COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE
CENTRE D'ETUDES DE LIMEIL-VALENTON
Département de MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Service Mathématiques et Codes Numériques
94195 VILLENEUVE SAINT GEORGES Cedex

CEA - N - 2778

ETUDE MATHEMATIQUE ET IMPLANTATION NUMERIQUE DU MODELE DE VLASOV-DARWIN

***

SONNENDRUCKER E.

Le 1er décembre 1994

1 Introduction

La simulation numérique de certains phénomènes en physique des plasmas, ou plus généralement en électromagnétisme, peut se faire à un coût nettement moindre en utilisant des modèles approchés des équations de Maxwell, comme le modèle quasi-statique, où l'on néglige entièrement les dérivées en temps, ou le modèle de Darwin, où l'on néglige la partie transverse du courant de déplacement dans l'équation d'Ampère.

Cependant, en partant des équations de Maxwell avec des conditions aux limites données, il n'est pas évident de choisir des conditions aux limites sur le modèle approché de façon à obtenir une bonne approximation des équations de Maxwell. Ceci est d'autant plus vrai que l'on passe d'un modèle hyperbolique à des modèles paraboliques qui nécessitent a priori plus de conditions aux limites.

Dans cette note, après avoir présenté le modèle de Darwin, nous allons faire une analyse asymptotique des équations de Maxwell avec des conditions aux limites de conducteur parfait sur une partie du bord, et des conditions aux limites absorbantes de Silver-Müller sur l'autre partie qui nous permettra d'obtenir une formulation variationnelle pour le modèle de Darwin. On verra également que cette formulation du modèle de Darwin est une "bonne" approximation des équations de Maxwell. Comme sous-produit de cette analyse asymptotique nous obtiendrons également une formulation variationnelle pour le modèle quasistatique. Dans la deuxième partie, nous décrirons notre implantation par une méthode d'éléments finis 2D couplée avec une méthode particulaire pour les équations de Vlasov et donneront des résultats numériques permettant de cerner les domaines d'application des différents modèles.

2 Présentation du modèle de Darwin

De nombreux auteurs ont utilisé le modèle de Darwin pour la simulation numérique de plasmas. L'intérêt principal de ce modèle est qu'il élimine la propagation d'ondes électromagnétiques, et donc la contrainte numérique dite CFL, ce qui permet d'utiliser des pas de temps considérablement plus grands et rend ainsi la simulation numérique des phénomènes basses fréquences nettement moins coûteuse.

Il est possible de décomposer le champ électrique $\mathbf{E}$ en deux parties: une partie irrotationnelle, c'est-à-dire de rotationnel nul, que l'on appellera $\mathbf{E}_{irr}$ et une partie solénoidale, c'est-à-dire de divergence nulle, que l'on appellera $\mathbf{E}_{sol}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{irr} + \mathbf{E}_{sol}$$

$$\text{avec } \nabla \times \mathbf{E}_{irr} = 0 \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{E}_{sol} = 0.$$

Notons que comme $\nabla \times \mathbf{E}_{irr} = 0$, il existe une fonction scalaire ϕ telle que $\mathbf{E}_{irr} = -\nabla\phi$.

L'approximation de Darwin consiste à négliger la partie solénoidale du courant de déplacement devant sa partie irrotationnelle dans l'équation d'Ampère :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}_{irr}}{\partial t} + \cancel{\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}_{sol}}{\partial t}}$$

En prenant le rotationnnel de cette équation on obtient

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}$$

qui est une équation elliptique pour $\mathbf{B}$.

Ensuite, connaissant $\mathbf{B}$ on peut calculer $\mathbf{E}_{sol}$ grâce à la loi de Faraday

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{sol} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{B}$$

ce qui donne une équation elliptique pour $\mathbf{E}_{sol}$.

Et finalement, sachant que $\nabla \cdot \mathbf{E}_{sol} = 0$, l'équation $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ nous donne une équation de Poisson sur ϕ

$$-\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Finalement, les équations de Maxwell qui sont hyperboliques ont été remplacées par trois équations elliptiques. On peut également constater que le modèle de Darwin contient encore la loi de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

ce qui n'est pas le cas pour le modèle quasistatique pour lequel ρ et $\mathbf{J}$ peuvent varier indépendamment l'un de l'autre.

Maintenant pour fermer le problème, il reste à introduire des conditions aux limites.

3 Une formulation variationnelle pour les équations de Maxwell

Considérons un ouvert $\Omega \in I\!R^3$ borné, connexe et simplement connexe, de frontière Γ composée de la réunion de Γ_A, frontière absorbante, et Γ_C, frontière conductrice.

Nous allons travailler sur les équations de Maxwell adimensionnées introduites dans [2].

On se donne une densité de charge ρ et une densité de courant $\mathbf{J}$ satisfaisant la relation de conservation de la charge

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ vérifient alors le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} & = & \mathbf{J} \\ \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} & = & 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} & = & \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} & = & 0 \end{array} \right.$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathbf{E} \times \mathbf{n} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_C \\ (\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_A \end{array} \right.$$

et les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{E}|_{t=0} & = & \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{B}|_{t=0} & = & \mathbf{B}_0 \end{array} \right.$$

Afin d'obtenir une formulation variationnelle de ce système, nous allons l'écrire sous la forme, équivalente pour des champs suffisamment réguliers, d'équations du second ordre.

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \tag{2}$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C \tag{3}$$

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_A \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{J} && (5) \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (6) \\
(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{n} &= \mathbf{J} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_C && (7) \\
(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{n} &= \mathbf{J} \times \mathbf{n} + \varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_A && (8)
\end{aligned}
$$

avec les conditions initiales

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}|_{t=0} &= \mathbf{E}_0 && (9) \\
\mathbf{B}|_{t=0} &= \mathbf{B}_0 && (10) \\
\varepsilon \left. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|_{t=0} &= \nabla \times \mathbf{B}_0 - \mathbf{J}_0 && (11) \\
\varepsilon \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|_{t=0} &= -\nabla \times \mathbf{E}_0 && (12)
\end{aligned}
$$

qui sont liées par

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_C && (13) \\
(\mathbf{E}_0 - \mathbf{B}_0 \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_A && (14)
\end{aligned}
$$

Introduisons maintenant les espaces fonctionnels adaptés à ces équations:

$$V_B = \{\mathbf{B} \in L^2(\Omega)^3 \quad \text{tel que } \nabla \times \mathbf{B} \in L^2(\Omega)^3,\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,\ \mathbf{B} \times \mathbf{n} \in L^2(\Gamma_A)^2\}$$

que nous munissons de la norme

$$\mathbf{B} \mapsto \left(\int_\Omega \mathbf{B}^2 \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\nabla \times \mathbf{B})^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_A} (\mathbf{B} \times \mathbf{n})^2 \, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$
\begin{aligned}
V_E = \{\mathbf{E} \in L^2(\Omega)^3 \quad & \text{tel que } \nabla \times \mathbf{E} \in L^2(\Omega)^3,\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\
& \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_C,\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} \in L^2(\Gamma_A)^2\}
\end{aligned}
$$

que nous munissons de la norme

$$\mathbf{E} \mapsto \left(\int_\Omega \mathbf{E}^2 \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\nabla \times \mathbf{E})^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_A} (\mathbf{E} \times \mathbf{n})^2 \, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

Le champ magnétique $\mathbf{B}$ est alors solution du problème variationnel

$$
\left|
\begin{array}{l}
\textit{Trouver } \mathbf{B}(t) \in V_B \textit{ tel que} \\
\varepsilon^2 \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_\Omega \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \, d\mathbf{x} + \varepsilon \dfrac{d}{dt} \int_{\Gamma_A} \mathbf{B} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{n} \, d\sigma + \int_\Omega \nabla \times \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{C} \, d\mathbf{x} \\
\qquad\qquad\qquad = \displaystyle\int_\Omega \mathbf{J} \cdot \nabla \times \mathbf{C} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{C} \in V_B \\
\textit{avec les conditions initiales } (10) \textit{ et } (12)
\end{array}
\right.
$$

Afin d'obtenir pour le champ électrique $\mathbf{E}$ une formulation variationnelle similaire, définie sur l'espace vectoriel V_E et non sur un espace affine, décomposons $\mathbf{E}$ en

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi + \mathbf{E}_{sol}$$

en utilisant la décomposition de $L^2(\Omega)^3$ (cf [1])

$$L^2(\Omega)^3 = M \oplus N$$

avec

$$\begin{aligned} M &= \{\nabla\phi;\ \phi \in H_0^1(\Omega)\} \\ N &= \{\mathbf{F} \in L^2(\Omega)^3;\ \nabla\cdot\mathbf{F} = 0\} \end{aligned}$$

Alors ϕ est l'élément de $H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta\phi = \rho$ et $\mathbf{E}_{sol}$ est solution du problème variationnel suivant

$$\left| \begin{array}{l} \textit{Trouver } \mathbf{E}_{sol}(t) \in V_E \textit{ tel que} \\ \varepsilon^2 \dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\int_\Omega \mathbf{E}_{sol}\cdot\mathbf{F}\,dx + \int_\Omega \nabla\times\mathbf{E}_{sol}\cdot\nabla\times\mathbf{F}\,dx + \varepsilon\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_A} \mathbf{E}_{sol}\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}\times\mathbf{n}\,d\sigma \\ \qquad\qquad = -\varepsilon\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega \mathbf{J}_{sol}\cdot\mathbf{F}\,dx \quad \forall\mathbf{F}\in V_E \\ \textit{avec les conditions initiales } (9) \textit{ and } (11) \end{array} \right.$$

où $\mathbf{J}_{sol}$ est donné par $\mathbf{J}_{sol} = \mathbf{J} - \varepsilon\dfrac{\partial\nabla\phi}{\partial t}$.

Remarque 3.1 Les conditions aux limites physiques étant données sur le champ électrique total, nous faisons ici la décomposition en imposant des conditions aux limites quelconques sur ϕ, qui est en l'occurence nul sur le bord, ce qui est le plus simple. Les conditions aux limites sur $\mathbf{E}_{sol}$ sont ensuite choisies de manière à ce que la somme des deux redonne les conditions aux limites sur $\mathbf{E}$. ■

4 Un problème abstrait

4.1 Présentation du problème

Traitons maintenant un problème abstrait qui nous permettra de trouver des modèles approchés pour $(\mathcal{P}_B)$ et $(\mathcal{P}_\mathcal{E})$.

Considérons V et H deux espaces de Hilbert muni des produits scalaires $((.,.))$ et $(.,.)$, tels que $V \subset H$, l'injection étant continue et dense. Soient a_0 et a_1 deux formes bilinéaires sur V continues, symétriques et positives, telles que la norme $u \mapsto$

$(|u|^2 + a_1(u,u) + a_0(u,u))^{\frac{1}{2}}$ soit une norme sur V équivalente à $v \longmapsto \|u\|$. Soient W et Z les sous-espaces de V définis par

$$W = \{v \in V\ ;\ a_0(v,v) = 0\}; \qquad Z = \{v \in W\ ;\ a_1(v,v) = 0\}$$

On suppose que l'espace V admet les décompositions suivantes orthogonales dans H

$$V = U \oplus W, \quad W = Y \oplus Z \tag{15}$$

On suppose également que $u \longmapsto (a_0(u,u))^{1/2}$ est une norme sur U équivalente à la restriction de la norme de V, et $u \longmapsto (a_1(u,u))^{1/2}$ est une norme sur Y équivalente à la restriction de la norme de V. Nous allons étudier le problème variationnel abstrait $(\mathcal{P})$: *Trouver* $u(t) \in V$ *tel que*

$$\varepsilon^2 \frac{d^2}{dt^2}(u,v) + \varepsilon \frac{d}{dt} a_1(u,v) + a_0(u,v) \ = \ (f,v) + \varepsilon \frac{d}{dt}(g,v) \quad \forall v \in V \tag{16}$$

$$u(0) = u_0 \qquad \frac{du}{dt}(0) = u_1 \tag{17}$$

En supposant que $f \in C^1(0,T;V')$, $g \in C^2(0,T;V')$, $u_0 \in V$ et $u_1 \in H$ pour $T > 0$. La théorie variationnelle classique donne l'existence d'une unique solution u de (16)-(17) telle que $u \in \mathcal{W}(0,T)$, où

$$\mathcal{W}(0,T) = \{v \in C^0([0,T];V),\ \frac{dv}{dt} \in C^0([0,T];H),\ a_1(\frac{dv}{dt},\frac{dv}{dt}) \in L^1(0,T)\}$$

Nous supposerons en outre que les données initiales u_0 et u_1 satisfont

$$\varepsilon(u_1,v) + a_1(u_0,v) = (g(0),v) \quad \forall v \in W \tag{18}$$

4.2 Analyse asymptotique

On cherche la solution u de $(\mathcal{P})$ sous la forme d'un développement asymptotique par rapport au petit paramètre ε de la forme

$$u = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots$$

en supposant que les données admettent un tel développement.

Utilisons d'abord les hypothèses que nous avons faites sur u_0 et u_1. Pour $v \in W$ l'équation (16) devient

$$\varepsilon^2 \frac{d^2}{dt^2}(u,v) + \varepsilon \frac{d}{dt} a_1(u,v) = \varepsilon \frac{d}{dt}(g,v)\ \forall v \in W$$

Une intégration par rapport au temps donne alors

$$\varepsilon\frac{d}{dt}(u,v) + a_1(u,v) = (g,v)\ \forall v \in W \tag{19}$$

car les termes à l'instant $t = 0$ s'éliminent en raison de l'hypothèse (18) faite sur u_0 et u_1.

Reportons maintenant les différents développements de Taylor dans les équations (16) et (19), et identifions les termes de même ordre en ε. Les différents termes du développement de u vérifient alors:

Ordre 0:

$$\begin{aligned} a_0(u^0,v) &= (f^0,v) \quad \forall v \in V \\ a_1(u^0,v) &= (g^0,v) \quad \forall v \in W \\ \frac{d}{dt}(u^0,v) &= (g^1,v) \quad \forall v \in Z \end{aligned}$$

avec la condition initiale $(u^0(0),v) = (u_0^0,v) \quad \forall v \in Z$

Ordre 1:

$$\begin{aligned} a_0(u^1,v) &= (f^1,v) + \frac{d}{dt}(g^0,v) - \frac{d}{dt}a_1(u^0,v) && \forall v \in V \\ a_1(u^1,v) &= (g^1,v) - \frac{d}{dt}(u^0,v) && \forall v \in W \\ \frac{d}{dt}(u^1,v) &= (g^2,v) && \forall v \in Z \end{aligned}$$

avec la condition initiale $(u^1(0),v) = (u_0^1,v) \quad \forall v \in Z$

Ordre k, $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_0(u^k,v) &= (f^k,v) + \frac{d}{dt}(g^{k-1},v) - \frac{d}{dt}a_1(u^{k-1},v) - \frac{d^2}{dt^2}(u^{k-2},v) && \forall v \in V \\ a_1(u^k,v) &= (g^k,v) - \frac{d}{dt}(u^{k-1},v) && \forall v \in W \\ \frac{d}{dt}(u^k,v) &= (g^{k+1},v) && \forall v \in Z \end{aligned}$$

avec la condition initiale $(u^k(0),v) = (u_0^k,v) \quad \forall v \in Z$

Proposition 4.1 *Supposons que les fonctions $f^k, g^k \in C^{m-k}(0,T;V')$ pour $0 \leq k \leq m$, $m \geq 1$ avec*

$$(f^k,v) = 0 \quad \forall v \in W, \quad (g^0,v) = 0 \forall v \in Z. \tag{20}$$

Alors, pour tout $0 \leq k \leq m$, le terme u^k du développement asymptotique de u est défini de manière unique dans $C^{m-k}(0,T;V)$.

Afin de pouvoir avoir des estimations précises pour nos modèles approchés nous introduisons l'énergie associée à notre problème:

$$\mathcal{E}(T,u) = \varepsilon^2 \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \varepsilon \int_0^T a_1\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t}\right) dt + a_0(u,u)$$

4.3 L'approximation d'ordre 1

Nous pouvons maintenant introduire le premier modèle approché du problème $(\mathcal{P})$ que nous construisons de manière à ce que son développement asymptotique en ε soit identique à celui de (16)-(17) à l'ordre 0. Nous appellerons $(\mathcal{Q})$ ce problème, et sa formulation variationnelle est la suivante: *Trouver $u^Q(t) \in V$ tel que*

$$\begin{aligned} a_0(u^Q,v) &= (f,v) \quad \forall v \in V &(21)\\ \varepsilon\frac{d}{dt}(u^Q,v) + a_1(u^Q,v) &= (g,v) \quad \forall v \in W &(22)\\ Pu^Q(0) &= Pu_0 &(23)\end{aligned}$$

où P est la projection orthogonale dans H de V sur W.

Théorème 4.1 *Supposons que $f \in L^2(0,T;V')$ avec*

$$(f,v) = 0 \quad \forall v \in W, \tag{24}$$

$g \in L^2(0,T;V')$ et $u_0^Q \in V$. Alors le Problème (21)-(23) a une unique solution $u^Q \in L^2(0,T;V)$. Si de plus on fait les hypothèses de régularité

$$f,g \in C^2(0,T;H), \quad u_0,u_1 \in V$$

et les hypothèses de compatibilité

$$a_0(u_0,v) = (f(0),v), \quad a_0(u_1,v) = (\frac{df}{dt}(0),v) \quad \forall v \in V \tag{25}$$

alors on a $\sqrt{\mathcal{E}(t,u-u^Q)} \le \varepsilon\, C(T), \quad 0 \le t \le T.$

Remarque 4.1 Les hypothèses faites sur u_0 et u_1 signifient que l'on part d'un problème statique. Ce qui fait que l'on n'a pas besoin d'introduire un correcteur pour les conditions initiales. ■

4.4 L'approximation d'ordre 2

Passons maintenant au modèle approché d'ordre 2 du problème (16)-(17) que nous construisons de manière à ce que son développement asymptotique en ε soit identique à celui de (16)-(17) aux ordres 0 et 1. Notons P l'opérateur de projection orthogonale dans H de V sur W dans la décomposition (15). Nous pouvons alors énoncer le problème $(\mathcal{D})$: *Trouver $u^D(t) \in V$ tel que*

$$\varepsilon^2 \frac{d^2}{dt^2}(Pu^D, Pv) + \varepsilon \frac{d}{dt} a_1(u^D, v) + a_0(u^D, v) = (f, v) + \varepsilon \frac{d}{dt}(g, v) \quad \forall v \in V \quad (26)$$

$$u^D(0) = u_0^D, P\frac{du^D}{dt}(0) = Pu_1^D \quad (27)$$

Théorème 4.2 *Supposons que $f \in C^1(0, T; V')$, $g \in C^2(0, T; V')$, $u_0^D \in V$ et $u_1^D \in H$. Alors il existe un unique $u^D \in \mathcal{W}(0, T)$ solution du problème (26)-(27). Si de plus on fait les hypothèses de régularité*

$$f \in C^4([0, T]; V'),\ g \in C^5([0, T]; V')$$

et les conditions à l'instant $t = 0$

$$a_0(u_0, v) = (f(0), v)\ \forall v \in V,\ \ u_1 = 0,\ \ \frac{d^k f}{dt^k}(0) = 0\ k = 1, 2,\ \ \frac{d^k g}{dt^k}(0) = 0\ k = 1, 2, 3 \quad (28)$$

alors on a

$$\sqrt{\mathcal{E}(t, u - u^D)} \leq \varepsilon^2 C(T), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (29)$$

Si en outre $f = O(\varepsilon)$, alors on a

$$\sqrt{\mathcal{E}(t, u - u^D)} \leq \varepsilon^3 C(T), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (30)$$

Remarque 4.2 Ici encore il faut partir de conditions initiales statiques pour éviter l'introduction un correcteur pour les conditions initiales. ■

5 Application aux équations de Maxwell

Les problèmes $(\mathcal{P}_B)$ et $(\mathcal{P}_\mathcal{E})$ rentrent dans le cadre abstrait de la section précédente avec les formes biliniaires

$$a_0(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \int_\Omega \nabla \times \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{C}\, dx$$

$$a_1(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \int_{\Gamma_A} \mathbf{B} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{n}\, d\sigma$$

et les espaces

$$H = \{\mathbf{C} \in L^2(\Omega)^3;\ \nabla \cdot \mathbf{C} = 0\}$$
$$V = V_\alpha$$
$$W_\alpha = \{\mathbf{C} \in V_\alpha;\ \nabla \times \mathbf{C} = 0\}$$
$$Z_\alpha = \{\mathbf{C} \in W_\alpha;\ \mathbf{C} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_A} = 0\}$$

α étant B ou E.

On a bien les décompositions orthogonales

$$V_\alpha = U_\alpha \oplus Y_\alpha \oplus Z_\alpha$$

grâce au fait que $U_\alpha \subset H^1(\Omega)^3$ sous des hypothèses convenables sur la frontière. De plus, la condition de compatibilité sur les conditions initiales (18) est vérifiée car les équations de Maxwell du premier ordre sont vérifiées à l'instant $t = 0$.

Les résultats que nous allons énoncer dans les sections qui suivent sont alors des conséquences immédiates des résultats abstraits.

5.1 Le modèle quasi-statique

La première proposition donne une formulation variationnelle pour le modèle quasistatique en **B**. On en donne ensuite une interprétation qui donne les conditions aux limites vérifiées par le problème.

Proposition 5.1 *Etant donné* $\mathbf{J} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ *et* $\mathbf{B}_0 \in L^2(\Omega)$ *avec* $\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0$, *il existe un unique* $\mathbf{B}^Q \in L^2(0,T;V_B)$ *solution de:*

$$\int_\Omega \nabla \times \mathbf{B}^Q \cdot \nabla \times \mathbf{C}\,dx = \int_\Omega \mathbf{J} \cdot \nabla \times \mathbf{C}\,dx \quad \forall \mathbf{C} \in V_B \tag{31}$$
$$\varepsilon \frac{d}{dt}\int_\Omega \mathbf{B}^Q \cdot \mathbf{C}\,dx + \int_{\Gamma_A} \mathbf{B}^Q \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{n}\,d\sigma = 0 \quad \forall \mathbf{C} \in W_B \tag{32}$$

où $\mathbf{B}_0$ *est le champ magnétique à* $t = 0$.

Si de plus $\mathbf{B}_0^Q = \mathbf{B}_0$, $\mathbf{J} \in C^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ *et* $\int_\Omega \nabla \times \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{C}\,dx = \int_\Omega \mathbf{J}(0) \cdot \nabla \times \mathbf{C}\,dx$, $\int_\Omega \nabla \times \mathbf{B}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{C}\,dx = \int_\Omega \frac{d\mathbf{J}}{dt}(0) \cdot \nabla \times \mathbf{C}\,dx \quad \forall \mathbf{C} \in V_B$, *alors* $\mathcal{E}(T, \mathbf{B} - \mathbf{B}^Q) \leq C(T)\,\varepsilon$, *où* $\mathbf{B}$ *est le champ magnétique solution de* $(\mathcal{P}_B)$.

Une interprétation de ce problème variationnel donne $\mathbf{B}^Q$ solution du système suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \nabla\times\nabla\times\mathbf{B}^Q &=& \nabla\times\mathbf{J} & \\ \nabla\cdot\mathbf{B}^Q &=& 0 & \\ (\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{n} &=& \mathbf{J}\times\mathbf{n} & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial\mathbf{B}^Q}{\partial t}\cdot\mathbf{n} &=& 0 & \text{sur } \Gamma_C \\ \varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{B}^Q}{\partial t}\cdot\mathbf{n}+\nabla_T\cdot(\mathbf{B}^Q\times\mathbf{n}\times\mathbf{n}) &=& 0 & \text{sur } \Gamma_A \end{array}\right.$$

Où $\nabla_T\cdot$ représente la divergence tangentielle sur Γ.

On peut maintenant faire la même opération sur le champ électrique quasistatique:

Proposition 5.2 *Supposons* $\mathbf{J}\in L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, $\phi_0\in H^1(\Omega)$, *alors il existe un unique* $\mathbf{E}^Q=-\nabla\phi^Q\in L^2(0,T;V_E)$ *solution de*

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\int_\Omega\nabla\phi^Q\cdot\nabla\psi\,d\mathbf{x}+\int_{\Gamma_A}\nabla\phi^Q\times\mathbf{n}\cdot\nabla\psi\times\mathbf{n}\,d\sigma=\int_\Omega\mathbf{J}\cdot\nabla\psi\,d\mathbf{x}\quad\forall\psi\in M \tag{33}$$

avec $\phi^Q_{t=0}=\phi_0$ *et* $M=\{\psi\in H^1(\Omega);\nabla\psi\times\mathbf{n}=0$ *on* $\Gamma_C\}$.
Si de plus $\mathbf{J}\in C^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, $\mathbf{E}_0=-\nabla\phi_0$ *et* $\nabla\times\mathbf{E}_0=\nabla\times\mathbf{E}_1=0$, *on a* $\mathcal{E}(T,\mathbf{E}-\mathbf{E}^Q)\le C(T)\varepsilon$.

En utilisant la relation de conservation de la charge, ce problème s'interprète de la manière suivante:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\phi &=& \rho & \\ \nabla\phi\times\mathbf{n} &=& 0 & \text{sur } \Gamma_C \\ \varepsilon\displaystyle\int_{\Gamma_{C_i}}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial\mathbf{n}}d\sigma &=& \displaystyle\int_{\Gamma_{C_i}}\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma & \forall i \\ \varepsilon\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t\partial\mathbf{n}}-\Delta_T\phi &=& \mathbf{J}\cdot\mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_A \end{array}\right.$$

Où Δ_T représente le laplacien tangentiel sur Γ.

5.2 Le modèle de Darwin

C'est l'approximation d'ordre 2 des équations de Maxwell définie dans le problème abstrait.

Proposition 5.3 *Soient* $\mathbf{J}\in C^1(0,T;L^2(\Omega)^3)$, $\mathbf{B}_0^D\in V_B$ *et* $\mathbf{B}_1^D\in H$, *alors il existe un unique* $\mathbf{B}^D\in\mathcal{W}(0,T)$ *solution de:*

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega P\mathbf{B}^D\cdot P\mathbf{C}\,d\mathbf{x}+\varepsilon\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_A}\mathbf{B}^D\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{n}\,d\sigma+\int_\Omega\nabla\times\mathbf{B}^D\cdot\nabla\times\mathbf{C}\,d\mathbf{x}$$
$$=\int_\Omega\mathbf{J}\cdot\nabla\times\mathbf{C}\,d\mathbf{x}\quad\forall\mathbf{C}\in V_B \tag{34}$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{B}^D(0) = \mathbf{B}_0^D$$
$$P\frac{d\mathbf{B}^D}{dt}(0) = P\mathbf{B}_1^D$$

où P est la projection sur W_B. Si de plus $\mathbf{B}_0^D = \mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1^D = \mathbf{B}_1$ et $\mathbf{J} \in C^4(0,T;L^2(\Omega)^3)$, $\nabla \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{J}_0$, $\mathbf{B}_1 = 0$, $\frac{d^k\mathbf{J}}{dt^k}(0) = 0$ pour $k = 1,2$, alors $\mathcal{E}(T, \mathbf{B} - \mathbf{B}^D) \leq C(T)\varepsilon^2$, où $\mathbf{B}$ est le champ magnétique solution de $(\mathcal{P}_B)$.

En interprétant cette formulation variationnelle, on montre que $\mathbf{B}^D$ est solution du système:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \varepsilon^2\dfrac{\partial^2 \nabla\lambda}{\partial^2 t} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}^D & = & \nabla \times \mathbf{J} & \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^D & = & 0 & \\ (\nabla \times \mathbf{B}^D) \times \mathbf{n} & = & \mathbf{J} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_C \\ \varepsilon\dfrac{\partial \mathbf{B}^D}{\partial t} \times \mathbf{n} \times \mathbf{n} + (\nabla \times \mathbf{B}^D) \times \mathbf{n} & = & \mathbf{J} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_A \end{array} \right.$$

$\nabla\lambda = P\mathbf{B}^D$ la projection orthogonale sur W_B étant caractérisée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta\lambda & = & 0 \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial n} & = & \mathbf{B}^D.n \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Il reste maintenant à définir $\mathbf{E}^D$, l'approximation de Darwin du champ électrique. Nous allons le définir comme la somme du champ créé par les charges d'espace, c'est-à-dire $\mathbf{E}_{irr}^D = -\nabla\phi$ avec

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta\phi & = & \rho \\ \phi & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

et du champ électromagnétique $\mathbf{E}_{sol}^D$ défini par le théorème suivant

Proposition 5.4 *Supposons $\mathbf{J} \in C^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ et $\mathbf{E}_0^D \in V_E$, $\mathbf{E}_1^D \in H$. Alors il existe un unique $\mathbf{E}_T^D \in \mathcal{W}(0,T)$ solution de*

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega P\mathbf{E}_T^D \cdot P\mathbf{F}\,d\mathbf{x} + \varepsilon\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_A} \mathbf{E}_T^D \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{n}\,d\sigma + \int_\Omega \nabla \times \mathbf{E}_T^D \cdot \nabla \times \mathbf{F}\,d\mathbf{x}$$
$$= -\varepsilon\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\mathbf{J} + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}_L^D}{\partial t}\right) \cdot \mathbf{F}\,d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{F} \in V \quad (35)$$

avec $\mathbf{E}^D(0) = \mathbf{E}_0^D$ et $P\frac{d\mathbf{E}^D}{dt}(0) = P\mathbf{E}_1^D$, où P est la projection sur W. De plus, si $\mathbf{E}_0^D = \mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_1^D = \mathbf{E}_1$ et $\mathbf{J} \in C^5(0,T;V')$. $\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0$. $\mathbf{E}_1 = 0$, $\frac{d^k}{dt^k}(\mathbf{J} + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}_L^D}{\partial t})(0) = 0$ $k = 1,2,3$ alors $\mathcal{E}(t, \mathbf{E} - \mathbf{E}^D) \leq C(T)\varepsilon^3$ $0 \leq t \leq T$.

En interprétant cette formulation variationnelle, on trouve que $\mathbf{E}_T^D$ est solution du système suivant:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 P\mathbf{E}_T^D}{\partial^2 t} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_T^D = \nabla \times \mathbf{J}; \qquad \nabla \cdot \mathbf{E}_T^D = 0$$

$$\mathbf{E}_T^D \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C; \qquad \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_T^D}{\partial t} \times \mathbf{n} \times \mathbf{n} + (\nabla \times \mathbf{E}_T^D) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_A \tag{36}$$

Le projecteur sur W peut s'écrire $P\mathbf{E}_T^D = \nabla \mu$, où μ est la solution de $\Delta \mu = 0$, $\quad \dfrac{\partial \mu}{\partial n} = \mathbf{E}_T^D.n \quad \text{sur } \Gamma$

Remarque 5.1 Nous avons choisi ici $\phi^D \in H_0^1(\Omega)$ pour des raisons de simplicité. En fait, pour tout choix de ϕ^D tel que $-\Delta\phi^D = \rho$ on obtient le même $\mathbf{E}^D$. On aurait pu choisir notamment $\phi^D = \phi^Q$, choix qui coïnciderait avec l'approche physique qui veut que $\mathbf{E}_{sol}^D$ soit simplement une correction électromagnétique du champ quasistatique. Pour l'implantation numérique nous allons prendre pour ϕ les conditions aux limites que l'on utilise en général pour un calcul électrostatique, c'est-à-dire Dirichlet sur le bord conducteur et Neumann sur le bord ouvert. ■

References

[1] R. Dautray, J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique*, chapitre IX, Paris, Masson (1988).

[2] P. Degond, P.-A. Raviart, *Forum Mathematicum* 4 (1992)