la retroalimentación no lineal de sus variables de estado. Se propone también una herramienta de análisis de estabilidad para la dinámica interna, es decir, de las variables que se vuelven inobservables en el proceso de linealización. Esta etapa termina con una exposición de un método de diseño para obtener un seguimiento de una señal de referencia.

## **Conclusiones**

**El diseño del controlador linealizador entrada/salida se aplicó al modelo no lineal del reactor de investigación TRIGA Mark III del Centro Nuclear de México. Este modelo está basado en las ecuaciones no lineales de cinética puntual de reactores nucleares. La dinámica de este reactor cumple con las condiciones de linealización que se mencionan anteriormente. El análisis de la dinámica interna demostró que ésta es localmente estable en forma asintótica.**

**Para la simulación se propusieron dos perfiles que permitieran observar fácilmente si se obtenía el seguimiento de esas señales de referencia. Si la retroalimentación utilizada elimina las propiedades no lineales del sistema original, entonces cualquier señal arbitraria de referencia sería rastreada por la variable de salida. Los resultados obtenidos en simulación por computadora muestran un excelente seguimiento de la potencia neutrónica del reactor al perfil de potencia predefinido.**

**En base a estos resultados, es factible la inclusión de este algoritmo de control como una alternativa del control automático que se tendrá en la nueva consola de operación del reactor. Cabe mencionar que esta nueva consola se encuentra en la etapa de diseño, y se espera que inicie su operación a fines de 1995.**

## **6** **REFERENCIAS**

---

**(1) Hetrick, D.L.(1971), "Dynamics of nuclear reactors",  
The University of Chicago Press, 1971.**

**(2) Gallardo Sanvicente, L.F(1990), "Dinámica del reactor  
TRIGA Mark III del Centro Nuclear de México", Tesis de  
Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, México D.F., 1990.**

**(3) Slotins, J-J., y W. Li(1991), "Applied Nonlinear Control",  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.**

**ANEXO-A. Programas correspondientes a la primera simulación.**

**A-1. Programa para la generación de  $y_d(t)$  y su primera derivada, así como las ecuaciones del reactor.**

```
% *****  
  
function xdot = p2ec( t, x);  
  
% LLAMADA A LA FUNCION QUE GENERA EL VECTOR "D" QUE CONTIENE  
% 8 COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES DE CINETICA PUNTUAL DEL  
% REACTOR TRIGA MARK III CON RETROALIMENTACION LINEAL DE  
% REACTIVIDAD :  
  
D = p2getD;  
  
% GENERACION DE "yd" Y "yd_dot" EN TIEMPO "t" :  
  
if ((0 <= t) & ( t < 12 )),  
    yd = 0;  
    yd_dot = 0;  
  
elseif ((12 <= t) & ( t < 42)) ,  
    yd = (100 / 3) * (t - 12);  
    yd_dot = 100 / 3;  
  
elseif ((42 <= t) & (t < 102)) ,  
    yd = 1000;  
    yd_dot = 0;  
  
elseif ((102 <= t) & (t < 132)) ,  
    yd = - (100 / 3) * (t - 132);  
    yd_dot = - 100 / 3;  
  
else ,  
    yd = 0;  
    yd_dot = 0;  
  
end;
```

**% GENERACION DE LA VARIABLE DE CONTROL EXTERNA "v" :**

```
n0 = 50;
alfa0 = 1;
e = x(1) - n0 - yd;
v = yd_dot - alfa0 * e;
```

**% GENERACION DE LA VARIABLE DE CONTROL "u":**

```
temp1 = - D(2) * ( D(3) * x(2) - v ) / x(1);
temp2 = - ( x(3) - D(1) );
u = temp2 + temp1;
```

**% ECUACIONES DIFERENCIALES DEL REACTOR:**

```
xdot(1) = - temp2 * x(1) / D(2) + D(3) * x(2) + x(1) * u / D(2);
xdot(2) = ( D(1) * x(1) - D(2) * D(3) * x(2) ) / D(2);
xdot(3) = - D(8) * ( x(1) - D(7) ) - D(6) * x(3);
xdot = xdot';
```

**% \*\*\*\*\***



**A-2. Programa para la generación del vector D que emplean las ecuaciones de cinética puntual.**

```
% *****  
  
function D = p2getD;  
  
% ESTA FUNCION GENERA EL VECTOR "D" DE COEFICIENTES QUE SE  
% UTILIZAN EN LAS ECUACIONES CINETICAS DEL MODELO PUNTUAL DEL  
% REACTOR TRIGA MARK III.  
  
% BETA : FRACCION TOTAL DE NEUTRONES RETARDADOS (ADIMENSIONAL).  
BETA = 0.006433;  
  
D(1) = BETA;  
ELE = 38.0e-06;  
  
% TIEMPO DE GENERACION DE NEUTRONES INSTANTANEOS (SEG).  
D(2) = ELE;  
  
% LAMBDA SUB 1 : CONSTANTE DE DECAIMIENTO DEL GRUPO # 1 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (1 / SEG).  
L(1) = 0.0124;  
  
% LAMBDA SUB 2 : CONSTANTE DE DECAIMIENTO DEL GRUPO # 2 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (1 / SEG).  
L(2) = 0.0305;  
  
% LAMBDA SUB 3 : CONSTANTE DE DECAIMIENTO DEL GRUPO # 3 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (1 / SEG).  
L(3) = 0.1114;  
  
% LAMBDA SUB 4 : CONSTANTE DE DECAIMIENTO DEL GRUPO # 4 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (1 / SEG).  
L(4) = 0.3013;
```

**% LAMBDA SUB 5 : CONSTANTE DE DECAIMIENTO DEL GRUPO # 5 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (1 / SEG).  
L(5) = 1.1360;**

**% LAMBDA SUB 6 : CONSTANTE DE DECAIMIENTO DEL GRUPO # 6 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (1 / SEG).  
L(6) = 3.0130;**

**% BETA SUB 1 : FRACCION DE NEUTRONES RETARDADOS DEL GRUPO # 1 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (ADIMENSIONAL).  
B(1) = 0.240e-03;**

**% BETA SUB 2 : FRACCION DE NEUTRONES RETARDADOS DEL GRUPO # 2 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (ADIMENSIONAL).  
B(2) = 1.410e-03;**

**% BETA SUB 3 : FRACCION DE NEUTRONES RETARDADOS DEL GRUPO # 3 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (ADIMENSIONAL).  
B(3) = 1.255e-03;**

**% BETA SUB 4 : FRACCION DE NEUTRONES RETARDADOS DEL GRUPO # 4 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (ADIMENSIONAL).  
B(4) = 2.525e-03;**

**% BETA SUB 5 : FRACCION DE NEUTRONES RETARDADOS DEL GRUPO # 5 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (ADIMENSIONAL).  
B(5) = 0.737e-03;**

**% BETA SUB 6 : FRACCION DE NEUTRONES RETARDADOS DEL GRUPO # 6 DE  
% PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS (ADIMENSIONAL).  
B(6) = 0.266e-03;**

**sum = 0;  
for i = 1 : 6 ,  
    sum = sum + B(i) \* L(i);  
end ;**

**% LAMBDA : CONSTANTE DEL TIEMPO DE DECAIMIENTO CUANDO SE  
% CONSIDERA UN SOLO GRUPO EQUIVALENTE DE NEUTRONES RETARDADOS.  
% ESTE VALOR SE UTILIZA CUANDO SE TIENEN TRANSITORIOS RAPIDOS.**

**LAMBDA = sum / BETA;**

**D(3) = LAMBDA;**

**% ALFA : NEGATIVO DEL COEFICIENTE DE REACTIVIDAD POR TEMPERATURA  
% ( 1 / GRADOS CENTIGRADOS).**

**A = 0.01359875;**

**D(4) = A;**

**% RECIPROCO DE LA CAPACIDAD CALORIFICA DEL REACTOR  
% ( GRADOS CENTIGRADOS / WATTS\*SEG ).**

**K = 1 / 5.21045e-04;**

**D(5) = K;**

**% GAMMA : INVERSO DEL TIEMPO MEDIO PARA LA TRANSFERENCIA DE  
% CALOR AL ENFRIADOR ( 1 / SEG ).**

**G = 0.2;**

**D(6) = G;**

**% POTENCIA INICIAL DEL REACTOR EN ESTADO ESTABLE ( WATTS ).  
nsubo = 50;**

**D(7) = nsubo;**

**% PRODUCTO ALFA X K ( 1 / WATT\*SEG ).**

**AK = 2.6099e-07;**

**D(8) = AK;**

**% .....**

## A-3. Programa principal

```

% *****

% PROGRAMA " p2main.m " .

% ESTE PROGRAMA RESUELVE LAS ECUACIONES DE CINETICA PUNTUAL DEL
% REACTOR TRIGA MARK III CON RETROALIMENTACION LINEAL DE
% REACTIVIDAD.

% 1. COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES DE CINETICA PUNTUAL DEL
% REACTOR TRIGA MARK III CON RETROALIMENTACION LINEAL DE
% REACTIVIDAD.

% VECTOR DE 8 COEFICIENTES.
D = p2getD;

% 2. DEFINICION DE VARIABLES Y CONDICIONES INICIALES.

% n : POTENCIA DEL REACTOR EN TIEMPO IGUAL A CERO ( WATTS ).
x(1) = 0.01;

% c : GRUPO EQUIVALENTE DE PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS
% ( WATTS ).
x(2) = ( x(1) * D(1) ) / ( D(2) * D(3) );

% "rho" SUBINDICE "f" : REACTIVIDAD INTRINSECA DEL REACTOR
% (ADIMENSIONAL).
x(3) = 0;
x = x';

% t1 : TIEMPO INICIAL PARA CADA SOLUCION DE LAS ECUACIONES
% DIFERENCIALES.
t1 = 0;

```

```

% 3. SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE CINETICA PUNTUAL DEL REACTOR
% TRIGA MARK III CON RETROALIMENTACION LINEAL DE REACTIVIDAD.
bandera = 1;
if bandera ~= 0,
    load p2in10;
    last = length( tcum2 );
    t1 = tcum2( last );
    x = xcum2( last, : )';
end;
tf = 135;
tdel = 0.1;
tdel2 = 0.25;
talmac = t1 + tdel2;
t2 = t1 + tdel;
tol = 1.0e-08;
while t2 <= ( tf + tdel/10 ),
    [tout, xout] = p2ode23( 'p2ec' , t1 , t2 , x , tol );
    last = length( tout );
    if tout(last) >= talmac ,
        tcum2 = [ tcum2 ; tout( last ) ];
        xcum2 = [ xcum2 ; xout( last, : ) ];
        save p2out10 tcum2 xcum2;
        talmac = tout( last ) + tdel2;
    end;
    x = xout( last, : )';
    t1 = tout( last );
    t2 = t1 + tdel;
    mensaje1 = 'Tiempo actual de simulacion ';
    mensaje2 = num2str( t1 );
    mensaje3 = ' segundos';
    mensaje4 = [ mensaje1 mensaje2 mensaje3 ];
    disp( mensaje4 );
    mensaje1 = 'Tiempo final de simulacion ';
    mensaje2 = num2str( tf );
    mensaje3 = ' segundos';
    mensaje4 = [ mensaje1 mensaje2 mensaje3 ];
    disp( mensaje4 );
end ;
% *****

```

**ANEXO-B. Programas correspondientes a la segunda simulación.**

**B-1. Programa para la generación de  $y_d(t)$  y su primer derivada, así como las ecuaciones del reactor.**

```
% *****  
  
function xdot = sim2_ec( t, x);  
D = sim2getD;  
  
% GENERACION DE "yd" Y "yd_dot" EN TIEMPO "t" :  
  
if ((0 <= t) & ( t < 12 )),  
    yd = 0;  
    yd_dot = 0;  
  
elseif ((12 <= t) & ( t < 42)) ,  
    yd = (100 / 3) * (t - 12);  
    yd_dot = 100 / 3;  
  
elseif ((42 <= t) & (t < 72)) ,  
    yd = 1000;  
    yd_dot = 0;  
  
elseif ((72 <= t) & (t < 132)) ,  
    yd = 200 * sin((pi/15)*(t-72)) + 1000;  
    yd_dot = (200*pi/15)*cos((pi/15)*(t-72));  
  
elseif ((132 <= t) & (t < 162)),  
    yd = 1000;  
    yd_dot = 0;  
  
elseif ((162 <= t) & (t < 192)),  
    yd = (-100/3)*(t-192);  
    yd_dot = - 100/3;  
  
else,  
    yd = 0;  
    yd_dot = 0;  
  
end;
```

**A-B**

*% GENERACION DE LA VARIABLE DE CONTROL EXTERNA "v" :*

```
n0 = 50;
alfa0 = 1;
e = x(1) - n0 - yd;
v = yd_dot - alfa0 * e;
% GENERACION DE LA VARIABLE DE CONTROL "u" :
```

```
temp1 = - ( x(3) - D(1) ) * x(1) / D(2);
temp2 = - ( D(3) * x(2) ) + v;
u = ( D(2) / x(1) ) * ( temp1 + temp2 );
```

*% ECUACIONES DIFERENCIALES DEL REACTOR :*

```
xdot(1) = - temp1 + D(3) * x(2) + x(1) * u / D(2);
xdot(2) = ( D(1) * x(1) - D(2) * D(3) * x(2) ) / D(2);
xdot(3) = - D(8) * ( x(1) - D(7) ) - D(6) * x(3);
xdot = xdot';
```

*% \*\*\*\*\**

**B-2. Programa principal.**

*% \*\*\*\*\**

*% PROGRAMA " sim2main.m " .*

*% ESTE PROGRAMA RESUELVE LAS ECUACIONES DE CINETICA PUNTUAL DEL  
% REACTOR TRIGA MARK III CON RETROALIMENTACION LINEAL DE  
% REACTIVIDAD.*

*% 1. COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES DE CINETICA PUNTUAL DEL  
% REACTOR TRIGA MARK III CON RETROALIMENTACION LINEAL DE  
% REACTIVIDAD.*

*% VECTOR DE 8 COEFICIENTES.*

```
D = sim2getD;
```

A-B

```
% 2. DEFINICION DE VARIABLES Y CONDICIONES INICIALES.  
  
% n : POTENCIA DEL REACTOR EN TIEMPO IGUAL A CERO ( WATTS ).  
x(1) = 0.01;  
  
% c : GRUPO EQUIVALENTE DE PRECURSORES DE NEUTRONES RETARDADOS  
% ( WATTS ).  
x(2) = ( x(1) * D(1) ) / ( D(2) * D(3) );  
  
  
% "ro" SUBINDICE "f" : REACTIVIDAD INTRINSECA DEL REACTOR  
% (ADIMENSIONAL).  
x(3) = 0;  
x = x';  
t1 = 0;  
% t1 : TIEMPO INICIAL PARA CADA SOLUCION DE LAS ECUACIONES  
% DIFERENCIALES.  
  
% 3. SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE CINETICA PUNTUAL DEL REACTOR  
% TRIGA MARK III CON RETROALIMENTACION LINEAL DE REACTIVIDAD.  
bandera = 1;  
if bandera ~= 0,  
  load sim2in;  
  last = length( tcum2 );  
  t1 = tcum2( last );  
  x = xcum2( last, : )';  
end ;  
tf = 200;  
tdel = 0.1;  
tdel2 = 0.25;  
talmac = t1 + tdel2;  
t2 = t1 + tdel;  
tol = 1.0e-08;
```

B-3



```

while r2 <= ( tf + tdel/10 ) ,
    [tout, xout] = sim2od23( 'sim2_ec' , t1 , t2 , x , tol );
    last = length( tout );
    if tout(last) >= talmac ,
        tcum2 = [ tcum2 ; tout( last ) ];
        xcum2 = [ xcum2 ; xout( last, : ) ];
        save sim2out tcum2 xcum2;
        talmac = tout( last ) + tdel2;
    end ;
    x = xout( last, : )';
    t1 = tout( last );
    t2 = t1 + tdel;
    mensaje1 = 'Tiempo actual de simulacion ';
    mensaje2 = num2str( t1 );
    mensaje3 = ' segundos';
    mensaje4 = [ mensaje1 mensaje2 mensaje3 ];
    disp( mensaje4 );
    mensaje1 = 'Tiempo final de simulacion ';
    mensaje2 = num2str( tf );
    mensaje3 = ' segundos';
    mensaje4 = [ mensaje1 mensaje2 mensaje3 ];
    disp( mensaje4 );
end ;
% *****

```