IC/95/402

INTERNATIONAL CENTRE FOR
THEORETICAL PHYSICS

FORME NORMALE DES SYSTÈMES LINÉAIRES DÉPENDANT DE PARAMÈTRES

Nguyen Huynh Phan

INTERNATIONAL
ATOMIC ENERGY
AGENCY

UNITED NATIONS
EDUCATIONAL,
SCIENTIFIC
AND CULTURAL
ORGANIZATION

MIRAMARE-TRIESTE

IC/95/402

International Atomic Energy Agency
and
United Nations Educational Scientific and Cultural Organization
INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

FORME NORMALE DES SYSTÈMES LINÉAIRES DÉPENDANT DE PARAMÈTRES

Nguyen Huynh Phan[1]
International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

ABSTRACT

In this paper we resolve completely the problem to find normal forms of linear systems depending on parameters for the feedback action that we have studed in [18] for the special case of controllable linear systems.

MIRAMARE – TRIESTE
December 1995

[1]Permanent address: Département de Formation Postuniversitaire, Ecole Normale Supérieure de Vinh, Nghe An, Vietnam.

1 Introduction

Considérons une *action feedback* du groupe s'appellé le groupe des transformations feedback

$$\mathbf{F} := \{\begin{pmatrix} S & F \\ O & T \end{pmatrix} ; (S,K,T) \in GL(n,\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^{m\times n} \times GL(m,\mathbb{K})\}$$

sur l'ensemble de toute paire de matrice $(A,B) \in \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times m}$ définie par:

$$\mathbf{F}\ agit : \begin{pmatrix} S & F \\ O & T \end{pmatrix} \star (A,B) \longmapsto (S(A+BF)S^{-1}, SBT^{-1}),$$

où $\mathbb{K}$ est le corps réel $\mathbb{R}$ ou complex $\mathbb{C}$.

Cette action est induite losqu'on considère simultanément l'intervention de l'état $\mathbf{x(t)}$ à la commande $\mathbf{u(t)}$ et les changements des bases dans l'espace d'état $\mathbb{K}^n$ et l'espace d'entrée $\mathbb{K}^m$ d'un système dynamique linéaire donné par l'équation d'état :

$$x'(t) := \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\ ;\ x\ : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n\ ,\ u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^m \qquad (1.1).$$

Plus précisément,

$$\{x'(t) = Ax(t)+Bu(t)\} \longmapsto \{(Sx)'(t) = S(A+BF)S^{-1}Sx(t)+SBT^{-1}(Tu(t)-TFx(t))\};$$

où $x(t) \mapsto Sx(t)$; $u(t) \mapsto T(u(t)-Fx(t))$. Il est donc $(A,B) \mapsto (S(A+BF)S^{-1}, SBT^{-1})$.

L'application linéaire $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ est dite un *feedback*.

Il se pose la question de savoir à quelle forme simple on peut ramener une paire (A,B) par des changements de coordonnées et par une transformation feedback. C'est-à-dire quelles sont les formes normales pour l'action du groupe **F**.

La théorie des formes normales qui a été due à Poincaré [19] nous indique les formes plus simples auxquelles se transforme une équation différentielle . En appliquant à la théorie des systèmes dynamiques, la notation *forme normale* est employée pour montrer une forme la plus simple possible parmi toute forme d'un objet quelconque. En particulier, dans la théorie des systèmes dynamique linéaires, le problème de trouver des formes normales a été éxaminé par plusieux auteurs. Parmi eux Kalman [4] (1962) a donné en premier la forme normale des système linéaire d'une entrée (e.t. m = 1). Quand $m > 1$, elles ont été données par Langehop [15](1964), Mufti [16](1965), Silverman [22](1966), Tuel [23](1966), Bucy [5] (1968) , Heymann [11] (1970) ..... Toutefois, à cet époque, la terminologie *forme normale* des système linéaire n'a existé que comme une conception mais elle n'a pas encore été définie précisément. Dans des années suivantes, on a aceppté la définition ci-dessous qui a été introduite par Birkhoff et Mac Lane [2] comme une notation standard dans la théorie du côtrol (voir exemple Popov [20](1972), Hinrichsen [12](1987))

1.1 Définition

Soit un group G action sur un ensemble X . Par G , X est dévisé en orbites $[x] = \{s{\star}x \ ; \ s \in G\}$.

Nous appelons *forme normale* (pour l'action de G) une application $\mathcal{N} : X \to X$ satisfaisant:

$$\mathcal{N}(x) \in [x] \ et \ \ \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y) \ \Leftrightarrow x \ et \ y \in [x].$$

Si de plus $\mathcal{N}$ est une application continue, elle est dite une *forme normale continue.*

Par exemple , si $B \equiv O$, la réduction une matrice A à la forme normale de Jordan est une forme normale pour l'action semblable de $GL(n,\mathbb{K})$. Mais cette forme normale n'est pas continue si parmi les valeurs propres de A existent des valeurs propres multiples. En effet, par une petite variation que l'on peut modifier totalement la forme normale de Jordan. Donc malgré deux matrices A et A' sont tres proches et on connait bien déjà les comportements des solution de l'équation différentielle $x'(t) = Ax(t)$ mais peut être on ne déduit pas ceux de l'équation $y(t) = A'y(t)$.

Le problème de construire des formes normales continues a un rôle important dans la théorie d'identification des systèmes (voir exemple [12]). Sur la probabilité de l'existance des formes normales continues pour l'action de F, nous avons le résultat suivant:

1.2 Lemme

Il n'existe pas des forme normales continues sur la totalité $\mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times m}$ pour l'action de F si $max\ \{n, m\} > 1$.

Preuve : En effet, si $\mathcal{N} : \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times m}$ telle forme normale . alors comme la suite

$$(A_o, B_n) = (\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}) \subset \mathbb{K}^{n\times n}\times\mathbb{K}^{n\times m} \ tend \ vers \ (A_o, O),$$

on a $\mathcal{N}(A_o, B_n) = \mathcal{N}(A_o, O)$. Mais c'est impossible car (A_o, B_n) et (A_o, O) n'appartiennent pas à la même orbite . Ce qui achève la preuve.

Du Lemme1.2 nous nous posons deux questions suivantes:

(1) Quelles-sont les formes normales continues locales ?

(2) Quelles-sont les nombres minimals de paramètres indépendants que les formes normales continues locales comportent ? Cette question est nécessaire parce que si une forme normale comporte beaucoup de paramètre, elle est seulement théorie et moin pratique.

Pour trouver des réponses à cettes questions, le Théorème de transversalité de Thom nous donne une idée précieuse, c'est-à-dire qu'il faut étudier non pas chaque paire de

matrice , mais toute une famille de matrices dépendant continuelement de paramètres, parce que l'ensemble des applications d'une variété dans une autre trasversales à une sous-variété fixée forme un ensemble partout dense dans l'espace de tous les applications assez lisses. Donc par une petite déformation, on peut transformer une famille de paires des matrices dépendant continuelement de paramètres non transversable à une orbite de l'action de F en celle transversable orthogonale à cette orbite. Grâce à cela, nous pouvons trouver des formes normales continues locales qui seront présentées plus tard.

Si $B \equiv O$, deux questions ci-dessus ont été résolues par Arnold [1](1972) pour le cas complex et par Galine[9](1972) pour le cas réel. Donc dans cet article, nous soupposons toujours que $B \neq O$.

Notre acticle a deux paragraphes. Dans le premier nous présentons une forme normale pour l'action de F. Puis, nous examinerons dans le deuxième paragraphe des formes normales continues locales en utilisant des déformations verselles orthogonalement aux orbites.

2 Forme Normale pour l'Action Feedback

Ce paragraphe consacre à prouver le résultat suivant

2.1 Proposition

Soit $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$. Alors l'orbite

$$[(A,B)] : = \{(S(A+BF)S^{-1}, SBT^{-1}) \ ; \ \begin{pmatrix} S & F \\ O & T \end{pmatrix} \in \mathbf{F}\}$$

de (A, B) contient exactement une paire (A_o, B_o) de la forme speciale suivante :

$$(A_o, B_o) = (\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}) \ ; \ (A_1, B_1) \ \in \mathbb{K}^{r\times r} \times \mathbb{K}^{r\times l} \ ; \ J = \begin{pmatrix} J(O) & O \\ O & J(\Delta) \end{pmatrix},$$

où J est une matrice de Jordan , J(O) comporte les blocs de Jordan à la valeur propre zéro , $J(\Delta)$ comporte les blocs de Jordan aux valeurs propres $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots\}$ différentes de zéro . De plus

$$(A_1, B_1) = (\begin{pmatrix} A_{c1} & O & O & \dots & O \\ O & A_{c2} & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ O & O & O & O & A_{cl} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{c1} & O & O & \dots & O \\ O & b_{c2} & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ O & O & O & O & b_{cl} \end{pmatrix}) \ ;$$

$$(A_{cj}, b_{cj}) = (\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{k_j\times k_j}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{1\times k_j} \ ; \ j = 1 \ , \ 2 \dots, l \ et \ \sum_{j=1}^{l} k_j = r.$$

Preuve: Supposons que rang $B = l$; $0 < l \le m$ et que rang $[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = r$; $0 < r \le n$. Comme le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de cette matrice de bloc est A-invariant, il existe $(S,T) \in GL(n,\mathbb{K}) \times GL(m,\mathbb{K})$ telles que (SAS^{-1}, SBT^{-1}) est de la forme :

$$\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}\right),$$

où $(A_{11}, B_1) \in \mathbb{K}^{r\times r} \times \mathbb{K}^{r\times l}$ satisfait : le rang$[\ B_1, A_{11}B_1, \dots A_{11}^{r-1}B_1\ ] = r$. On en déduit qu'il existe $F_1 \in \mathbb{K}^{l\times r}$ telle que les valeurs propres de la matrice $A_{11} + B_1F_1$ sont différentes de celles de la matrie A_{22} (c.f. par exemple [24] Théorème 2.1, p. 48 ou [6] Ch.7, Th. 7.3, p. 253). Utilisant cette remarque, on peut trouver (voir [10], VIII, 3, p.225) $(S,F) \in GL(n,\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^{m\times n}$ telles que

$$(S(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} F)S^{-1}, S(\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}))$$

est de la forme

$$\left(\begin{pmatrix} \bar{A}_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{B}_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}\right).$$

Ici $(\bar{A}_1, \bar{B}_1) \in \mathbb{K}^{r\times r} \times \mathbb{K}^{r\times l}$ satisfaisant rang $[\bar{B}_1, \bar{A}_1\bar{B}_1, \bar{A}_1{}^2\bar{B}_1, \dots, \bar{A}_1{}^{r-1}\bar{B}_1] = r$. Donc d'après [24], le Théorème 5.10 , p.122-123 , on peut trouver un triplet $(S_1, F_1, T_1) \in GL(r,\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^{l\times r} \times GL(l,\mathbb{K})$ tel que $\left((S_1\bar{A}_1 + \bar{B}_1F_1)S_1^{-1}, S_1\bar{B}_1T_1^{-1}\right)$ est de la forme (A_1, B_1) comme dans la Proposition 2.1. Enfin, l'unicité de (A_o, B_o) peut démontrer directement. La preuve est achèvée .

Si $r = n$, c'est-à-dire que le système donné par (1.1) est controllable, il n'existe pas la partie de la forme de Jordan J dans la forme normale (2.1). Dans ce cas le problème de trouver des formes normales des systèmes linéaires dépendant de paramètres a été étudié dans [18].

3 Déformation et Forme Normale Continue Locale

Dans ce paragraphe nous supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Rappelons les notations suivantes qui sont essentiellement introduites par Arnold [1] et qui ont été abordées dans N.H.Phan [18].

3.1 Définition

Soit $(A_o, B_o) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ donné. On appellera *déformation de h-paramètres* de (A_o, B_o) le germe au point 0 de l'application holomorphe

$(A,B) : (\mathbb{C}^h, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}, (A_o, B_o))$. $\mathbb{C}^h$ est dit *l'espace de paramètre.* En particulier, soit $\varphi : (\mathbb{C}^q, 0) \to (\mathbb{C}^h, 0)$ une application holomorphe, alors la déformation $(A\varphi(y), B\varphi(y))$ est dite une *déformation induite* par (A,B).

Notons par

$$\Lambda(A_o, B_o) := \{(A,B) : (\mathbb{C}^h, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}, (A_o, B_o))\}$$

l'ensemble des déformations de h-paramètres de (A_o, B_o) ; $h \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathbf{F}(\Lambda)$ le groupe des transformations beedback dépendant de paramètres, c'est-à-dire qu'il est l'ensemble des germes des applications holonorphes :

$$\mathbf{F}(\Lambda) = \{(\begin{pmatrix} S & F \\ O & T \end{pmatrix} : (\mathbb{C}^h, 0) \longrightarrow (GL(n,\mathbb{C}), I_n) \times (\mathbb{C}^{m\times n}, 0) \times (GL(m,\mathbb{C}), I_m)\}.$$

Rappellons que deux déformations $(A,B), (A',B') \in \Lambda(A_o, B_o)$ est dites *équivalentes feedback* s'il existe

$$\begin{pmatrix} S & F \\ O & T \end{pmatrix} \in \mathbf{F}(\Lambda) \text{ telle que } (A'(y), B'(y)) = \left(S(y)(A(y) + B(y)F(y))S^{-1}(y), S(y)B(y)T(y)^{-1}\right).$$

La déformation $(A,B) \in \Lambda(A_o, B_o)$ est dite une *déformation verselle* si toute autre déformation (A', B') de (A_o, B_o) est équivalente feedback à une déformation induite par (A,B). Si la dimension de l'espace de paramètres d'une déformation (A,B) est la plus minimale possible alors cette déformation est dite la *déformation minimale.* Par exemple la déformation $(X, L) : (\mathbb{C}^{n^2+nm}, 0) \to \left(\mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}, (A_o, B_o)\right)$ donnée par $y \mapsto ((A_o, B_o) + (\tilde{X}\ ,\ \tilde{L}))$ où $\tilde{X}$ dépend à n^2 paramètres et $\tilde{L}$ dépend nm paramètres est une déformation verselle mais elle n'est pas minimale .

En démontrant l'existance des déformations minimales et des déformations verselles, les résultats ci-dessous nous permettent de trouver des formes normale continues locales.

3.2 Théorème

La déformation $(A,B) \in \Lambda(A_o, B_o)$ est une déformation verselle si et seulement si (A,B) transverse à l'orbite $[(A_o, B_o)]$ de (A_o, B_o). C'est-à-dire :

$$(A,B)_*(T_0\mathbb{C}^h) + T_{(A_o,B_o)}[(A_o, B_o)] = \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}.$$

où $(A,B)_*$ est la dérivée de (A,B), T_xM est l'espace vectoriel tangant de M à x.

Donc le nombre minimal de paramètres indépendant d'une déformation de (A_o, B_o) soit égal à la codimension de son orbite.

3.3 Théorème

Soit (A,B) une déformation de paire $(A(y'), B(y'))$; $\mathbb{C}^h \ni y'$ fixé . Alors il existe $\begin{pmatrix} S & F \\ O & T \end{pmatrix} \in \mathbf{F}(\Lambda)$ dépendant holomorphement du paramètres variable dans un voisinage du point y' tel que la déformation $(S(A+BF)S^{-1}, SBT^{-1})$ transverse orthogonalement à l'orbite de la paire $(A(y'), B(y'))$. De plus, on peut choisir (S,F,T) telle que cette déformation est de la forme : $(S(A+BF)S^{-1}, SBT^{-1}) = (A_o, B_o) + (A^\perp, B^\perp)$, où (A_o, B_o) est la forme normale de $A(y'), B(y'))$ présentée dans la Proposion 2.1 et $(A^\perp, B^\perp)$ est l'orthocomplément de l'espace vectoriel tangent $T_{(A(y'),B(y'))}[\left(A(y'), B(y')\right)]$ dans $\mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$. Elle est alors déterminée uniquement. C'est pour quoi elle est une forme normale.

Ici le produit scalaire sur $\mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ défini par $\langle (A',B'), (A,B)\rangle : = trA'A^* + trB'B^*$; $trAA^*$ est la trace de la matrice AA^* et A^* est la conjuiguée de A .

Ensuite, le nombre minimal de paramères d'une forme normale continue locale est donné comme suitvant

3.4 Théorème

Supposons que (A_o, B_o) a la forme normale comme dans 2.1 ; $J = \begin{pmatrix} J(O) & O \\ O & J(\Delta) \end{pmatrix}$.
Rappelons que A_1 est aussi une matrice de Jordan comprenant l blocs de Jordan à la valeur propre zéro et leurs ordres sont respectivement $k_1 \geq k_2 \geq, \ldots \geq k_l; \sum_{j=1}^{l} k_j = r$. Soient $n_1(0) \geq n_2(0) \geq \ldots\ldots \geq n_v(0); \sum_{t=1}^{v} n_i(0) = s$ les ordres de blocs de Jordan de $J(O)$ et $n_1(\delta_i) \geq n_2(\delta_i) \geq \ldots\ldots$, les odres des blocs de Jordan de $J(\delta_i)$ correspondant à la valeur propre δ_i classées par les odres décroisances .

Alors la dimension minimale de l'espace de paramètres d'une déformation verselle (et aussi le nombre minimal des paramètres indépendants d'une forme normale continue locale) est égale à

$$n^2 - \Gamma \ ; \ \Gamma = \left(\sum_{t=1}^{v}(2t-1)n_t(0)\right) + \ldots + \left(n_1(\delta_i) + 3n_2(\delta_i) + 5n_3(\delta_i) + \ldots\right) \ldots + \ldots$$

$$+\left(\sum_{k_j \geq k_i, j,i=1,2,\ldots,l}(k_j - k_i + 1)\right) + s(r-1) + l(m+r).$$

Avant de présenter la démonstration de ces Théorèmes nous avons besoin du Lemme suivant:

3.5 Lemme

Soit $T_{(A_o,B_o)}[(A_o, B_o)]$ l'espace vertoriel tangent à l'orbite $[(A_o, Bo)]$ au point (A_o, B_o). Alors

$$T_{(A_o,B_o)}[(A_o, B_o)] = \{(XA_o - A_oX + B_oF \ , \ XB_o - B_oY) \ ; \ (X, F, Y) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{m\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}\}$$

Preuve du Lemme 3.5 :
Soit $f_* : T_e\mathbf{F} \equiv \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{m\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m} \longrightarrow T_{(A_o,B_o)}[(T_o, B_o)]$
la dérivée au point unité e de $\mathbf{F}$ de l'appication $f : \mathbf{F} \to T_{(A_o,B_o)}[(A_o, B_o)]$ donnée par

$$\begin{pmatrix} S & F \\ O & T \end{pmatrix} \longmapsto \left(S(A_o + B_oF)S^{-1}, SB_oT^{-1}\right).$$

On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$ si les normes $||Xt|| < 1$ et $||Yt|| < 1$, alors les matrices $I_n + Xt$ et $I_m + Yt$ sont inversables . De plus $(I_n + Xt)^{-1} = I_n - Xt + Xt^2 - \ldots$. Donc

$$f\left(\begin{pmatrix} I_n + Xt & Ft \\ O & I_m + Yt \end{pmatrix}\right) = \left((I_n+Xt)(A_o+B_oFt\,)(I_n-Xt+\ldots), (I_n+Xt)B_o(I_m-Yt+\ldots)\right).$$

Il en résulte que $f*|_e\ (X, F, Y) = (XA_o - A_oX + BF \ , XB_o - B_oY)$. Le Lemme est prouvé.

3.6 Preuve des Théorèmes

3.6.1 Preuve du 2.2

Supposons que (A,B) est une déformation de h-paramètres minimale transversale à orbite $[(A_o, B_o)]$ et soit $f : \mathbf{F} \to [(A_o, B_o)]$ définie comme plus haut . Soit E le complément orthogonal de $Kerf_*$ dans l'espace vectoriel tangent $T_e\mathbf{F}$ et soit Z une sous-variété contenant e de $\mathbf{F}$ telle que $T_eZ \equiv E$ (telle sous-variété existe (voir exemple Narasimhan [17], ou Dieudonné [7]). Alors $f_*|_E : E \to T_{(A_o,B_o)}[(A_o, B_o)]$ est un isomorphisme linéaire.

Considérons maintenant l'application holomorphe $\Phi : Z \times \mathbb{C}^h \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times m} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ donnée par $(g, y) \mapsto g \star (A(y), B(y))$ (g agit à (A(y) , B(y))) .

Parce que les dérivées $\partial\Phi/\partial g|_{(e,o)} = f_*|_E$, et $\partial\Phi/\partial y|_{(e,o)} = (A, B)_*|_{(e,o)}$ sont isomorphismes linéaires, alors par le Théorème de la fonction inverse, Φ est un isomorphisme local en point $(e, o) \in Z \times \mathbb{C}^h$. Nous traiterons donc (g, y) comme les coordonnées du point $\Phi(g, y)$. Soit $(A', B') \in \Lambda(A_o, B_o)$ une déformation quelconque de $\mu \in \mathbb{C}^k$. Grâce à Φ nous définissons :

$$\varphi(\mu) := \Pi_2\Phi^{-1}((A'(\mu), B'(\mu)) \ ; \ \varphi : (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{C}^h, 0)$$

$$g(\mu) := \Pi_1\Phi^{-1}(A'(\mu), B'(\mu)) \ ; \ g : (\mathbb{C}^k, 0) \to (Z, e).$$

Ici Π_1 , Π_2 sont les projections de $Z \times \mathbb{C}^h$ sur Z et $\mathbb{C}^h$ respectivement. Nous obtenons alors $(A'(\mu), B'(\mu)) = g(\mu) \star (A\varphi(y), B\varphi(y))$. Ce qui veut dire que (A', B') est équivalent feedback à $(A\varphi, B\varphi)$ qui est induite par (A,B). Donc (A, B) est une déformation verselle.

Maintenant si $(A, B) \in \Lambda(A_o, B_o)$ est une déformation de s-paramètres transversant à l'orbite $[(A_o, B_o)]$. Alors $s \geq h$ et on peut choisir un espace de paramètre $\mathbb{C}^h$ tel que la restriction de (A, B) sur $\mathbb{C}^h$ est une déformation transverselle minimale , elle est alors une déformation verselle . Donc (A, B) est aussi une déformation verselle.

Supposons inversement que $(A, B) \in \Lambda(A_o, B_o)$ est une déformation verselle de p-paramètres . Soit $(X, L) \in \Lambda(A_o, B_o)$ la déformation verselle triviale de $n^2 + nm$-paramètres abordée dans la Définition 3.1 . Comme (A,B) est verselle , il existe $\varphi : (\mathbb{C}^{n^2+nm}, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ et $g : (\mathbb{C}^{n^2+nm}, 0) \to (\mathbf{F}, e)$ telles que $g(y) \star \left((A\varphi(z), B\varphi(z)\right) = (X(z), L(z))$. C'est-à-dire

$$X(z) = S(z)\left(A\varphi(z) + B\varphi(z)F(z)\right)S(z)^{-1},$$

$$L(z) = S(z)B\varphi(z)T(z)^{-1} \ ; \ z \in \mathbb{C}^{n^2+nm}.$$

On a alors

$$X_*|_0 = \partial X/\partial z|_0 = S_*A_o - A_oS_* + B_oF_* + A_*\varphi_*,$$

$$L_*|_0 = \partial L/\partial z|_0 = S_*B_o - B_oT_* + B_*\varphi_*$$

$\big($rappelons que $(S(0), F(0), T(0)) = (I_n, O, I_m)\big)$.

Identifions $(X, L)_*\left(T_0\mathbb{C}^{n^2+nm}\right) \equiv \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$. On en déduit que pour tout $z \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ $\exists\, x \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ tel que

$$z = (X, L)_*(x) = \left(S_*A_o - A_oS_* + B_oF_* + A_*\varphi_* \ , \ S_*B_o - B_oT_* + B_*\varphi_*\right)(x) = \left(A_*\varphi_*(x), B_*\varphi_*(x)\right) + \left(S_*(x)A_o - A_oS_*(x) + B_oF_*(x) \ , \ S_*(x)B_o - B_oT_*(x)\right).$$

Donc $z \in (A, B)_*\left(T_0\mathbb{C}^p\right) + T_{(A_o,B_o)}[(A_o, B_o)]$. Il est alors $(A, B)_*\left(T_0\mathbb{C}^p\right) + T_{(A_o,B_o)}[(A_o, B_o)] = \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$. C'est-à-dire (A,B) est transversale à l'orbite de (A_o, B_o) . Ce qui achève la démonstration du Théorème 3.2 .

3.6.2 preuve du 3.3

Suppose que $y_o \equiv 0$. Prenons une déformation de (A_o, B_o) de la forme $(A_o, B_O)+(A^\perp, B^\perp)$ où $(A^\perp, B^\perp)$ est une famille de paires de matrices dépendant aux paramètres qui forme dans $\mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ le sous-espace vertoriel orthocomplémentaire à l'espace vertoriel tangent de l'orbite de (A_o, B_o) au point (A_o, B_o). Donc $(A^\perp, B^\perp)$ est déterminée uniquement et le nombre des paramètres indépendant de $(A^\perp, B^\perp)$ est égal à la codimension de l'orbite $[(A_o, B_o)]$.

Il est claire que la déformation $(A_o, B_O)+(A^\perp, B^\perp)$ est transversale à l'orbite $[(A_o, B_o))]$. Donc si (A,B) est une déformation de p-paramètres quelconque de (A_o, B_o), grâce au Théorème 2.2 et à Φ on peut choisir un voisinage V de l'origine $0 \in \mathbb{C}^p$ sur lequel il existe une application holomorphe $g : V \to \mathbf{F}$ telle que

$g(y) \star (A(y), B(y)) = \left(S(y)(A(y) + B(y)F(y))S(y)^{-1} ,\ S(y)B(y)T(t)^{-1}\right) = (A_o, B_O) + (A^\perp, B^\perp)$. Cela veut dire que on peut trouver une forme normale continue locale pour l'action de $\mathbf{F}$. Le Théorème 3.3 est prouvé.

3.6.3 Preuve du 3.4

On a d'après le Lemme 3.5 que $dim[(A(y'), B(y'))] = n^2 + nm + m^2 - dimKerf*$. Donc il faut calculer $dimKerf*$ pour savoir sa codimension . Supposons que $(A(y'), B(y'))$ est de la forme normale comme dans la Proposition 2.1 :

$$\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \ ; \ J = \begin{pmatrix} J(O) & O \\ O & J(\Delta) \end{pmatrix}.$$

Soit $(X, F, Y) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$. Partageons chaque matrice X,F,Y en quatre blocs correspondant aux ceux de A_o et B_o :

$$X = \begin{pmatrix} X^{11} & X^{12} \\ X^{21} & X^{22} \end{pmatrix}; X^{11}_{r\times r} , X^{12}_{r\times(n-r)} , \ F = \begin{pmatrix} F^{11} & F^{12} \\ F^{21} & F^{22} \end{pmatrix}; F^{11}_{l\times r} , F^{12}_{l\times(n-r)};$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y^{11} & Y^{12} \\ Y^{21} & Y^{22} \end{pmatrix}; Y^{11}_{l\times l} , Y^{12}_{l\times(m-l)}.$$

Alors (X, F, Y) appartient à $Kerf*$ si et seulement si il satiafait simutanément les conditions ci-dessous :

(1.1) $X^{11}A_1 - A_1X^{11} + B_1F^{11} = O,$

(1.2) $X^{11}B_1 - B_1Y^{11} = O,$

(2) $X^{22}J - JX^{22} = O,$

(3) $B_1Y^{12} = O,$

(4.1) $X^{21}A_1 - JX^{21} = O,$

(4.2) $X^{21}B_1 = O,$

(5) $X^{12}J - A_1X^{12} + B_1F^{12} = O.$

Nous allons résoudre tour à tour de ces équations et grâce à ceci, nous obtiendrons la $dimKerf*$.

Partageons X^{11} et F^{11} en les blocs correspondant aux blocs de A_1 et aux blocs de B_1:

$$X^{11} = \begin{pmatrix} X^{11}_{11} & \dots & X^{11}_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ X^{11}_{l1} & \dots & X^{11}_{ll} \end{pmatrix}_{r\times r} \ ; \ X^{11}_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & {}_{1k_j} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{k_i1} & \dots & x_{k_ik_j} \end{pmatrix}_{k_i\times k_j} \ ; \ i \ , \ j \ = 1, 2, \dots, l.$$

$$F^{11} = \begin{pmatrix} F^{11}_{11} & \dots & F^{11}_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ F^{11}_{l1} & \dots & F^{11}_{ll} \end{pmatrix}_{l\times r} \ ; \ F^{11}_{ij} = (f_{11}, \ \dots, \ f_{1k_j})_{1\times k_j} \ ; \ j = 1, 2, \dots, l.$$

$$Y_{11} = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{l1} & \dots & y_{ll} \end{pmatrix}_{l\times l}.$$

On peut verifier (c.f.N.H.Phan [18]) que X^{11} , F^{11} et Y_{11} sont des solutions de (1,1) et (1.2) si et seulement si X^{11}_{ij} F^{11}_{ij} , y_{ij} sont des formes :

(3.6.3a) Si $k_i > k_j$ alors $X^{11}_{ij} = O_{k_i\times k_j}$, $F^{11}_{ij} = O_{1\times k_j}$, $y_{ij} = 0.$

(3.6.3b) Si $k_j \geq k_i$:

$$X^{11}_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,k_j-ki+1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,k_j-ki+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,k_j-ki+1} \end{pmatrix}; \ i \ , \ j \ = 1, \ 2, \dots, \ l \ ;$$

$$F^{11}_{ij} = (0, \dots, 0, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_j-ki+1}) \ ; \ et \ y_{ij} \ = \ x_{k_ik_j} \ ; \ i \ , j \ = 1 \ , \ 2, \dots, \ l.$$

Ici tous les éléments de X^{11}_{ij} qui se trouvent sur un segment oblique sont égaux et les autres sont zéro. Dons la dimension de l'espace des solutions de (1.1) et (1.2) est égale à

$$\sum_{k_j \geq k_i; i,j=1,2,\dots,l} (k_j - k_i + 1).$$

En suite, parce que J est une matrice de Jordan par blocs des ordres $n_1(0) \geq n_2(0) \geq \dots \geq n_v(0)$ et $\dots, n_1(\delta_i) \geq n_2(\delta_i) \geq \dots \geq \dots$. Donc la dimension de l'espace de matrices commutant avec J est égale à (voir exemple Gantmakher [10] VIII , 2, p. 220-222) :

$$\left(\sum_{t=1}^{v}(2t-1)n_t(0)\right) \ + \ \dots + \ \left(n_1(\delta_i) + 3n_2(\delta_i) + 5n_3(\delta_i) + \dots + (2s-1)n_s(\delta_i) + \dots\right) + \dots$$