IC/95/384

INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

EQUIVALENCE TOPOLOGIE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES NONLINÉAIRES AUTONOMES

Nguyên Huỳnh Phán

and

Trân Van Nhung

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY

UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION

MIRAMARE-TRIESTE

IC/95/384

International Atomic Energy Agency
and
United Nations Educational Scientific and Cultural Organization
INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

EQUIVALENCE TOPOLOGIE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES NONLINÉAIRES AUTONOMES[1]

Nguyên Huỳnh Phán[2]
International Centre for Theoretical Physics, Trieste 34100, Italy

and

Trân Van Nhung
Département de Relation Internationale,
Ministère d'Education et de Formation, Vietnam.

ABSTRACT

We show in this paper that the autonomous nonlinear dynamical system $\Sigma(A,B,F)$: $x' = Ax+Bu+F(x)$ is topologically equivalent to the linear dynamical system $\Sigma(A,B,O)$: $x' = Ax+Bu$ if the projection of A on the complement in $\mathbb{R}^n$ of the controllable vectorial subspace is hyperbolic and if lipschitz constant of F is sufficiently small (*) and F(x) = 0 when $||x||$ is sufficiently large (**). In particular, if $\Sigma(A,B,O)$ is controllable, it is topologically equivalent to $\Sigma(A,B,F)$ when it is only that F satisfy (**).

MIRAMARE – TRIESTE
December 1995

[1]Submitted to Kodai Journal of Mathematics.
[2]Permanent address: Ecole Normale Supérieure de Vinh, Nghe An, Vietnam.

1 Exposition des Résultats

La terminologie " *équivalence topologique*" dans la théorie géométrique des systèmes dynamiques est utilisée dans un sens large pour désigner une classification des objets quelconques des systèmes dynamiques en employant des homéomorphismes entre des espaces d'états. Ces objets peut être tres divers : Des flots (voir exemple [1] , [9] , [11]) , des trajectoires (voir exemple [5] , [7] , [12] , [17]) , des endomorphismes linéaires (voir exemple [10]) , des systèmes dynamiques discrets (voir exemple [14]) , des familles d'orbites non bornées (voir exemple [13]) , des rotations periodiques dans un espace euclidien (voir exemple [10]), ect... .

Dans cet article nous usons la conception "équivalence toplogique" des systèmes dynamiques au sens suivant

1.1 Définition

Soient $X_i \quad, i = 1,2$ deux espaces topologiques et soient $T_i \subseteq \{x : \mathbb{R} \to X_i\}$. Les T_i peuvent être considérer comme des familles de trajectoires appliquant l'axe du temps $\mathbb{R}$ dans les espaces des phases X_i. On dira que T_1 et T_2 sont topologiquement équivalents et on notera par $T_1 \stackrel{\mathcal{T}}{\sim} T_2$ s'il existe un homéomorphisme $\mathcal{T} : X_1 \to X_2$ échangant les trajectoires de T_1 et T_2 . C'est-à-dire que $x \in T_1 \Leftrightarrow \mathcal{T}x \in T_2$ où $\mathcal{T}x(t) = \mathcal{T}(x(t))$. Si de plus les X_i sont des espaces vectoriels et $\mathcal{T}$ est un isomorphisme linéaire , on dira que T_1 et T_2 sont linéairement équivalents et on notera par $T_1 \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} T_2$.

Soit $\Sigma(A,B,F)$ un système dynamique nonlinéaire autonome (ou système , système dynamique , tout court) donné par : $\Sigma(A,B,F) : x'(t) := \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)+Bu(t)+F(x(t))$. Ici $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sont deux applications linéaires (ou en d'autres termes , elles sont deux matrices réelles) et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application nonlinéaire .

Un tel système s'identifie avec la famille de ses trajectoires , i. e. :

$$\Sigma(A,B,F) \equiv \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n ; \exists\, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m ; \textit{telle que} : x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + F(x(t))\}.$$

Il est clair que $\Sigma(A,O,O) \subset \Sigma(A,B,O)$ et $\Sigma(A,O,F) \subset \Sigma(A,B,F)$ pour tout B (si l'on prend $u \equiv 0$).

1.2 Définition

Deux systèmes $\Sigma_i := \Sigma_i(A,B,F)$ sont dits *topologiquement équivalents* (resp. *linéairement équivalents*) si $\Sigma_1 \stackrel{\mathcal{T}}{\sim} \Sigma_2$ (resp. $\Sigma_1 \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \Sigma_2$) .

On a proposé beaucoup de définitions différentes d'équivalence topologique (voir exemple [15]). La définition introduite précedement désigne simplement que deux systèmes dynamiques sont tpologiquement équivalents si et seulement si leurs orbites peuvent transformées l'un à l'autre en changant nonlinéairement les "coordonnées" .

Au sens de cette définition lorsque $X = \mathbb{R}^n$, le probème de classification topologique des systèmes dynamiques des formes $\Sigma(A,B,F)$ a été résolu dans quelques cas particuliers

. Plus clairement , quand $F \equiv O$ et $B \equiv O$ les travaux de Arnold [1] , de Kuiper [9] et de Ladis [11] permerttent de classer complètement l'équivalence topologique des flots $\Sigma(A,O,O)$. Quand $B \equiv O$ Hartman [7] et Grobman [5] ont donnés des conditions nécessaires pour que des systèmes de formes $\Sigma(A,O,F)$ soient localement topologiquement équivalents . Quand $F \equiv O$ Willems [17] a donné un critère nécessaire et sufisant pour que deux systèmes linéaires controllables de formes $\Sigma(A,B,O)$ soient topologiquement équivalents .

Dans cet article nous examinons l'équivalence topologique des systèmes pour les cas $B \neq O$ et $F \neq O$. Plus précisément , nous chercherons des conditions pour lesquelles un système dynamique nonlinéaire $\Sigma(A,B,F)$ est topologiquement équivalent au système linéaire $\Sigma(A,B,O)$ défini par sa partie linéaire . Dans ce but, nous supposons toujours que F est *lipschitzienne* , F(o) = O et en plus, F(x) = O lorsque la norme $||x||$ est *suffisamant grande* . La dernière hypothèse est acceptable parce que F peut se considérer comme une perturbation nonliéaire du système lineaire $\Sigma(A,B,O)$, ou comme un reste d'un développement de Taylor dont la partie linéaire est A .

Soit $\Sigma(A,B,F)$ donné . Notons par $\mathcal{B}$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de la matrice B . Posons $\mathcal{R}^i := \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \ldots + A^{i-1}\mathcal{B}$ ($\mathcal{R}^1 := \mathcal{B}, \mathcal{R}^{n-1} := \mathcal{R}$). $\mathcal{R}$ est dit *le sous-espace vectoriel controllable* du système linéaire $\Sigma(A,B,O)$. Parce que $\mathcal{R}$ est A-invariant , on peut définir $\bar{A}$ comme dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ P\downarrow & & \downarrow P \\ \mathbb{R}^n/\mathcal{R} & \xrightarrow{\bar{A}} & \mathbb{R}^n/\mathcal{R} \end{array},$$

où P est la projection naturelle . Alors $\bar{A}$ est simplement la projection de A sur la partie noncontrollable du système $\Sigma(A,B,O)$.

Les résultats principaux que nous obtenons dans cet article sont les suivants

1.3 Théorème

1.3.1 T.I

Si $\bar{A}$ est hyperbolique (i. e. les parties réelles des tous les valeurs propres de $\bar{A}$ sont différentes de zéro), alors $\Sigma(A,B,F) \stackrel{\mathcal{I}}{\sim} \Sigma(A,B,O)$ lorsque la constante de lipschitz de F est suffisament petite .

1.3.2 T.II

Si $\bar{A} \equiv O$, c'est-à-dire que $\Sigma(A,B,O)$ est un système coutrollable , alors $\Sigma(A,B,F) \stackrel{\mathcal{I}}{\sim} \Sigma(A,B,O)$ (on suppose seulement que F(x) = 0 lorsque $||x||$ est suffisament grande) .

Donc on peut dire mécaniquement que si le système $\Sigma(A,B,O)$ est controllable, alors toute perturbation nonlinéaire dans un voisinage de rayon suffisamant grand, ne change pas les comportements topologiques de ses orbites .

La démonstration du Théorème 1.3 sera présentée dans le paragraphe ci-dessous

2 Preuve

D'abord nous annonçons le résultat suivant qui donne encore un critère d'équivalence topologique entre $\Sigma(A,B,F)$ et $\Sigma(A,B,O)$.

2.1 Sous-Théorème

Si A est hyperbolique alors $\Sigma(A,B,.F) \stackrel{\mathcal{I}}{\sim} \Sigma(A,B,O)$ lorsque la constante de lipschitz de F est suffisamant petite .

Preuve du Sous-Théorème : On construit un homéomorphisme $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définissant une équivalance topologique entre $\Sigma(A,B,F)$ et $\Sigma(A,B,O)$ de la façon suivante :
Soit $J = [J^+|J^-]$ la forme de Jordan de A où J^+ comprend les blocks de Jordan associés aux valeurs propres à partie réelle positive et J^- comprend ceux à partie réelle négative. Soit $[J^+(t)|J^-(t)]$ une matrice fondamantale de solutions du flot

$$x'(t) = Ax(t) \text{ , c'est-à-dire } [J^+(t)|J^-(t)] = e^{Jt}.$$

Posons $M(t) = [O|J^-(t)]$ et $P(t) = [J^+(t)|O]$. On sait qu'il existe des constantes positives $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ telles que

$$||M(t)|| \le \mathcal{N}e^{-\mathcal{M}t} \; pour\ tout\ t \ge 0 \tag{1}$$

$$||P(t)|| \le \mathcal{N}e^{\mathcal{M}t} \; pour\ tout\ t \le 0 \tag{2}$$

où $||.||$ est la norme euclidienne .

Soit x_o un point arbitraire dans $\mathbb{R}^n$ et soit $x(x_o,t) \in \Sigma(A,B,F)$, c'est-à-dire qu'elle est une solution de

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + F(x(t)) \; vérifiant \; x(x_o,0) = x_o.$$

Définissons maintenat $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par :

$$\mathcal{T}(x_o) = x_o + \int_{-\infty}^{0} M(-t)F(x(x_o,t))\,dt + \int_{0}^{+\infty} P(-t)F(x(x_o,t))\,dt, \tag{3}$$

Nous remarquons d'après (1) (2) et le fait que F(x) est lipschitzienne satisfaisant F(x) = O pour $||x|| \ge C$ que les intégrales (3) sont bien définies .

La preuve du Sous-Théorème découle des quatre lemmes suivants

2.1.1 Lemme

Si $x \in \Sigma(A,B,F)$ alors $\mathcal{T}(x) \in \Sigma(A,B,O)$

Preuve : Soit $x(x_o,t)$ une solution de

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + F(x(t)) \; vérifiant \; x(x_o,0) = x_o, \tag{4}$$

Soit $\mathcal{T}(x_o) = y_o$ et soit $y(y_o, t)$ une solution de

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \ v\acute{e}rifiant \ y(y_o, 0) = y_o, \tag{5}$$

C'est-à-dire $y(y_o, t) \in \Sigma(A, B, O)$.

Parce que la formule

$$\bar{y}(y_o, t) = x(x_o, t) - \int_{-\infty}^{t} M(t-\tau)F(x(x_o, \tau))\, d\tau + \int_{t}^{\infty} P(t-\tau)F(x(x_o, \tau))\, d\tau, \tag{6}$$

est aussi une solution de (5) satisfaisant $\bar{y}(y_o, 0) = y_o$, le Théorème d'unicité entraine que $y(y_o, t) \equiv \bar{y}(y_o, t)$. Soit x_1 un point arbitraire appartenant à l'orbite de $x(x_o, t)$; $x_1 = x(x_o, t_1)$, alors $x(x_1, \tau) = x((x_o, t_1), \tau) = x(x_o, t_1 + \tau)$. Posons $t_1 + \tau = w$. Nous obtenons

$$\mathcal{T}(x_1) = \mathcal{T}(x(x_o, t_1)) = x(x_o, t_1) - \int_{-\infty}^{t_1} M(t_1 - w)F(x(x_o, w))\, dw + \int_{t_1}^{+\infty} H(t_1 - w)F(x(x_o, w))\, dw, \tag{7}$$

Donc $y_1 := \mathcal{T}(x_1)$ est un point de l'orbite de $y(y_o, t)$. Par ailleur , $\{y(y_o, t)\} = \{y(y_1, t)\}$, d'où $\mathcal{T}(x(x_o, t)) = y(y_o, t)$. Le Lemme est prouvé .

2.1.2 Lemme

Si la constante de lipschitz ξ de F est suffisamant petite , par exemple $2\xi < \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}}$, alors $\mathcal{T}$ est injective .

Preuve : Supposons au contraire qu'il existe $x_1 \neq x_2$ tels que $\mathcal{T}(x_1) = \mathcal{T}(x_2) := y_1$. Soient $x(x_1, t), x(x_2, t) \in \Sigma(A, O, F) \subset \Sigma(A, B, F)$ satisfaisant $x(x_1, 0) = x_1, x(x_2, 0) = x_2$, c'est-à-dire qu'ils sont les solutions de $x'(t) = Ax(t) + F(x(t))$. On a d'après le Lemme 2.1.1 que $\mathcal{T}(x(x_1, t)) = \mathcal{T}(x(x_2, t)) := y(y_1, t) \in \Sigma(A, O, O)$, c'est-à-dire $y(y_1, t)$ est une solution du flot $y'(t) = Ay(t)$ *vérifiant* $y(y_1, 0) = y_1$. Comme A est hyperbolique, $||y(y_1, t)|| \to +\infty$ lorsque $||t|| \to +\infty$.

Distingnons les deux cas suivants : $||y(y_1, t)|| \to +\infty$ lorsque $t \to \infty$ et $||y(y_1, t)|| \to +\infty$ lorsque $t \to -\infty$.

Cas 1 : $||y(y_1, t)|| \to \infty$ lorsque $t \to +\infty$. D'après (1) ,(2) ,(3), (7) et $F(x) = O$ lorsque $||x|| \geq C$ on a

$$||x(x_1, t)|| - \frac{2\mathcal{N}C\xi}{\mathcal{M}} \leq ||y(y_1, t)|| \leq ||x(x_1, t)|| + \frac{2\mathcal{N}C\xi}{\mathcal{M}} \tag{8}$$

et

$$||x(x_2, t)|| - \frac{2\mathcal{N}C\xi}{\mathcal{M}} \leq ||y(y_1, t)|| \leq ||x(x_2, t)|| + \frac{2\mathcal{N}C\xi}{\mathcal{M}}. \tag{8'}$$

Donc $||x(x_1, t)|| \to \infty$ et $||x(x_2, t)|| \to \infty$ lorsque $||t|| \to \infty$. On en déduit qu'il existe $T > 0$ tel que $F(x(x_1, t)) = F(x(x_2, t)) = 0$ lorsque $t \geq T$.

Comme

$$\mathcal{T}(x(x_1, t)) = \mathcal{T}(x(x_2, t)) \ alors \ ||x(x_1, t) - x(x_2, t)|| =$$

$$|| \int_{-\infty}^{t} M(t-w)[F(x(x_1, w)) - F(x(x_2, w))]\, dw + \int_{t_1}^{+\infty} P(t-w)[F(x(x_1, w)) - F(x(x_2, w))]\, dw||, \tag{9}$$

Comme $F(x(_i, t)) = 0, i = 1, 2$ lorsque $t > T$ on a $v(t) := ||x(x_1, t)) - x(x_2, t))|| \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Par ailleur , $x_1 \neq x_2$, on en déduit que $v(t)$ atteint son maximum sur l'intervalle $[\ T, +\infty)$. Supposons $m = maxv(t) = v(t_o), t_o \in [\ T\ , \infty)$. Comme F est lipschitzienne on a d'après (1), (2) , (8) et (9) que

$$m = v(t_o) \leq \xi|| \int_{-T}^{t_o} M(t-w)v(_o)\, dw + \int_{t_o}^{+T} P(t-w)v(t_o)\, dw|| \leq$$

$$\leq m\xi|| \int_{-\infty}^{t_o} \mathcal{N}e^{-(t_o - w)\mathcal{M}}\, dw + \int_{+\infty}^{t_o} \mathcal{N}e^{(t_o - w)\mathcal{M}}\, dw|| \leq m\xi\frac{2\mathcal{N}}{\mathcal{M}}. \tag{10}$$

Par conséquence $m \leq 2m\xi\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}$. Alors $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}} \leq 2\xi$. Ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse $2\xi < \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}}$.

Cas 2 : Par la même méthode , nous arriverons à une contradiction pour le cas où $||y(y_1, t))|| \to \infty$ lorsque $t \to -\infty$. Le Lemme est prouvé.

2.1.3 Lemme

Si la constante de lipschitz ξ est suffisamant petite (par exemble $2\xi < \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}}$) , $\mathcal{T}$ est un homéomorphisme .

Preuve : Nous prouvons d'abord que $\mathcal{T}$ est continue. Soit $\mathbb{R}^n \supset \{x_n\} \to x*$ une suite convergente . On a
$M(-t)F(x(x_n, t)) \longrightarrow M(-t)F(x(x*, t))$ et $P(-t)F(x(x_n, t)) \longrightarrow P(-t)F(x(x*, t))$ lorsque $t \to \infty$. Il en résulte , en utilisant les inégalités (8) et (8') que

$$\mathcal{T}(x_n) = x_n - \int_{-\infty}^{0} M(-w)F(x(x_n, w))\, dw + \int_{0}^{+\infty} P(-w)F(x(x_n, w))\, dw, \tag{11}$$

tend vers

$$x* - \int_{-\infty}^{0} M(-w)F(x(x*, w))\, dw + \int_{0}^{+\infty} P(-w)F(x(x*, w))\, dw = \mathcal{T}(x*). \tag{12}$$

Nous montrons maintenant que $\mathcal{T}$ est une application ouverte . Soit $\mathbb{B}$ une boule fermée dans $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathcal{T}$ est une injective continue , $\mathcal{T} : \mathbb{B} \to \mathcal{T}(\mathbb{B})$ est un homéomorphisme. Soit x_o un point intérieur de $\mathbb{B}$, alors $\mathcal{T}(x_o) := y_o$ est aussi un point intérieur de $\mathbb{B}$. En effet, si au contraire y_o appartient au bord de $\mathcal{T}(\mathbb{B})$, il existe une suite $\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{T}(\mathbb{B}) \supset \{y_n\} \to y_o$ lorsque $n \to \infty$. Donc il existe $b > 0$ tel que $||y_n|| \leq b$ quand $n > N$. Posons $x_n = \mathcal{T}^{-1}(y_n)$. Nous trouvons d'après (1),(2) (3) et (8) que $||x_n|| - \frac{2\mathcal{N}C\xi}{\mathcal{M}} \leq ||\mathcal{T}(x_n)|| = ||y_n|| \leq b$ quand $n > N$. Alors il existe une sous-suite $x_n \supset x_{n_k} \to x*$ car $\{x_n\}$ est bornée . Comme $\mathcal{T}$ est injective et comme $y_n \notin \mathcal{T}(\mathbb{B})$, $x_{n_k} \notin \mathbb{B}$. Par ailleur , $\mathbb{B}$ est fermée , alors $x* \notin \mathbb{B}$. Cet résultat entraine que $x_o \neq x*_o$. Cependant $\mathcal{T}(x_{n_k}) = y_{n_k} \to \mathcal{T}(x*)$ et $y_{n_k} \to y_o$ lorsque $n \to \infty$. Donc $\mathcal{T}(x*) = \mathcal{T}(x_o) = y_o$. C'est une contradiction car $\mathcal{T}$ est injective.

Nous prouvons enfin que $\mathcal{T}$ est surjective . $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ est un ensemble ouvert car $\mathcal{T}$ est une application ouverte. C'est pourquoi il suffit de montrer que $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ est fermé . Supposons $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \supset \{y_n\} \to y_o$ une suite convergente . Si $y_o \notin \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$, un raisonnement analogue au précedent fait apparaître une contradiction . La preuve du Lemme est alors achevé .

2.1.4 Lemme

Si $y \in \Sigma(A, B, O)$ alors $\mathcal{T}^{-1}(y) \in \Sigma(A, B, F)$

Preuve: En effet , soit $y(y_o, t)$ une solution de $y'(t) = Ay(t)+Bu(t)$ *vérifiant* $y(y_o, 0) = y_o$. Posons $\mathcal{T}^{-1}(y_o) = x_o$ et $\mathcal{T}^{-1}(y(y_o, t)) = z(t)$. Soit $x(x_o, t)$ une solution de $x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + F(x(t))$ *vérifiant* $x(x_o, 0) = x_o$. Supposons qu'il existe $t* \in \mathbb{R}$ tel que $z(t*) \neq x(x_o, t*)$. D'après le Lemme 2.1.1 on a $\mathcal{T}(x(x_o, t*)) = y(y_o, t*)$. Donc $\mathcal{T}^{-1}(y(y_o, t*)) = x(x_o, t*) = z(t*)$. C'est une contradiction car $\mathcal{T}$ est un homéomorphisme. Enfin , il est claire que pour tout $x_1 \in \{x(x_o, t)\}$ il existe toujours $y_1 \in \{y(y_0, t)\}$ tel que $\mathcal{T}^{-1}(y_1) = x_1$. Ainsi que $\mathcal{T}^{-1}(y(y_o, t)) = x(x_o, t)$. Le Lemme est prouvé .

La preuve du Sous-Théorème 2.1 est complètement achèvé .

2.2 Preuve du Théorème 1.3

Pour la suite on a besoin des résultasts suivants

2.2.1 Lemme

Pour toute $(S, K, T) \in GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m\times n} \times GL(m, \mathbb{R})$ on a

$$\Sigma(A, B, F) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Sigma(S(A + BK)S^{-1}, SBT, SF).$$

Preuve : En effet, on a d'abord que

$$x \in \Sigma(A, B, F) \Longleftrightarrow x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + F(x(t)) \Longleftrightarrow$$

$$x'(t) = (A + BK)x(t) + BT[T^{-1}u(t) - T^{-1}Kx(t)] + F(x(t)) \Longleftrightarrow x \in \Sigma(A + BK, BT, F).$$

Donc $\Sigma(A, B, F) = \Sigma(A + BK, B, F)$.

En suite , pour toute $S \in GL(n, \mathbb{R})$ on a $\Sigma(A, B, F) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Sigma(SAS^{-1}, SB, SF)$ par l'isomorphisme linéaire S : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, parce que $x \in \Sigma(A, B, F) \Longleftrightarrow x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + F(x(t))$
$\Longleftrightarrow Sx'(t) = (Sx(t))' = SAS^{-1}Sx(t) + SBu(t) + SF(x(t)) \Longleftrightarrow Sx \in \Sigma(SAS^{-1}, SB, SF)$.
D'où le résultat. Le Lemme est prouvé.

2.2.2 Lemme

Si $dim\mathcal{R} = h$; $0 < h \leq n$ et $dim\mathcal{B} = l$; $0 < l \leq m$ (voir la Définition 1.2) , alors il existe $(S, K, T) \in GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m\times n} \times GL(m, \mathbb{R})$ telles que $(S(A + BK)S^{-1}, SBT)$ est de la forme:

$$(\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}),$$

où $(A_1, B_1) \in (\mathbb{R}^{h\times h} \times \mathbb{R}^{h\times l})$ satisfaisant $\dim [B_1, A_1B_1, \ldots, A_1^{h-1}B_1] = h$, et A_1 est hyperbolique .

Preuve: Comme $\mathcal{R}$ est un sous-espace vectoriel A-invariant, il existe $(S, T) \in GL(n, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R})$ telles que (SAS^{-1}, SBT) est de la forme :

$$(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix}),$$

où $(A_{11}, B_{11}) \in \mathbb{R}^{h\times h} \times \mathbb{R}^{h\times l}$ satisfaisant dim [$B_{11}, A_{11}B_{11}, \ldots, A_{11}^{h-1}B_{11}$] $= h$. Donc il existe $K_1 \in \mathbb{R}^{l\times h}$ telle que tous les valeurs propres de la matrice $(A_{11} + B_{11}K_1)$ sont différentes de celles de la matrie A_{22} (voir [18] Théorème 2.1 , p. 48). Utilisant cette remarque, on peut trouver (c.f [4] , VIII , 3 , p. 225) $(S, K') \in GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m\times n}$ telles que

$$(S(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix} K')S^{-1}, S(\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix})$$

est de la forme

$$(\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}).$$

où (A_1, B_1) satisfait les conditions du Lemme 2.2.2 . Le Lemme est prouvé .

On prouve maintenant le Théorème 1.3 . D'après les Lemmes 2.2.1 et 2.2.2 on a

$$\Sigma(A, B, F) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Sigma(\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \bar{F}),$$

où $\bar{F} = SF$ $(S \in GL(n, \mathbb{R}))$ est aussi lipschitzienne et sa constante est suffisamant petite quand celle de F est suffisamant petite . En plus , comme A_1 et A_2 sont hyperboliques , d'après le Sous-théorème et les Lemmes 2.2.1 , 2.2.2 on a

$$\Sigma(\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \bar{F}) \overset{\mathcal{T}}{\sim} \Sigma(\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, O) \overset{\mathcal{T}}{\sim} \Sigma(A, B, O).$$

Le (T.I) est prouvé .

Rappelons que nous avons montré dans la preuve du Sous-Théorème que si la constante de lipschitz ξ satisfaisant $2\xi < \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}}$, où $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ dépendent des parties réelles des valeurs propres de A, et si F(x) = 0 lorsque $||x|| \geq C$, alors $\Sigma(A, B, F) \overset{\mathcal{T}}{\sim} \Sigma(A, B, O)$.

Quand $\Sigma(A, B, O)$ est controllable, on sait que pour toute collection Λ de n nombres complexes de la forme $\Lambda := \{a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, \bar{b}_1, \ldots, b_{\frac{n-l}{2}}, \bar{b}_{\frac{n-l}{2}}\}$, où a_i sont réelles et $\bar{b}_l$ est la conjuguée de b_l , il existe toujours une matrice $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ telle que Λ est l'ensembles des valeurs propres de la matrice A + BK (voir [18] Théorème 2.1) . Par ailleur, $\Sigma(A, B, F) = \Sigma(A + BK, B, F)$, on déduit alors d'après la preuve du Sous-Théorème que $\Sigma(A, B, F) \overset{\mathcal{T}}{\sim} \Sigma(A, B, O)$ si $\Sigma(A, B, O)$ est controllable et F(x) est lipschitzienne satisfaisant F(x) = 0 lorsque $||x|| \geq C$ (nous remarquons que cette équivalance ne dépende plus de la constante de lipschitz de F) . (T.II) est alors prouvé.

La preuve du Théorème 1.3 est achèvé .

Remerciement

Nous reme.cr ns chaleureusemant le Professeur J.-P. Françoise (Universté Pierre- Marie Curie Paris VI) , le Professeur Lê Dũng Tráng (Université de Provence) , le Professeur Jean-Pierre Marco (Université Pierre-Marie Curie Paris Vi) et le Docteur Lê Chí Dũng (Institut d'Energie Atomique , Ha Noi) pour leurs discussions fructueuses sur ce travail. Nous tenons à remercier l'Inernational Centre for Theoretical Physics d'avoir offert au premier de deux auteurs l'hospitalité et les bonnes conditions de travail pendant trois mois .

Bibliographie

[1] V.I.Arnold : Equations Différentielles Ordinaires. Edition Mir-Moscou , 1974 .

[2] R.W.Brockett : The geometry of the set of controllable linear systems. Research Report of Autom. Control Lab. Fac. of Eng. Nagoya Univ. Vol 24, 1-7, 1977.

[3] P.Brunovsky : A classification of linear controllable systems. Kybernetika (Prague), 3, 173-187, 1970.

[4] F.R.Gantmakher : The theory of matrices. New-York-Chelsea, 1959.

[5] D.M.Grobman : Classification toplogique des voisinages des points nonsinguliers dans l'espace de dimension n . Math. Sbornik. $N^0 I$, 72-94, Vol 56, 1962 (en russe).

[6] M.W.Hirsch and S.Smale : Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic press, New-York, Sanfrancisco, London , 1974.

[7] P.Hartman : A lemma in the theory of structural stability of differential equation. Proc. Amer. Math. Soc. 11, 610-622, 1960.

[8] R.E.Kalman : Kronecker invariants and feedback. Ordinary Differential Equations , (L.Weiss ed.), 459-471, Academic Press, New-York, 1972.

[9] N.H.Kuiper : The topological of the solutions of a linear differential equation on $\mathbb{R}^n$. "Manifolds - Tokyo 1973" , 195-205, Proc. of the Inter. Confer. on Manifolds and related topics in Topology . University of Tokyo press , Tokyo 1975.

[10] N.H. Kuiper and J.W.Robbin : Topological classification of linear endomorphisms. Inventiones Mathematicae, 19, 83-106, 1973.

[11] N.N.Ladis : The topological equivalence of linear flows. Differential Equations, 9 , N^0 2, 938-947 (Translated from russian. Russian original Vol.9, N7,1222-1235,1973).

[12] N.N.Ladis : Topological equivalence of linear hyperbolic systems. Differential Equations, 13 N^0 4,176-185, 1977 (Translated from russian. Russian original Vol. 13, N2, 255-264, 1977).

[13] Nguyên Huỳnh Phán and Lê chí Dũng and Trân Van Nhung : Topological equivalence of nonlinear systems . Proc. Congr. 4^{th} Viet Nam . Ha Noi , 1990 .

[14] J.W.Robbin : topological congugacy and structural stability for discrete dynamical systems . Bulltin of the American Mathematical Society , Vol. 18, N6, 923-953, 1972.

[15] S.A.Robertson : Equivalence of dynamical systems . Lecture notes in Mathematics , N0 206 , 127-128 , Springer - Verlag , Berlin Heidelberg-New York , 1971 .

[16] H.H.Rosenbrock : State-space and multivariable theory. Nelson-Edinburgh, 1970.

[17] J.C.Willems : Topological cassification and structural stability of linear systems . J. of Differential Equations, N0 35 , 306-318, 1980.

[18] W.M.Wonham : Linear multivarable control: A geomeric approach. Lecture notes in economics. N101, Spriger Verlag-New-York-Berlin, 1974.

L'adresse avant le 20 Décembre 1995 : International Centre for Theoretical Physic, 34100-Trieste-Italy , Email nhphan@ictp.Trieste.it. L'adresse permanente: Département de Formation Postuniversitaire, Ecole Normale Supérieure de Vinh, Nghe An, Viet Nam.