



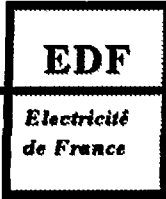
**CODE SICLE. MODELISATION DES POMPES ET  
SOUFFLANTES**

***SICLE SOFTWARE. PUMPS AND BLOWERS MODELLING***

2



N  
A  
S  
S  
R  
N



*Direction des Etudes  
et Recherches*

*Service Information  
Prospective et Normalisation*

CLAMART      1.e 12/10/94

*Département Systèmes d'information  
et de documentation*

*Groupe Exploitation  
de la Documentation Automatisée*

1, avenue du Gal de Gaulle  
92141 CLAMART Cedex  
tel : 47 65 56 33

MME GAGNEBIEN G.  
CEA - CE SACLAY

MIST-SBDS-SPRI

91191 GIF SUR YVETTE CEDEX

à l'attention de :

## MEMOIRE TECHNIQUE ELECTRONIQUE

\*\*\*\*\*  
Cette feuille est détachable grâce à la microperforation sur le coté droit.  
\*\*\*\*\*

Référence de la demande : **F488774**  
Origine : **AVIS DE PARUTION NORMES E**

Votre commande :

Numéro du document : **93NB00152**

Titre : **CODE SICLE. MODELISATION DES POMPES ET SOUFFLANTES**

Auteurs : **FAULOT J. P./PASTORINI S.**

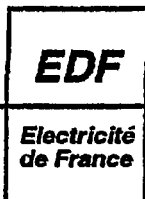
Source : **COLL. NOTES INTERNES DER. PRODUCTION D'ENERGIE (HYDRAULIQUE, THE**  
Serial :

Référence du document : **SANS**

Nombre de pages: **0042**

Nombre d'exemplaires : **001**

Support : **P**



**Direction des Etudes et Recherches**

---

SERVICE RÉACTEURS NUCLÉAIRES ET ECHANGEURS  
Département Physique des Réacteurs

Octobre 1993

---

FAULOT J. P.  
PASTORINI S.

**CODE SICLE. MODELISATION DES POMPES ET  
SOUFFLANTES**

***SICLE SOFTWARE. PUMPS AND BLOWERS  
MODELLING***

Pages : 41

93NB00152

Diffusion : J.-M. Lecœuvre  
EDF-DER  
Service IPN. Département SID  
1, avenue du Général-de-Gaule  
92141 Clamart Cedex

© Copyright EDF 1993  
ISSN 1161-0611

## **SYNTHÈSE :**

Le code SICLE propose une modélisation simplifiée des pompes se situant sur les circuits fluides. Cette modélisation repose sur la prise en compte des caractéristiques de fonctionnement (quatre quadrants), sur l'équation de conservation de l'énergie et sur la seconde loi de la dynamique. La pompe est considérée comme un élément ponctuel sans accumulation de masse et d'énergie. En ce sens, elle représente l'élément nodal le plus simple des différents modules élémentaires internes à SICLE. Toutefois, pour l'utilisateur, elle représente un des éléments les plus complexes à modéliser du fait des multiples possibilités géométriques (entraînement ou non par moteur, turbine avec ou sans accouplement, etc.) et fonctionnelles (fonctionnement dans les quatre quadrants en rotor libre ou bloqué, caractéristiques des moteurs, turbines, des pertes internes, etc.).

## **EXECUTIVE SUMMARY :**

The SICLE software includes a simplified modelisation for pumps located on fluid circuits. This modelisation is based on operating specifications (four quadrants), on energy conservation equation and on the second law of dynamics. The pump is considered like a ponctuel component without storage of mass or energy. In that case, it is the simplest ponctuel component of the different elementary modules of SICLE. Nevertheless, for a user, it represents one of the most complex component to model because of the many geometrical (driving or not by motor, turbine with or without coupling, etc...) and functional possibilities (operating in the four quadrants, motor specifications, turbines specifications, internal loss values, etc...).

# SOMMAIRE

	Pages
I- NOTATIONS .....	5
II- EQUATIONS DES POMPES.....	7
II-1 Caractéristique de la pompe.....	7
II-2 Bilan d'énergie.....	7
II-3 Equation des masses tournantes.....	9
II-4 Identifications des pertes mécaniques.....	9
III- FONCTIONNEMENT DES POMPES .....	13
III-1 Premier quadrant.....	13
III-2 Quatrième quadrant (courbe A).....	14
III-3 Deuxième quadrant (courbes B et C).....	18
IV- RESOLUTION PAR SICLE DU MODELE DE POMPE.....	22
IV-1 Caractéristique de pompe.....	22
IV-2 Bilan d'énergie.....	23
IV-3 Calcul de la vitesse de la pompe .....	24
IV-3-1 Calcul à vitesse imposée.....	25
IV-3-2 Calcul à puissance imposée .....	25
IV-3-3 Calcul complet de l'ensemble pompe-accouplement-organe d'entraînement .....	29
IV.3.3.1 Entraînement par moteur électrique asynchrone .....	30
IV.3.3.2 Entraînement par turbine .....	33
IV-3-4 Arrêt et démarrage de la pompe.....	34
REFERENCES.....	36
FIGURES .....	37

## **I- NOTATIONS**

$C_m$	: couple résistant
$C_{mo}$	: couple moteur
FCM	: couple moteur normalisé
CMO	: coefficient de proportionnalité permettant de passer du couple moteur normalisé au couple moteur effectif
$f_0$	: fréquence nominale
$f$	: fréquence effective
U	: tension d'alimentation du moteur
g	: accélération de la pesanteur
H	: enthalpie
HS	: enthalpie finale dans une transformation isentropique
I	: moment d'inertie de l'ensemble pompe-entraînement
$I_p$	: moment d'inertie de la pompe
$I_m$	: moment d'inertie de l'organe d'entraînement
P	: pression du fluide
$\Delta P$	: élévation de pression du fluide dans la pompe : $P_{\text{refoulement}} - P_{\text{aspiration}}$
$P_f$	: puissance communiquée au fluide
$P_{fo}$	: puissance nominale communiquée au fluide
$P_{iso}$	: puissance communiquée au fluide dans une transformation isentropique
$P_m$	: puissance mécanique sur l'arbre
$\Delta P_m$	: pertes externes de la pompe
$\Delta P_{mo}$	: pertes externes nominales de la pompe
$P_{mo}$	: puissance motrice sur l'arbre
T	: température du fluide
u	: vitesse du fluide
X	: glissement $X = \omega/\omega_0 f_0/f$

XPW XPP XPD	: } coefficients de la relation $XPP d\Delta P + XPW dW = XPD$
W ou Q	: débit massique
Z	: côte
x	: débit réduit : $x = \frac{W}{\rho\omega_p}$
$\alpha$	: rapport des vitesses pompe sur moteur
$\alpha'$	: coefficient de récupération de l'énergie cinétique
$\eta_{iso}$	: rendement isentropique lié aux pertes internes
$\rho$	: masse volumique
$\omega_0$	: vitesse de synchronisme du moteur
$\omega_m$	: vitesse de rotation du moteur
$\omega_p$	: vitesse de rotation de la pompe
$\omega_{po}$	: vitesse nominale de rotation de la pompe
S	: surface des paliers des organes tournants
$S_r$	: section de la tuyauterie de refoulement
$S_a$	: section de la tuyauterie d'aspiration

Les unités sont celles du système S.I. ainsi que leurs multiples et sous-multiples (sauf cas particuliers précisés dans le texte).



## II- EQUATIONS DES POMPES

Le fonctionnement d'une pompe à l'aide d'une modélisation simplifiée ponctuelle repose sur la prise en compte des trois équations physiques suivantes :

- 1) Caractéristiques
- 2) Equation de conservation de l'énergie
- 3) Equation des masses tournantes (seconde loi de la dynamique)

### II-1 Caractéristique de pompe

La différence de pression aux bornes de la pompe peut se mettre sous la forme d'une expression analytique des variables internes au code (vitesse de pompe, débit, pression, température, etc.) soit :

$$\Delta P = f(\omega, W, P, T, \dots)$$

### II-2 Bilan d'énergie

Nous caractérisons par "a" l'état du fluide à l'aspiration et par "r" son état aux divers refoulements.

La conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$P_{iso} = \sum_{i=1}^n W_i \left[ HS_{ri} - H_a + \frac{\alpha'_{ri} U_{ri}^2}{2} - \frac{\alpha'_a U_a^2}{2} + g(Z_{ri} - Z_a) \right]$$

On fait les hypothèses simplificatives suivantes :

a) Nous considérons que le profil des aubes de la pompe est parfait, donc que le triangle des vitesses est adapté. Dans ce cas :

$$\alpha'_{ri} = \alpha'_a = 1$$

b) La pompe étant de géométrie ponctuelle on a :

$$Z_{ri} = Z_a$$

c) Enfin la relation précédente néglige tous les débits de fuite.

Il reste :

$$P_{iso} = \sum_{i=1}^n W_i \left[ HS_{ri} - H_a + \frac{U_{ri}^2}{2} - \frac{U_a^2}{2} \right]$$

Cette équation est généralisable au cas des débits négatifs (cf § III), en écrivant :

$$P_{iso} = \sum_{i=1}^n W_i \left[ HS_{ri} - H_a + \frac{U_{ri}|U_{ri}|}{2} - \frac{U_a|U_a|}{2} \right]$$

Cette relation est valable dans le cas d'une pompe parfaite ne présentant pas de perte interne (frottements fluide sur les aubes). La compression (ou détente) est alors isentropique (adiabatique réversible). Dans la réalité, la prise en compte de ces pertes se traduit par l'introduction d'un rendement (dit rendement interne ou isentropique).

a) Si la pompe fonctionne normalement ("premier quadrant") en communiquant de l'énergie au fluide on a :

$$\eta_{iso} = \frac{P_{iso}}{P_f} \text{ et donc } P_f = \frac{P_{iso}}{\eta_{iso}}$$

qui traduit le fait qu'une partie de l'énergie est transmise au fluide sous forme de chaleur et n'est donc pas de l'énergie de compression.

b) Pour les autres cas de fonctionnement des pompes (cf § III), c'est le fluide qui fournit l'énergie à la pompe (organe passif) et dans ce cas :

$$\eta_{iso} = \frac{P_f}{P_{iso}}$$

Aux pertes par frottements internes, il faut ajouter les pertes par échauffement des garnitures, des paliers et les pertes par rayonnement, l'ensemble étant regroupé sous le terme  $\Delta P_m$  (pertes externes ou mécaniques). On supposera que ces pertes sont liées à un couple résistant. La puissance sur l'arbre de la pompe est alors :

$$P_m = P_f + \Delta P_m$$

### II-3 Equation des masses tournantes

L'application de la seconde loi de la dynamique aux mouvements circulaires permet d'écrire :

$$I \frac{d\omega_p}{dt} = C_{mo} - C_m = \frac{P_{mo} - P_m}{\omega_p}$$

où  $P_{mo}$  est la puissance motrice de l'organe d'entraînement (nulle dans le cas d'un fonctionnement de la pompe en organe passif).

### II-4 Identifications des pertes mécaniques

On part de l'équation des masses tournantes pour un fonctionnement normal de la pompe (premier quadrant).

$$I\omega_p \frac{d\omega_p}{dt} = P_{mo} - P_m$$

$$P_m = P_f + \Delta P_m$$

$$P_f = \frac{P_{iso}}{\eta_{iso}} \quad \text{avec } P_{iso} = \sum_{i=1}^n W_i \left[ HS_{ri} - H_a + \frac{U_{ri}^2}{2} - \frac{U_a^2}{2} \right]$$

On traite le cas de ralentissement d'une pompe sur inertie ( $P_{mo} = 0$ ) à partir du régime nominal. On fait les hypothèses suivantes :

- 1) Fluide incompressible :  $H = \frac{P}{\rho}$
- 2) Energie cinétique négligeable
- 3) Le terme des pertes mécaniques (paliers) est une loi linéaire de la vitesse :

$$\Delta P_m = \Delta P_{mo} \frac{\omega_p}{\omega_{po}}$$

où  $\Delta P_{mo}$  représentent les pertes mécaniques au nominale.

4) La loi ci-dessus reste valable à faible vitesse.

5) La masse volumique reste constante,

alors, on peut écrire :

$$P_{iso} = \sum_{i=1}^n W_i \left[ \frac{P_{ri}}{\rho} - \frac{P_a}{\rho} \right] = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n W_i \Delta P_i$$

comme  $\Delta P_i = \Delta P$  pour tout  $i$  et  $\sum_{i=1}^n W_i = W_a$  :

$$P_{iso} = \frac{W_a \Delta P}{\rho} \Rightarrow P_f = \frac{W_a \Delta P}{\rho \eta}$$

donc :

$$I \omega_p \frac{d\omega_p}{dt} = - \frac{W_a \Delta P}{\rho \eta} - \Delta P_{mo} \frac{|\omega_p|}{\omega_{po}}$$

Pour une pompe en circuit bouclé on a, en première approximation :

$$W_a = W_{ao} \frac{\omega_p}{\omega_{po}} \quad W_{ao} : \text{débit à l'aspiration au nominal}$$

$$\Delta P = \Delta P_o \frac{\omega_p^2}{\omega_{po}^2}$$

D'après III-1 et à condition que l'on reste dans le premier quadrant :

$$\eta_{iso} = \eta_{iso_o} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{x_o} \right)^2 \right] \quad \text{avec } x = \frac{W_a}{\rho \omega_p} \text{ et } x_o = \frac{W_{ao}}{\rho \omega_{po}}$$

$$x = \frac{W_{ao} \frac{\omega_p}{\omega_{po}}}{\rho \omega_p} = \frac{W_{ao}}{\rho \omega_{po}} = x_o \Rightarrow \eta_{iso} = \eta_{iso_o} \quad \text{pendant le ralentissement}$$

En remplaçant dans l'équation des masses tournantes :

$$I\omega_p \frac{d\omega_p}{dt} = - \frac{W_{ao} \frac{\omega_p}{\omega_{po}} \Delta P_o \left(\frac{\omega_p}{\omega_{po}}\right)^2}{\rho \eta_o} - \Delta P_{mo} \frac{\omega_p}{\omega_{po}}$$

$$I\omega_{po} \frac{d\omega_p}{dt} = - \frac{W_{ao} \Delta P_o}{\rho \eta_o} \left(\frac{\omega_p}{\omega_{po}}\right)^2 - \Delta P_{mo}$$

$$I\omega_{po}^2 \frac{d\left(\frac{\omega_p}{\omega_{po}}\right)}{dt} = - P_{fo} \left(\frac{\omega_p}{\omega_{po}}\right)^2 - \Delta P_{mo}$$

Soit K la fraction de la puissance nominale transmise au fluide dépensée pour vaincre les pertes mécaniques. On a :

$$\Delta P_{mo} = KP_{fo} \text{ et en posant } \omega^* = \frac{\omega_p}{\omega_{po}}$$

$$I\omega_{po}^2 \frac{d\omega^*}{dt} = P_{fo} [-\omega^{*2} - K]$$

Soit  $\boxed{Td_1 = \frac{I\omega_{po}^2}{P_{fo}}}$  : temps de lancer de la pompe

L'équation devient :

$$Td_1 \frac{d\omega^*}{dt} = -\omega^{*2} - K$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^* = \sqrt{K} \operatorname{tg} \left[ -\frac{\sqrt{K}}{Td_1} t + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{K}} \right]}$$

On trouve l'instant  $t = t_o$ , où la pompe s'arrête en imposant :

$$\omega^* = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{K}}{Td_1} t_o + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{K}} = 0$$

$$t_o = \frac{Td_1}{\sqrt{K}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{K}}$$

$t_o$  étant connu à partir d'un ralentissement sur inertie, on calcul  $K$  en résolvant l'équation transcendante ci-dessus.

En général, on constate que  $K$  est de l'ordre de

$$K = 4.10^{-3}$$

ce qui permet d'en déduire les pertes mécaniques :

$$\Delta P_m = K \frac{Wa_o \Delta P_o}{\rho \eta_o} \frac{\omega_p}{\omega_{po}}$$

### III- FONCTIONNEMENT DES POMPES

La figure 1 présente les caractéristiques de fonctionnement complètes pour une pompe du type centrifuge pour trois types de coordonnées  $(Q, \omega)$ ,  $(\Delta P, \omega)$  et  $(\Delta P, Q)$  où  $\Delta P$  représente l'écart de pression entre la zone de refoulement et la zone d'aspiration et  $Q$ , le débit massique.

Lorsque l'on situe la pompe dans un quadrant donné, on se réfère au diagramme  $(\Delta P, Q)$ . Une pompe ne peut pas se situer dans le troisième quadrant ( $\Delta P < 0, Q < 0, \omega < 0$ ) qui n'a aucun sens physique.

#### III-1 Premier quadrant

Le point de fonctionnement normal d'une pompe est situé dans le premier quadrant ( $\Delta P > 0, Q > 0, \omega > 0$ ). La pompe reçoit de l'énergie externe par l'intermédiaire d'un organe d'entraînement (turbine ou moteur) qu'elle transmet partiellement au fluide sous forme d'énergie de compression.

#### Attention:

Zone de refoulement ou zone d'aspiration sont géométriquement fixées en fonctionnement normal. En cas d'inversion de débit, ces zones demeurent localisées aux mêmes endroits.

Dans ce quadrant, les courbes caractéristiques se présentent sous la forme de cubiques paramétrées en fonction de la vitesse (ex : figure 2).

Ces cubiques étant homotétiques, il est d'usage d'utiliser les caractéristiques réduites :

$$\frac{\Delta P}{\rho \omega_p^2} \quad \text{et} \quad \frac{Q}{\rho \omega_p}$$

pour approximer les courbes sous la forme d'une fonction polynomiale du débit réduit :

$$x = \frac{Q}{\rho \omega_p}, \quad \text{soit}$$

$$\frac{\Delta P}{\rho \omega_p^2} = f(x)$$

Le rendement interne (isentropique) (cf § II-2) se présente sous la forme d'une parabole centrée sur le point de fonctionnement nominal (ex : figure 3).

Cette parabole peut être approximée par une loi de la forme :

$$\eta_{iso} = f(x) = \eta_{iso_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right)^2 \right]$$

où  $\eta_{iso_0}$  et  $x_0$  représentent le rendement et le débit réduit aux conditions nominales (rendement maximal à la vitesse nominale).

**Remarque:**

Le troisième quadrant est fictif. Il correspondrait à une pompe motrice aux entrées-sorties interchangeables, ce qui, technologiquement, n'est pas possible en raison de la forme des aubes.

**III-2 Quatrième quadrant (courbe A)**

Le débit du quatrième quadrant est positif et la pompe qui est entraînée réagit aux pertes de charge par un  $\Delta P$  négatif. Le fluide donne de l'énergie à la pompe.

L'évolution du point de fonctionnement de la pompe lors du passage dans le quatrième quadrant est schématisée par la courbe A. Ce type de fonctionnement apparaît lorsque la pompe perd son organe moteur et qu'elle est située :

- soit sur une ligne de pompes en série,
- soit sur une boucle fluide qui fonctionne dès lors en thermosiphon (convection naturelle positive), phénomène pouvant apparaître sur des circuits non isotherme où les effets de densité conduisent à entretenir une circulation du fluide dans le sens normal de l'écoulement.

En effet, lorsque  $\omega$  décroît (ralentissement sur inertie à la suite de la perte de la puissance motrice),  $\Delta P$  peut devenir négatif et c'est le fluide qui fournit de l'énergie à la pompe : on est dans le quatrième quadrant ( $\Delta P < 0$ ,  $Q > 0$ ). La pompe se comporte comme un organe passif entraîné par le fluide (rotor libre) et ne crée qu'une perte de charge fonction du débit :

$$\Delta P = f(Q)$$

Pour que la pompe reste en rotation sous l'effet de la poussée du fluide, il suffit que la dépression (ou perte de charge) à ses bornes soit supérieure, en valeur absolue, à un certain seuil  $\Delta P_d$  qui dépend des caractéristiques des paliers de la pompe (surface de contact, nature du frottement et du graissage fluide dans le cas d'un palier hydrostatique). On peut écrire :

$$\boxed{\overline{T}_d = \mu_d \overline{P}}$$

où  $\overline{T}_d$  est la force de frottement dynamique ( $\omega \neq 0$ )  
 $\mu_d$  est le coefficient de frottement dynamique  
 $\overline{P}$  est le poids de la pompe



En se ramenant à une pression :

$$\boxed{|\Delta P_d| = \frac{\mu_d}{S} |\vec{P}|}$$

où S est la surface des paliers

Pour que la pompe reste en rotation il suffit que  $\boxed{|\Delta P| > |\Delta P_d|}$ .

Dans ce cas, la vitesse de la pompe va se stabiliser à une valeur qui dépend de la poussée fluide, des pertes mécaniques et du rendement interne.

En effet, l'équation des masses tournantes s'écrit :  $P_m = 0$  car  $d\omega_p = 0$  et  $P_{mo} = 0$  (plus d'organe moteur)

$$P_m = 0 \Rightarrow P_f + \Delta P_m = 0$$

$$\text{avec } \boxed{P_f = \eta_{iso} P_{iso} = \sum_{i=1}^n W_i \left[ HS_{ri} - H_a + \frac{U_{ri}^2}{2} - \frac{U_a^2}{2} \right]}$$

$$P_f < 0 \text{ car } \Delta P < 0 \Rightarrow HS_{ri} < H_a$$

La poussée fluide équilibre les pertes mécaniques :  $|P_f| = \Delta P_m$

La valeur de cette vitesse est très difficile à estimer car les valeurs théoriques du rendement et des pertes mécaniques à faible vitesse sont mal connues. En général, on conserve la loi linéaire pour les pertes mécaniques (cf § II-4) et pour le rendement, on peut estimer sa valeur si on dispose d'une mesure expérimentale de la vitesse dans ce cas de fonctionnement. En effet :

$$|P_f| = \Delta P_m \Rightarrow \left| \eta_{iso} \sum_{i=1}^n W_i \left[ HS_{ri} - H_a + \frac{U_{ri}^2}{2} - \frac{U_a^2}{2} \right] \right| = \Delta P_{mo} \frac{\omega_p}{\omega_{po}}$$

Simplifions le problème en prenant le cas d'un fluide incompressible :

$$\left| \eta_{iso} \sum_{i=1}^n W_i \left[ \frac{P_{ri}}{\rho_{ri}} - \frac{P_a}{\rho_a} + \frac{U_{ri}^2}{2} - \frac{U_a^2}{2} \right] \right| = \Delta P_{mo} \frac{\omega_p}{\omega_{po}}$$

On retombe sur l'équation de Bernouilli.

En supposant que la masse volumique est quasi constante :

$$\eta_{iso} \sum_{i=1}^n W_i \left[ \frac{|\Delta P_i|}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2} \left( \frac{W_{ri}^2}{S_{ri}^2} - \frac{W_a^2}{S_a^2} \right) \right] = \Delta P_{mo} \frac{\omega_p}{\omega_{po}}$$

$$\text{Or } \Delta P_i = \Delta P \quad \forall_i$$

$$\text{Et } \sum_{i=1}^n W_i = W_a$$

$$\Rightarrow \eta_{iso} W_a \left[ \frac{|\Delta P|}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{W_{ri}^2}{S_{ri}^2} - \frac{W_a^2}{S_a^2} \right) \right] = \Delta P_{mo} \frac{\omega_p}{\omega_{po}}$$

$$\Rightarrow \eta_{iso} = \frac{\Delta P_{mo} \omega_p \rho}{\omega_{po} W_a \left[ |\Delta P| + \frac{1}{2\rho} \left( \sum_{i=1}^n \frac{W_{ri}^2}{S_{ri}^2} - \frac{W_a^2}{S_a^2} \right) \right]}$$

L'expérience montre que ce rendement est, à faible vitesse, une loi linéaire de celle-ci :  $\eta_{iso} = a\omega_p + b$  avec  $a < 0$  ce qui traduit le fait que la poussée fluide est d'autant moins efficace que la pompe tourne vite.

En remplaçant dans l'expression ci-dessus on aboutit à :

$$\omega_p = \frac{\omega_{po} b W_a \left[ |\Delta P| + \frac{1}{2\rho} \left( \sum_{i=1}^n \frac{W_{ri}^2}{S_{ri}^2} - \frac{W_a^2}{S_a^2} \right) \right]}{\Delta P_{mo} \rho - a \omega_{po} W_a \left[ |\Delta P| + \frac{1}{2\rho} \left( \sum_{i=1}^n \frac{W_{ri}^2}{S_{ri}^2} - \frac{W_a^2}{S_a^2} \right) \right]}$$

$$\text{avec } \begin{cases} a < 0 \\ \Delta P = f(Q) \end{cases}$$

Les inconnues a et b peuvent être recalées à partir de deux mesures expérimentales :

Pour des grosses pompes centrifuges la loi :

$$\boxed{\eta_{iso} = -0,2 \omega_p + 0,65} \quad (\omega \text{ en rad/s}) \text{ est une bonne approximation } (0 \leq \eta_{iso} \leq 0,65)$$

Si la force motrice du fluide est insuffisante, la pompe s'arrête (rotor bloqué).

En général ce phénomène se produit car à faible débit on perd le palier hydrostatique. La perte de charge à ses bornes est fonction du débit.

$$\Delta P = f(Q)$$

Cette perte de charge est supérieure (pour un même débit) à celle observée lorsque le rotor est libre, car la résistance opposée au fluide est beaucoup plus importante lorsqu'il y a grippage (cela traduit aussi le fait qu'un frottement statique est supérieur à un frottement dynamique).

Une fois arrêtée, la pompe peut se remettre à tourner si la dépression à ses bornes devient supérieure, en valeur absolue, à un seuil  $\Delta P_s$  qui dépend du frottement statique.

On peut écrire :

$$\boxed{|\vec{T}_s| = \mu_s |\vec{P}|} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{T}_s \text{ est la force de frottement statique} \\ \mu_s \text{ est le coefficient de frottement statique} \\ \vec{P} \text{ est le poids de la pompe} \end{cases}$$

En se ramenant à une pression :

$$\boxed{|\Delta P_s| = \frac{\mu_s}{S} |\vec{P}|} \quad \text{où } S \text{ est la surface des paliers}$$

Pour que la pompe redémarre il suffit que  $\boxed{|\Delta P| > |\Delta P_s|}$

et dans ce cas on se retrouve en rotor libre.

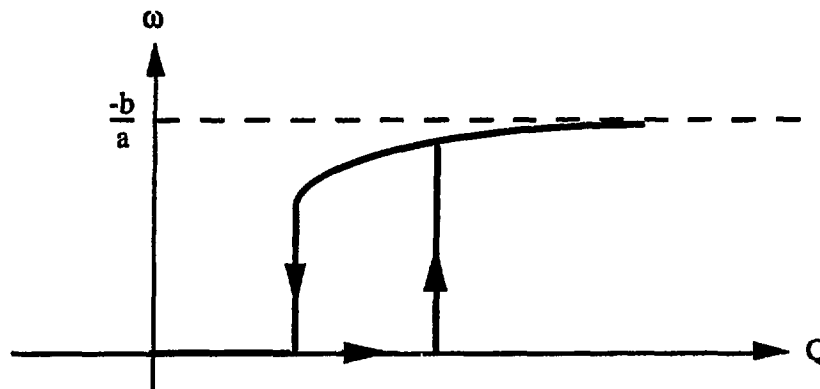
Comme  $\mu_s > \mu_d$  on a  $|\Delta P_s| > |\Delta P_d|$

Comme exemple on peut noter que pour les pompes primaires de Super Phénix d'une masse de 82 tonnes on a :

$$\Delta P_s = 2300 \text{ Pa}$$

$$\Delta P_d = 1500 \text{ Pa}$$

Dans le quatrième quadrant le point de fonctionnement de la pompe dans le diagramme ( $\omega$ ,  $Q$ ) a pour représentation



En conclusion, on a trois points de fonctionnement possibles (figure 1) :

- la pompe ne s'arrête pas 1
- la pompe s'arrête et reste arrêtée 2
- la pompe s'arrête puis redémarre 3

### III-3 Deuxième quadrant (courbes B et C)

La pompe est résistante. Le débit s'est inversé et le débit  $Q$  devient négatif pour un  $\Delta P > 0$ . Dans ce cas, la pompe n'est plus entraînée. On trouve dans ce second quadrant, la situation à  $\Delta P > 0$  et  $Q < 0$  et rotation positive. Il s'agit là d'un transitoire dû à l'inertie de rotation. En général de courte durée, il évolue vers une inversion du sens de rotation.

Le passage du point de fonctionnement de la pompe dans le deuxième quadrant est illustré par les courbes B et C (figure 1), qui ne présentent en fait aucune différence de fond.

- L'évolution C intervient lorsque la hauteur manométrique reste sensiblement constante. C'est le cas du déclenchement d'une pompe dans un puit de forage ou, pour des pompes situées en parallèles, lorsque l'on déclenche une de ces pompe sans que les autres ralentissent (cas des pompes primaires dans un réacteur nucléaire à eau sous pression où à neutrons rapides).

- L'évolution B se produit lorsque la hauteur manométrique décroît. C'est le cas ci-dessus où les autres pompes ralentissent (ex. : déclenchement sur manque de tension des pompes primaires d'un réacteur nucléaire avec perte de l'arbre électrique sur une des pompes induisant une réduction de son inertie).

En effet, dans les cas B et C la contre pression engendrée par la rotation des autres pompes (ou par la hauteur fluide dans un puit de forage) inverse le débit dans le circuit où se situe la pompe en défaut. Dès lors, cette pompe fonctionne dans le second quadrant ( $\Delta P > 0, Q < 0$ ) car le  $\Delta P$  aux bornes (qui est la différence de pression refoulement-aspiration) reste positif (la pompe créant une perte de charge dans le sens de l'écoulement).

Tant que la pompe n'est pas arrêtée ( $\omega_p > 0$ ), la perte de charge est fonction du débit et de la vitesse et peut s'exprimer en fonction des coordonnées réduites :

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\rho \omega_p^2} = f(x)} \text{ avec } x = \frac{Q}{\rho \omega_p} < 0$$

On verra au § IV-3-2 que pour des raisons de stabilité de la vitesse on a forcément :

$$\boxed{f(x) = Ax^2 + Bx + C \text{ avec } A \text{ et } C \geq 0} \\ B \leq 0$$

Pour ne pas avoir de discontinuités lors de ce passage 1  $\rightarrow$  2, le mieux est de se raccorder avec les caractéristiques du premier quadrant (cf figure 4).

Pour le rendement, on prend une loi classique fonction de la vitesse soit :  $\eta = k \frac{\omega_p}{\omega_{po}}$  qui traduit le fait que la poussée du fluide sur les aubes (qui tournent toujours dans le bon sens et donc prennent le fluide de plein fouet) est d'autant meilleure que la pompe tourne vite.

**Nota :**

On écrètera la valeur du rendement à 0,1 pour éviter d'avoir des rendements trop faibles à une vitesse voisine de zéro.

Au bout d'un laps de temps très court, la pompe se met à tourner dans l'autre sens, poussée par le fluide.

Dès lors, on fonctionne à  $\omega < 0$  et  $Q < 0$  (deuxième quadrant rotor libre). Comme les vitesses d'entraînement peuvent être importantes (contrairement au quatrième quadrant où la convection naturelle conduit à des débits faibles), la perte de charge dépend de la vitesse et, ici aussi, on emploie les caractéristiques réduites :

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\rho \omega_p^2} = f(x)} \text{ avec } x = \frac{Q}{\rho \omega_p} > 0$$

On verra au § IV-3-2 que pour des raisons de stabilité de la vitesse on a forcément :

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \text{ avec } A, B, C \geq 0$$

Le comportement de la pompe est très voisin de celui rencontré dans le quatrième quadrant. Si la perte de charge est suffisante ( $\Delta P > \Delta P_d$ ), un équilibre se crée entre les pertes mécaniques :

$$\Delta P_m = \Delta P_{mo} \frac{|\omega_p|}{\omega_{po}} > 0$$

et la puissance apportée par le fluide ( $P_f < 0$  car  $Q < 0$ ) et il existe un point de stabilité à vitesse négative qui dépend de la valeur des pertes internes de la pompe, donc du rendement. Celui-ci peut-être approximée par des lois linéaires, fonction de la vitesse du type :

$$\eta = a\omega_p + b \quad (\omega_p < 0)$$

Les inconnues a et b devront être déterminées à partir de résultats expérimentaux et on fera l'hypothèse que la loi de pertes mécaniques reste valable à vitesse négative :

$$\Delta P_m = \Delta P_{mo} \frac{|\omega_p|}{\omega_{po}}$$

Si la poussée du fluide est insuffisante, la pompe s'arrête (rotor bloqué). La perte de charge à ses bornes est fonction de débit  $\Delta P = f(Q)$ .

Une fois arrêtée, la pompe peut redémarrer si la dépression à ses bornes dépasse le seuil de résistance statique :  $\Delta P > \Delta P_s$ .

En première approximation on peut considérer que les seuils  $\Delta P_s$  et  $\Delta P_d$  sont les mêmes que ceux du quatrième quadrant.

En général, les contrepressions sont suffisantes pour maintenir la pompe en rotation. Elle ne peut être arrêtée que sous l'action d'un antidéviereur ou d'obturateurs qui empêchent le fluide de circuler.

On a donc deux points de fonctionnement possibles (figure 1) :

- La pompe s'arrête et reste arrêtée            1' et 1"
- La pompe tourne à vitesse négative        2' et 2"

#### IV- RESOLUTION PAR SICLE DU MODELE DE POMPE

Le modèle SICLE de pompe comprend deux sorties.

##### IV-1 Caractéristique de pompe

La relation de différence de pression  $\Delta P = f(\omega, W, P, T, \dots)$ , comme pour toutes les équations de SICLE, est semi linéarisée.

$$\Delta P = f(V_i) \quad V_i = \{\omega, W, P, T, \dots\}$$

$$\varepsilon \Delta P^{n+1} + (1 - \varepsilon) \Delta P^n = \varepsilon f^{n+1}(V_i) + (1 - \varepsilon) f^n(V_i)$$

$$\varepsilon \text{ chiffrant le degré d'implicitation : } \begin{cases} \varepsilon = 1 & \text{implicite} \\ \varepsilon = 0 & \text{explicite} \\ \varepsilon = 0,5 & \text{CRANCK} \end{cases}$$

$$\Delta P^{n+1} = \Delta P^n + \delta \Delta P$$

$$f^{n+1}(V_i) = f(V_i^n) + \frac{\partial f}{\partial V_i} dV_i$$

$$\text{d'où : } \varepsilon \left( \delta \Delta P - \frac{\partial f}{\partial V_i} (V_i^n) dV_i \right) = f(V_i^n) - \Delta P$$

$f(V_i^n) - \Delta P$  est un rattrapage au pas de temps courant d'une erreur éventuelle réalisée sur (31) au pas de temps précédant. Ce rattrapage n'est en réalité pas effectué entièrement dans un seul pas de temps mais réparti sur plusieurs en prenant un coefficient de rattrapage empirique de 0,2.

Quant à  $\varepsilon$ , on le prend totalement implicite :  $\varepsilon = 1$ . Parmi les  $V_i$  figurent P et T. On négligera leur influence, faible devant celle des autres variables.

$$d\Delta P + 0,2 \Delta P = \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial f}{\partial W} dW + 0,2 f(\omega, W, P, T \dots)$$

L'introduction de cette caractéristique dans le code se fait au moyen des coefficients indicés XPP, XPW, XPD définis de la manière suivante :

$$XPP (IP, IS) d\Delta P + XPW (IP, IS) dW = XPD (IP, IS)$$



IP numéro de la pompe

IS vaut 1 ou 2 suivant qu'il s'agit de la première ou de la seconde sortie.

On voit que l'on a :

$$\begin{aligned} \text{XPP (IP, IS)} &= 1 \\ \text{XPW (IP, IS)} &= - \frac{\partial f}{\partial W} \\ \text{XPD (IP, IS)} &= 0,2 \left[ f(\omega, W, P, T \dots) - \Delta P \right] + \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega \end{aligned}$$

$$\Delta P = P_{\text{sortie}} - P_{\text{aspiration}}$$

de sorte que :

$$d\Delta P = dP_s - dP_e$$

#### Remarques :

① Sortie et aspiration sont indépendantes du sens réel de l'écoulement mais sont fixés par le fonctionnement normal de la pompe dans le quadrant 1.

② Si la pompe a deux sorties, cette équation est vérifiée pour chacune des sorties de la pompe avec des coefficients XPP, XPW et XPD propres à chaque sortie.

③  $dP_e$  et  $dP_s$  sont des inconnues principales du système matriciel hydrodynamique des incréments de pression. Cette équation (ou ces équations si la pompe a deux sorties) est exactement celle que le coupleur utilise pour construire la partie de la matrice relative aux pompes.

Pour résoudre cette matrice, le terme  $\frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega$  qui est un second membre, doit donc explicitement être connu. Sa détermination doit donc précéder la construction matricielle. Le paragraphe IV.3 est entièrement consacré à cette détermination préalable.

④ Avec l'équation de la caractéristique de pompe et la détermination de  $\omega$ , l'aspect hydrodynamique de la pompe est entièrement résolu. Reste l'aspect énergétique. Son traitement est algébrique et entièrement explicite. Il fait l'objet du paragraphe IV.2.

## IV-2 Bilan d'énergie

Nous supposons connues les pertes internes (rendement  $\eta_{\text{iso}}$ ) et les pertes externes  $\Delta P_m$  ;  $P_{\text{iso}}$  peut être calculé par la relation du § II-2 :

$$P_{iso} = \sum_{i=1}^n W_i \left[ HS_{ri} - H_a + \frac{U_{ri}|U_{ri}|}{2} - \frac{U_a|U_a|}{2} \right]$$

Nous en déduisons alors Pf :

$$Pf = \frac{P_{iso}}{\eta_{iso}} > 0 \text{ en fonctionnement normal (premier quadrant)}$$

$$Pf = \eta_{iso} P_{iso} < 0 \text{ dans les autres cas de fonctionnement (second et quatrième quadrant)}$$

$$\text{puis } P_m : P_m = Pf + \Delta P_m$$

Le bilan d'énergie est réalisé lorsque l'on connaît l'écart enthalpique entre chaque sortie de la pompe et l'aspiration : pour cela il nous faut une relation supplémentaire et nous supposons que cet écart est proportionnel à l'élévation de pression :

$$\frac{HS_1 + \frac{U_{r1}|U_{r1}|}{2} - H_a - \frac{U_a|U_a|}{2}}{\Delta P_1} = \frac{HS_2 + \frac{U_{r2}|U_{r2}|}{2} - H_a - \frac{U_a|U_a|}{2}}{\Delta P_2}$$

$$= \frac{Pf}{W_1 \Delta P_1 + W_2 \Delta P_2}$$

Dans le programme de SICLE nous avons mémorisé cinq grandeurs relatives à chaque pompe ; ce sont dans l'ordre :

- la puissance sur l'arbre  $P_m$ ,
- le couple,
- le rendement isentropique  $\eta_{iso}$ ,
- les pertes mécaniques  $\Delta P_m$ ,
- le terme de la relation ci-dessus permettant de retrouver l'écart enthalpique entre chaque sortie de la pompe et l'aspiration .

#### IV-3 Calcul de la vitesse de la pompe

Ce calcul peut être effectué de trois manières. On a le choix entre :

- un calcul en imposant la vitesse de la pompe,
- un calcul en imposant la puissance sur l'arbre de la pompe,
- un calcul complet de l'ensemble pompe-accouplement-organe d'entraînement.

#### IV-3-1 Calcul à vitesse imposée

Dans ce cas, l'utilisateur impose directement la variation de la vitesse de la pompe ( $d\omega_p$ ).

#### IV-3-2 Calcul à puissance imposée

La variation de la vitesse est issue de la résolution de l'équation des masses tournantes (cf § II-3).

$$\boxed{I \frac{d\omega_p}{dt} = C_{mo} - C_m = \frac{P_{mo} - P_m}{\omega_p}} \quad \text{avec } I = I_p$$

où  $P_{mo}$  est la puissance imposée (puissance motrice) et  $P_m$  la puissance absorbée de la pompe telle que définie au § II-2.

Cette relation peut être discrétisée en utilisant une méthode implicite :

$$\boxed{I \frac{\delta\omega_p}{\Delta t} = \frac{P_{mo}(t) - P_m(t)}{\omega_p(t)} - \epsilon \frac{\delta P_m}{\omega_p(t)}} \quad \text{avec } 0 \leq \epsilon \leq 1$$

SICLE utilise une méthode semi-implicite :  $\epsilon = 0.5$

La variation de puissance absorbée par la pompe  $\delta P_m$  due à la variation de vitesse peut s'écrire de façon simplifiée à partir des hypothèses suivantes:

- fluide incompressible :  $H = \frac{P}{\rho}$
- masse volumique constante
- on néglige les variations des pertes mécaniques  $\delta \Delta P_m$  et de l'énergie cinétique  $\delta \frac{\Delta U^2}{2}$  qui sont du deuxième ordre par rapport aux termes relatifs à la variation de pression.

Dans ce cas :

$$\delta P_m = \delta P_f + \delta \Delta P_m = \delta \left( \frac{\sum_{i=1}^2 W_i \Delta P_i}{\eta_{iso} \rho} \right) + \delta \frac{\Delta U^2}{2} + \delta \Delta P_m$$

$$= \delta \left( \frac{\sum_{i=1}^2 W_i \Delta P_i}{\eta_{iso} \rho} \right) \quad \text{pour le premier quadrant}$$

$$= \delta \left( \frac{\eta_{iso} \sum_{i=1}^2 W_i \Delta P_i}{\rho} \right) \quad \text{pour les autres quadrants}$$

En posant

$\begin{cases} \text{REND} = \frac{1}{\eta_{iso}} & \text{pour le premier quadrant} \\ \text{REND} = \eta_{iso} & \text{pour les autres quadrants} \end{cases}$
---

$$\delta P_m = \delta \left( \frac{\text{REND} \sum_{i=1}^2 W_i \Delta P_i}{\rho} \right) = \frac{\text{REND}}{\rho} \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right) \delta \omega_p$$

donc :

$$I \frac{\delta \omega_p}{\Delta t} = \frac{P_{mo}(t) - P_m(t)}{\omega_p(t)} - \epsilon \left[ \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i \right] \frac{\delta \omega_p}{\omega_p(t)} \times \frac{\text{REND}}{\rho}$$

$$\delta \omega_p \left[ I \omega_p + \frac{\epsilon \Delta t \times \text{REND}}{\rho} \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i \right] = (P_{mo}(t) - P_m(t)) \cdot \Delta t$$

$\delta \omega_p = \frac{\Delta t \cdot (P_{mo}(t) - P_m(t))}{I \omega_p + \frac{\epsilon \Delta t \text{ REND}}{\rho} \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i}$
--

Cette relation conduit à une stabilisation de la vitesse dans la plupart des cas de fonctionnement :

a) *Premier quadrant* :  $P_{mo} \neq 0$

$$\delta\omega_p = 0 \text{ pour } P_m = P_{mo}$$

b) *Quatrième quadrant* :  $P_{mo} = 0$

L'équilibre existe si  $|\Delta P_i| > |\Delta P_d|$  (cf § III-2)

$$\text{Comme } \Delta P_i = f(W_i) \Rightarrow \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i = 0$$

$$\text{Il reste } \delta\omega_p = \frac{-P_m(t) \Delta t}{I\omega_p}$$

$$\text{A l'équilibre } \delta\omega_p = 0 \Rightarrow P_m = 0 \Rightarrow P_f + \Delta P_m = 0$$

$$\Rightarrow |P_f| = \Delta P_m$$

$$(P_f < 0 \text{ car } \Delta P < 0)$$

Si la poussée du fluide  $|P_f|$  augmente alors  $P_f$  diminue :

$$\Rightarrow P_m < 0 \Rightarrow \delta\omega_p \text{ augmente}$$

$\Rightarrow$  la pompe accélère ce qui est correcte

c) *Deuxième quadrant* :  $P_{mo} = 0$

L'équilibre existe si  $\Delta P > \Delta P_d$  (cf § III-3)

$$\text{Or : } \delta\omega_p = \frac{-P_m(t) \Delta t}{I\omega_p + \frac{\varepsilon \cdot \Delta t}{\rho} \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i}$$

$$\text{A l'équilibre } \delta\omega_p = 0 \Rightarrow P_m = 0 \Rightarrow P_f + \Delta P_m = 0$$

$$\Rightarrow |P_f| = \Delta P_m$$

$$(P_f < 0 \text{ car } W_i < 0)$$

Si la poussée du fluide  $|P_f|$  augmente alors  $P_f$  diminue :

$$\Rightarrow P_m < 0 \Rightarrow \text{le numérateur est positif.}$$

Pour que le comportement de la pompe soit correct, il faut que la pompe accélère en vitesse négative  $\Rightarrow \delta\omega_p < 0$

⇒ le dénominateur doit être toujours négatif

ce qui est le cas pour  $I\omega_p$

ce qui implique que  $\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p}\right)_i \geq 0$  (car  $W_i < 0$ )

Cette équation contraint la caractéristique de la pompe lorsqu'elle fonctionne dans ce quadrant.

$$\left(\frac{\Delta P}{\rho \omega_p^2}\right)_i = f(x_i) \text{ avec } x_i = \frac{W_i}{\rho \omega_p} > 0 \text{ car } W_i < 0 \text{ et } \omega_p < 0$$

$$\Delta P_i = \rho \omega_p^2 f(x_i)$$

$$\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \omega_p} = 2\rho \omega_p f(x_i) + \rho \omega_p^2 - \frac{W_i}{\rho \omega_p^2} x f'(x_i)$$

$$= 2\rho \omega_p f(x_i) - W_i f'(x_i)$$

$$\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \omega_p} > 0 \Rightarrow 2\rho \omega_p f(x_i) - W_i f'(x_i) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x_i) > \frac{x_i}{2} f'(x_i)$$

La caractéristique étant approximée par une cubique :

$$f(x_i) = a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_0$$

On a :

$$a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_0 \geq \frac{n}{2} a_n x_i^n + \frac{n-1}{2} a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + \frac{a_1 x_i}{2}$$

L'inégalité formelle conduit à :

$$\begin{cases} a_0 \geq 0 \\ a_1 x_i \geq \frac{a_1}{2} x_i \Rightarrow a_1 \geq 0 \\ a_n x_i \geq \frac{n}{2} a_n x_i^2 \Rightarrow n \leq 2 \text{ et } a_n \geq 0 \end{cases}$$

et donc  $f(x_i) = a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0$   $a_i \geq 0$

d) Cas particulier du passage 1 → 2 : ( $P_{mo} = 0$ )

Dans ce cas  $\omega_p > 0$  et  $W_i < 0$ .

La poussée fluide s'effectue à contrario de la vitesse de rotation et l'équation des masses tournantes doit s'écrire :

$$\boxed{\Gamma \frac{d\omega_p}{dt} = \frac{P_m}{\omega_p} < 0} \quad \text{pour que la pompe ralentisse jusqu'à inverser sa vitesse avec}$$

$$P_m = P_f - \Delta P_m < 0 \quad (P_f < 0 \text{ car } W_i < 0)$$

et donc la discrétisation conduit à :

$$\boxed{\delta\omega_p = \frac{\Delta t \cdot (P_{mo}(t) + P_m(t))}{I\omega_p - \frac{\epsilon \cdot \Delta t \cdot \text{REND}}{\rho} \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i}} \quad (P_{mo} = 0)$$

$$\text{Ici aussi il faut } \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i \geq 0 \text{ avec } x_i = \frac{W_i}{\rho \omega_p} < 0$$

L'égalité formelle conduit à :

$$\begin{cases} a_0 \geq 0 \\ a_1 x_i \geq \frac{a_1}{2} x_i \text{ avec } x_i < 0 \Rightarrow \frac{a_1}{2} \leq a_1 \Rightarrow a_1 \leq 0 \\ a_n x_i^n \geq \frac{a_n}{2} a_n x_i^n \text{ avec } n \text{ pair} \Rightarrow a_n \geq 0 \text{ et } n \leq 2 \end{cases}$$

donc  $\boxed{f(x_i) = a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0}$  avec  $a_0$  et  $a_2 \geq 0$  et  $a_1 \leq 0$

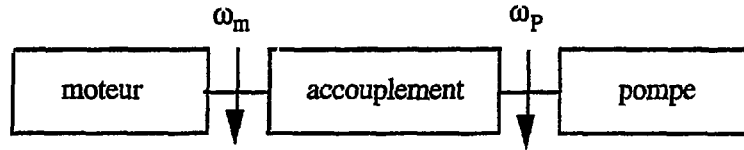
#### IV-3-3 Calcul complet de l'ensemble pompe-accouplement-organe d'entraînement

On peut distinguer plusieurs cas suivant le type de l'accouplement (rapport de vitesse constant ou variable) et de l'organe d'entraînement (moteur électrique ou turbine).

#### IV-3-3-1 Entraînement par moteur électrique asynchrone

a) Rapport des vitesses moteur-pompe constant (ex : engrenages)

On a l'ensemble suivant :



On peut écrire les deux équations suivantes :

$$\omega_m I_m \frac{d\omega_m}{dt} = P_{mo} - P_{red}$$

$$\omega_p I_p \frac{d\omega_p}{dt} = P_{red} - P_m$$

En supposant la puissance dissipée dans l'accouplement nulle on a :

$$\omega_m I_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_p I_p \frac{d\omega_p}{dt} = P_{mo} - P_m$$

Posons  $\alpha = \frac{\omega_p}{\omega_m}$  (dans ce cas  $\alpha$  est une constante)

L'équation précédente s'écrit alors :

$$\left( \frac{I_m}{\alpha^2} + I_p \right) \frac{d\omega_p}{dt} = \frac{P_{mo}(t) - P_m(t)}{\omega_p}$$

ou :

$$\frac{I d\omega_p}{dt} = \frac{P_{mo}(t) - P_m(t)}{\omega_p}$$

avec :

$$I = \frac{I_m}{\alpha^2} + I_p$$

Nous allons discrétiser cette équation en utilisant une méthode implicite :

$$\frac{I \delta\omega_p}{\Delta t} = \frac{P_{mo}(t) - P_m(t)}{\omega_p} + \varepsilon \frac{\delta P_{mo}(t) - \delta P_m(t)}{\omega_p(t)} \text{ avec } 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

SICLE utilise une méthode semi-implicite :  $\varepsilon = 0,5$ .



En faisant les mêmes hypothèses simplificatrices qu'au § IV-3-2, la variation de puissance absorbée par la pompe est alors :

$$\delta P_m = \frac{\text{REND}}{\rho} \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i \delta \omega_p \text{ avec } \begin{cases} \text{REND} = \frac{1}{\eta_{\text{iso}}} \text{ pour le premier quadrant} \\ \text{REND} = \eta_{\text{iso}} \text{ pour les autres quadrants} \end{cases}$$

La puissance motrice du moteur peut s'écrire :

$$P_{\text{mo}} = \omega_m \cdot C_{\text{mo}} \text{ avec } C_{\text{mo}} = \text{FCM}(X) \cdot U^2 \cdot \text{CMO}$$

x représente le glissement :  $X = \frac{\omega_m f_0}{\omega_0 f}$  et U est la tension aux bornes du moteur

$$\text{d'où } \delta P_{\text{mo}} = \text{FCM}(X) \cdot U^2 \cdot \text{CMO} \cdot \frac{\delta \omega_p}{\alpha} + \text{FCM}'(X) \cdot U^2 \cdot \text{CMO} \cdot \frac{\omega_p}{\alpha} \cdot \frac{\delta \omega_p}{\alpha} \cdot \frac{f_0}{\omega_0 \cdot f}$$

$$\text{soit } \delta P_{\text{mo}} = \frac{U^2 \cdot \text{CMO}}{\alpha} \left( \text{FCM}(X) + \text{FCM}'(X) \cdot \frac{\omega_p}{\alpha \omega_0} \cdot \frac{f_0}{f} \right) \delta \omega_p$$

On a alors :

$$\frac{I \delta \omega_p}{\Delta t} = \frac{P_{\text{mo}}(t) - P_m(t)}{\omega_p} + \varepsilon \left[ \frac{U^2 \cdot \text{CMO}}{\alpha} \left( \text{FCM}(X) + \text{FCM}'(X) \cdot \frac{\omega_p}{\alpha \omega_0} \cdot \frac{f_0}{f} \right) - \left( \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i \frac{\text{REND}}{\rho} \right) \right] \frac{\delta \omega_p}{\omega_p}$$

$$\delta \omega_p \left( I \omega_p + \varepsilon \Delta t \left[ \left( \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i \frac{\text{REND}}{\rho} \right) - \frac{U^2 \cdot \text{CMO}}{\alpha} \left( \text{FCM}(X) + \text{FCM}'(X) \cdot \frac{\omega_p}{\alpha \omega_0} \cdot \frac{f_0}{f} \right) \right] \right) = \Delta t \cdot (P_{\text{mo}}(t) - P_m(t))$$

$$\delta \omega_p = \frac{\Delta t (P_{\text{mo}}(t) - P_m(t))}{I \omega_p + \Delta t \cdot \varepsilon \left[ \frac{\text{REND}}{\rho} \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i - \frac{U^2 \cdot \text{CMO}}{\alpha} \left( \text{FCM}(X) + \text{FCM}'(X) \cdot \frac{\omega_p}{\alpha \omega_0} \cdot \frac{f_0}{f} \right) \right]}$$

La perte du moteur intervient lorsque la tension s'annule :  $U = 0$

$$\Rightarrow C_{\text{mo}} = 0 \Rightarrow P_{\text{mo}} = 0$$

L'équation ci-dessus reste valable en faisant  $P_{mo} = 0$  et  $U = 0$  et on retombe sur la relation définie au § IV.3.2 avec comme seule différence :  $I = I_p + \frac{I_m}{\alpha^2}$

De même, le cas particulier du passage 1  $\rightarrow$  2 nécessite un changement de signe :

$$I \frac{d\omega_p}{dt} = \frac{P_m}{\omega_p} < 0 \quad \text{avec } P_m = P_f - \Delta P_m < 0 \quad (P_f < 0)$$

*b) Rapport des vitesses moteur-pompe variable (ex : couplage hydraulique)*

En supposant la puissance dissipée dans l'accouplement nulle on a toujours :

$$\omega_m I_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_p I_p \frac{d\omega_p}{dt} = P_{mo} - P_m$$

Posons  $\alpha = \frac{\omega_p}{\omega_m}$  avec  $\alpha = \frac{\alpha_c}{1 + T.p}$  où  $\alpha_c$  est la valeur de consigne du rapport des vitesses, soit :  $\alpha_c = \alpha + T \frac{d\alpha}{dt}$  où  $T$  caractérise la constante de temps du coupleur.

L'équation précédente s'écrit alors :

$$\frac{\omega_p}{\alpha^2} I_m \frac{d\omega_p}{dt} - \frac{\omega_p^2}{\alpha} \cdot I_m \cdot \frac{1}{\alpha^2} \frac{d\alpha}{dt} + \omega_p I_p \frac{d\omega_p}{dt} = P_{mo}(t) - P_m(t)$$

$$\omega_p \cdot \left( \frac{I_m}{\alpha^2} + I_p \right) \frac{d\omega_p}{dt} - \frac{\omega_p^2}{\alpha^3} I_m \frac{d\alpha}{dt} = P_{mo}(t) - P_m(t)$$

On pose  $I = \frac{I_m}{\alpha^2} + I_p$  et on remplace  $\frac{d\alpha}{dt}$  par  $\frac{\alpha_c - \alpha}{T}$

$$I \cdot \frac{d\omega_p}{dt} = \frac{P_{mo}(t) - P_m(t)}{\omega_p} + \frac{\omega_p}{\alpha^3} \cdot I_m \left( \frac{\alpha_c - \alpha}{T} \right)$$

Nous allons discrétiser cette équation en utilisant une méthode implicite :

$$I \cdot \frac{\delta\omega_p}{\Delta t} = \frac{P_{mo}(t) - P_m(t)}{\omega_p} + \frac{\omega_p}{\alpha^3} \cdot I_m \cdot \frac{\alpha_c - \alpha}{T} + \varepsilon \left( \frac{\delta P_{mo}(t) - \delta P_m(t)}{\omega_p} + \frac{\delta\omega_p}{\alpha^3} \cdot I_m \frac{\alpha_c - \alpha}{T} \right)$$

SICLE utilise une méthode semi-implicite :  $\varepsilon = 0.5$ .

Ce qui s'écrit en utilisant les résultats du paragraphe précédent :

$$\frac{I \delta \omega_p}{\Delta t} = \frac{P_{mo}(t) - P_m(t)}{\omega_p} + \frac{\omega_p^2 I_m}{\alpha^3} \frac{\alpha_c - \alpha}{T} + \varepsilon \left[ \frac{U^2 \cdot CMO}{\alpha} (FCM(X) + FCM'(X) \cdot \frac{\omega_p}{\alpha \omega_o} \cdot \frac{f_o}{f}) - \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i \frac{REND}{\rho} + \frac{\omega_p I_m}{\alpha^3} \cdot \frac{\alpha_c - \alpha}{T} \right] \frac{\delta \omega_p}{\omega_p}$$

$$\delta \omega_p \left( I \omega_p + \varepsilon \Delta t \left( \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i \frac{REND}{\rho} - \frac{U^2 \cdot CMO}{\alpha} (FCM(X) + FCM'(X) \cdot \frac{\omega_p}{\alpha \omega_o} \cdot \frac{f_o}{f}) - \frac{\omega_p I_m}{\alpha^3} \frac{\alpha_c - \alpha}{T} \right) \right) = \Delta t \left( P_{mo}(t) - P_m(t) + \frac{\omega_p^2 I_m}{\alpha^3} \frac{\alpha_c - \alpha}{T} \right)$$

soit :

$$\delta \omega_p = \frac{\Delta t \left( P_{mo}(t) - P_m(t) + \frac{\omega_p^2 I_m}{\alpha^3} \cdot \frac{\alpha_c - \alpha}{T} \right)}{I \omega_p + \varepsilon \Delta t \left[ \sum_{i=1}^2 W_i \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \omega_p} \right)_i \frac{REND}{\rho} - \frac{U^2 \cdot CMO}{\alpha} (FCM(X) + FCM'(X) \cdot \frac{\omega_p}{\alpha \omega_o} \cdot \frac{f_o}{f}) - \frac{\omega_p I_m}{\alpha^3} \frac{\alpha_c - \alpha}{T} \right]}$$

On calculera le paramètre  $\alpha$  à chaque pas de temps par :  $\alpha + \frac{T d\alpha}{dt} = \alpha_c$

ce qui peut se mettre sous la forme :  $\alpha = \alpha_c + (\alpha_o - \alpha_c) e^{-\frac{t}{T}}$

soit en discrétisant  $\alpha(t + dt) = \alpha_c(t) + (\alpha(t) - \alpha_c(t)) e^{-\frac{\Delta t}{T}}$

Les états d'équilibre ( $\delta \omega_p = 0$ ) sont les mêmes que ceux définis au § IV-3-2 car à l'équilibre  $\alpha = \alpha_c$ , ce qui annule les termes en  $\alpha_c - \alpha$ .

Le cas particulier du passage 1  $\rightarrow$  2 nécessite un changement de signe :

$$\omega_m I_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_p I_p \frac{d\omega_p}{dt} = P_m < 0 \quad \text{avec } P_m = P_f - \Delta P_m < 0 \quad (P_f < 0)$$

#### IV-3-3-2 Entraînement par turbine

Dans ce cas on utilisera les mêmes équations que précédemment, en faisant  $\delta \omega_p = 0$ .

$P_{mo}$  est la puissance motrice sur l'arbre de la turbine. Elle est de la forme  $P_{mo} = Q \cdot \Delta H \cdot \eta$  où

$Q$  est le débit d'admission,  $\Delta H$  la détente isentropique dans les aubes de la turbine et  $\eta$  le rendement global.

#### IV-3-4 Arrêt et démarrage de la pompe

Comme nous l'avons vu précédemment, la pompe en rotation libre peut s'arrêter si la poussée fluide est insuffisante ( $|\Delta P| < |\Delta P_d|$  cf § III-2).

Dans ce cas il suffit d'annuler le rendement interne  $\eta_{iso} = 0$  ce qui implique  $P_f = 0$  et le point d'équilibre est obtenu d'après le § IV-3-2 lorsque les pertes mécaniques sont nulles, ce qui implique une vitesse nulle.

Le redémarrage de la pompe peut se faire de deux façons :

##### a) Redémarrage manuel :

Si on remet en marche l'organe moteur (pompe, turbine) ou si on impose une puissance motrice sur l'arbre, la pompe redémarre.

1/ Dans le cas d'une puissance imposée  $P_{mo}$  ou d'un calcul complet pour une turbo-pompe, la vitesse au premier pas de temps est déduit de la relation :

$$I \omega_p \frac{\omega_p}{\Delta t} = P_{mo} - P_m \Rightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{(P_{mo} - P_m) \Delta t}{I}}$$

2/ Dans le cas d'un calcul complet pour une moto-pompe, on a :

$$I_m \omega_m \frac{\omega_m}{\Delta t} + I \omega_p \frac{\omega_p}{\Delta t} = P_{mo} - P_m$$

$$\alpha = \frac{\omega_m}{\omega_p}, P_{mo} = C_{mo} \omega_m \text{ et } P_m = C_m \omega_p$$

$$\frac{I_m}{\alpha^2} \omega_p^2 + I_p \omega_p^2 = \left( \frac{C_{mo}}{\alpha} \omega_p - C_m \omega_p \right) \Delta t$$

$$\Rightarrow I \omega_p = \left( \frac{C_{mo}}{\alpha} - C_m \right) \Delta t$$

$$\Rightarrow \omega_p = \left( \frac{C_{mo}}{\alpha} - C_m \right) \frac{\Delta t}{I}$$

On fera l'hypothèse que  $FCM(X) = 0,6$  au démarrage et on a :  $C_{mo} = FCM \times U^2 \times CMO$ .

*b) Redémarrage sous la poussée fluide :*

Une fois la pompe arrêtée, elle peut redémarrer si la poussée du fluide devient suffisante ( $|\Delta P| > |\Delta P_s|$  : cf § III-2)

Dans ce cas il suffit d'avoir un rendement non nul pour que  $P_f \neq 0$  (par exemple en prenant le rendement en rotor libre).

La vitesse au premier pas de temps est de :

$$I \omega_p \frac{\omega_p}{\Delta t} = |P_f| \Rightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{|P_f| \Delta t}{I}}$$

Pour tenir compte du redémarrage à l'envers (cas du deuxième quadrant) il suffit d'écrire :

$$\omega_p = \text{sign}(W_a) \sqrt{\frac{|P_f| \Delta t}{I}}$$

où  $\text{sign}(W_a)$  représente le sens du débit fluide.

## REFERENCES

- [1] A.J. STEPANOFF  
*Pompes centrifuges et pompes hélices - Théorie, tracé, applications*

## **FIGURES**

Figure 1

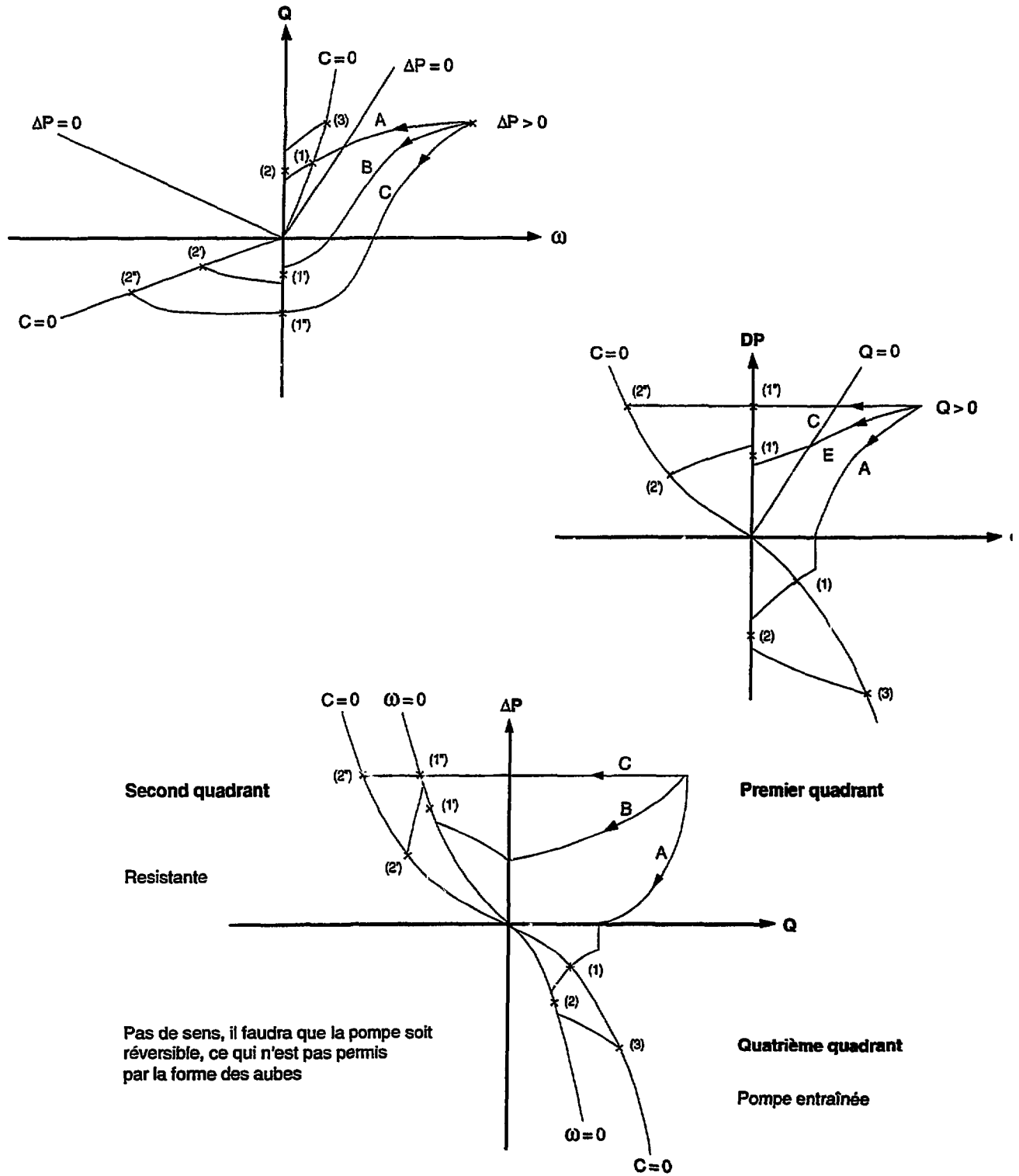




Figure 2 - Caractéristiques Hauteur/Débit

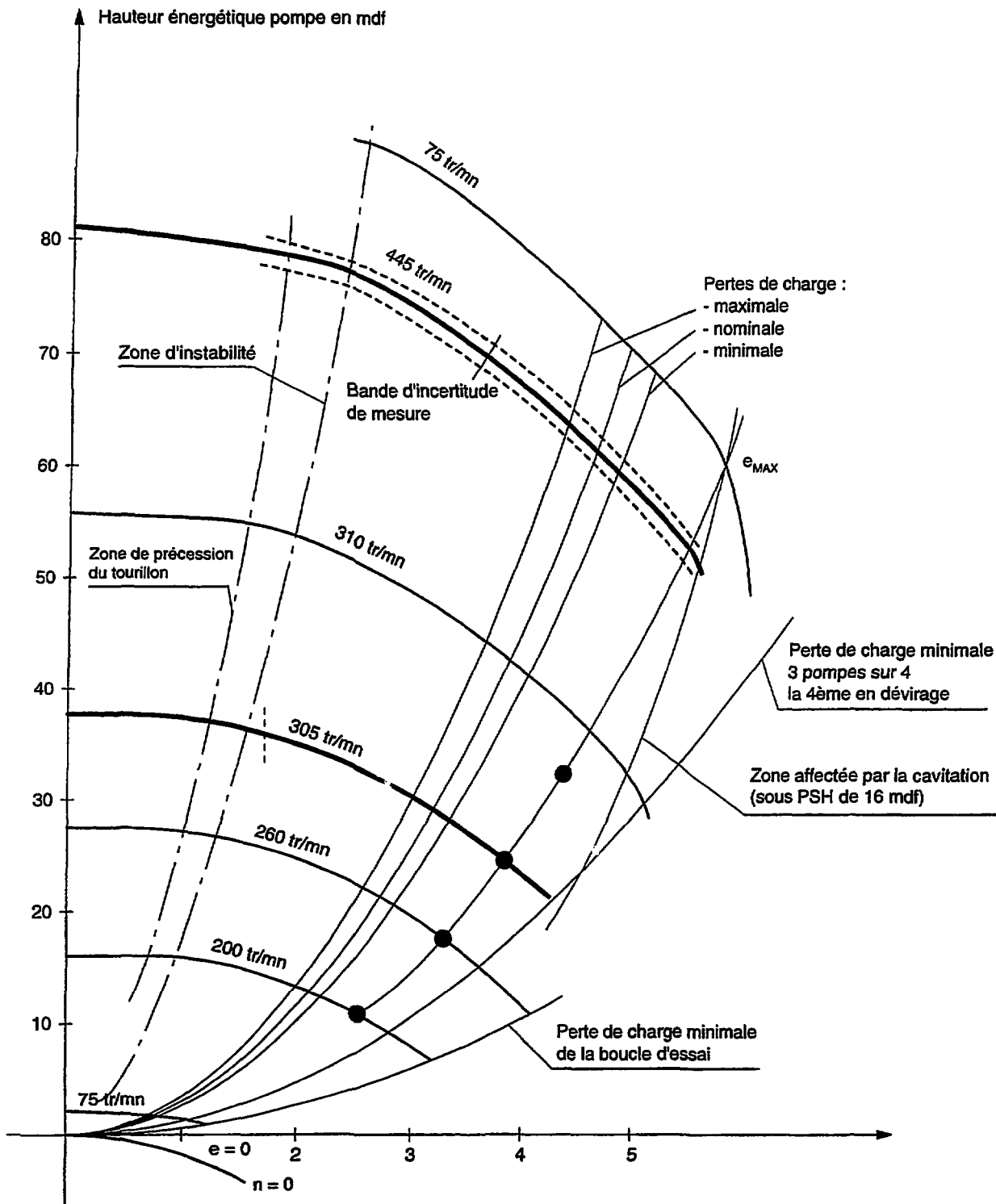


Figure 3 - Courbes caractéristiques

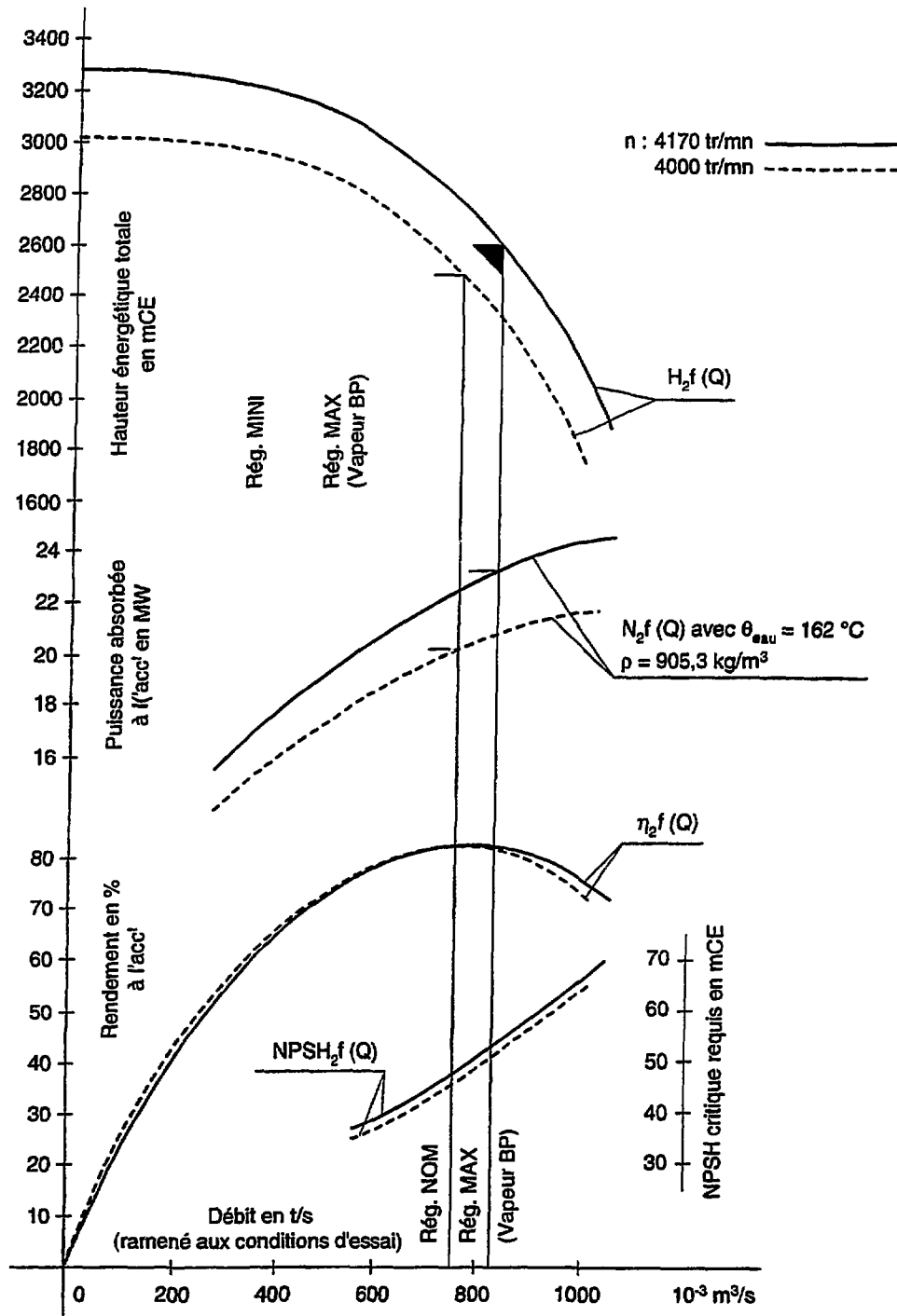


FIGURE 4

CREI 4101 407 QT 9001/C

Fiche B - Figure 2

