

*Collection de notes internes  
de la Direction  
des Etudes et Recherches*

**IMAGERIE PAR COURANTS DE FOUCAULT. LE  
PROBLEME DIRECT SIMPLIFIE. FORMULATIONS ET ETUDE  
D'UN CAS 2D**

***EDDY CURRENT IMAGING. SIMPLIFYING THE  
DIRECT PROBLEM. ANALYSIS OF A 2D CASE WITH  
FORMULATIONS***

**EDF**

Electricité  
de France

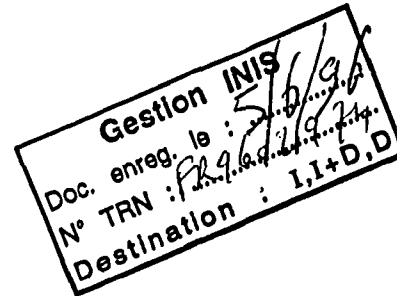
Direction des Etudes et Recherches

**EDF**

**Direction des Etudes et Recherches**

Electricité  
de France

SERVICE ENSEMBLES DE PRODUCTION  
Département Surveillance Diagnostic Maintenance



1995

SPINEANU A.  
ZORGATI R.

**IMAGERIE PAR COURANTS DE FOUCAULT. LE  
PROBLEME DIRECT SIMPLIFIE.  
FORMULATIONS ET ETUDE D'UN CAS 2D**

***EDDY CURRENT IMAGING. SIMPLIFYING THE  
DIRECT PROBLEM. ANALYSIS OF A 2D CASE  
WITH FORMULATIONS***

Pages : 63

96NB00084

Diffusion : J.-M. Lecœuvre  
EDF-DER  
Service IPN. Département SID  
1, avenue du Général-de-Gaulle  
92141 Clamart Cedex

© Copyright EDF 1996

ISSN 1161-0611

## **SYNTHÈSE :**

Le Contrôle Non Destructif par courants de Foucault est utilisé à EDF pour la détection de défauts altérant des objets conducteurs tels que les tubes de générateurs de vapeur. Afin de faciliter le diagnostic, une nouvelle technique est étudiée : l'imagerie par courants de Foucault.

La première étape, objet de ce travail, consiste à résoudre le problème direct. Il s'agit de déterminer les grandeurs mesurables (champs ou impédance), connaissant parfaitement le matériau. Dans cette optique, nous avons formulé le problème direct en courants de Foucault dans le cas général d'une géométrie 3D, appliquant la théorie des distributions et les équations de Maxwell.

Par manque de disponibilité de code de résolution du problème direct, réaliste et compatible avec les contraintes du problème inverse, nous nous sommes limités à des situations simplifiées. Sans porter atteinte à la pérennité des développements, passés, ou à venir en inversion, nous avons ainsi étudié le cas d'un défaut altérant une structure 2D, illuminée par une sonde de type "onde plane". Pour cette configuration, nous avons étudié le modèle exact et comparé ses résultats avec ceux d'un modèle simplifié, linéarisé. Ce modèle linéarisé fournit des bons résultats pourvu que les défauts ne soient pas de grande taille et que les fréquences utilisées ne soient pas trop élevées.

Cette étude montre clairement l'importance du caractère mal-posé du problème inverse, due à l'importance, en courants de Foucault, du phénomène d'atténuation du champ électromagnétique. Par voie de conséquence, la régularisation du problème inverse, absolument nécessaire, ne sera pas suffisante.

En raison de la simplicité des modèles disponibles et mis en œuvre lors des processus d'inversion, le traitement de données réelles n'est pas envisageable. Un gros effort doit d'abord porter sur le problème direct 3D, conforme aux exigences de la démarche inverse et décrivant une situation réaliste en contrôle non destructif par courants de Foucault.

Parallèlement, la conception d'une sonde spécifique, adaptée à l'imagerie par courants de Foucault, doit être envisagée.

**R. ZORGATI**

**A. SPINEANU : Stagiaire scolaire ESE**

## **EXECUTIVE SUMMARY :**

Eddy current non-destructive testing is used by EDF to detect faults affecting conductive objects such as steam generator tubes. A new technique, known as eddy current imaging, is being developed to facilitate diagnosis in this context.

The first stage in this work, discussed in the present paper, consists in solving the direct problem. This entails determining the measurable quantities (fields or impedance), on the basis of a thorough knowledge of the material considered. This was done by formulating the direct problem in terms of eddy currents in a general 3D geometry context, applying distribution theory and Maxwell equations.

Since no direct problem code was available which was both realistic and compatible with inverse problem constraints, we resorted to simplified situations. Taking care not to interfere with previous developments or those to be attempted in an inversion context, we studied the case of a flaw affecting a 2D structure, illuminated by a plane wave type probe. For this configuration, we studied the exact model and compared results with those of a linearized simplified model, which gives good results providing the flaws are small and the frequencies used not too high.

This study emphasizes the ill-posedness situation of the eddy current inverse problem related with the severe electromagnetic field attenuation. This means that regularization of the inverse problem, although absolutely necessary, will not be sufficient.

Owing to the simplicity of the models available and implemented during the inversion process, processing real data would not yet be possible. We must first focus all our efforts on the direct 3D problem, in conformity with the requirements of the inverse procedure and describing a realistic eddy current NDT situation.

At the same time, consideration should be given to the design of a specific probe customized for eddy current imaging.

# SOMMAIRE

|   |    |
|---|----|
| CONTEXTE .....  | 4  |
| LE PROBLÈME DIRECT.....   | 4  |
| 1. FORMULATIONS DU PROBLÈME CONTINU.....                                | 4  |
| 1.1 Équations de Maxwell au sens des distributions .....                | 5  |
| 1.2 Les milieux conducteurs .....                                       | 8  |
| 1.3 Formulation en champs.....  | 9  |
| 1.4 Formulation en potentiels .....                                     | 12 |
| 1.5 Formulation retenue.....  | 13 |
| 2. RÉOLUTION FORMELLE DU PROBLÈME.....                                  | 14 |
| 2.1 Expression directe du champ à partir des courants.....              | 14 |
| 2.2 Le problème en 3D .....   | 16 |
| 2.3 Solution intégrale exacte.....                                      | 17 |
| 3. STRATÉGIE DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME.....                    | 18 |
| 3.1 La méthode des moments .....  | 18 |
| 3.2 La méthode des éléments finis.....                                  | 20 |
| 4. ÉTUDE D'UN PROBLÈME 2D EN VUE D'UNE INVERSION.....                   | 23 |
| 4.1 Configuration étudiée .....   | 23 |
| 4.2 Le modèle intégral exact.....                                       | 24 |
| 4.3 Un modèle simplifié.....  | 28 |
| 5. RÉSULTATS.....   | 34 |
| 5.1 Les défauts simulés.....  | 34 |
| 5.2 Influence de quelques paramètres caractéristiques .....             | 35 |
| 5.3 Performances du modèle de pseudo-convolution .....                  | 36 |
| 5.4 Intérêt d'une approche multifréquences et choix des fréquences..... | 37 |
| 5.5 Conclusion .....  | 38 |
| CONCLUSION .....  | 40 |
| PERSPECTIVES.....   | 41 |
| BIBLIOGRAPHIE.....  | 42 |
| ANNEXE A : Courbes du champ diffracté exact.....                        | 43 |
| ANNEXE B : Étude de l'influence des paramètres du problème .....        | 49 |
| ANNEXE C : Étude du modèle de convolution .....                         | 55 |

## CONTEXTE

Le Contrôle Non Destructif par courants de Foucault (CND) est utilisé pour la détection de défauts altérant des objets conducteurs tels que les tubes de générateurs de vapeur. Le principe de cette méthode est le suivant :

une bobine inductrice, placée au-dessus du conducteur, parcourue par un courant alternatif sinusoïdal de fréquence  $f$ , crée une induction magnétique, variable dans le temps, dans le milieu conducteur. D'après la loi de Maxwell-Faraday, ces variations d'induction donnent naissance à un champ électrique dans le milieu. Ce phénomène est désigné sous l'appellation "courants de Foucault" et se révèle très utile en CND. En effet toute variation d'un des paramètres constitutifs du matériau modifie les trajets des lignes de courants induits. Il est alors possible de relier les variations de conductivité ou de perméabilité magnétique, dues à la présence du défaut, au champ électromagnétique mesuré au-dessus du conducteur.

## LE PROBLÈME DIRECT

Soit un milieu conducteur homogène et isotrope de conductivité  $\sigma_0$  et de perméabilité  $\mu_0$  connus a priori. On postule que toute anomalie, enfouie dans ce milieu, est caractérisée par des valeurs  $(\sigma, \mu)$  différentes de  $(\sigma_0, \mu_0)$ . Le problème direct consiste à déterminer les composantes du champ électromagnétique à la surface du conducteur, à partir de la connaissance du champ excitateur ou incident créé par l'inducteur, et de la connaissance de la distribution spatiale de conductivité  $\sigma(\vec{r})$  et de perméabilité  $\mu(\vec{r})$ ,  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ .

## 1. FORMULATIONS DU PROBLÈME CONTINU

Le problème est mathématiquement résolu par la théorie électromagnétique et les équations de Maxwell. En effet, les grandeurs électromagnétiques sont reliées par les quatre équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{-\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \text{div} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t) \\ \text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  sont respectivement les champs électrique et magnétique,  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  les inductions électrique et magnétique,  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  la densité de courants dans le matériau et  $\rho(\vec{r}, t)$  la densité de charges électriques. Les termes  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  et  $\rho(\vec{r}, t)$  représentent les sources.

### 1.1 Équations de Maxwell au sens des distributions

En CND par courants de Foucault classique, on s'intéresse aux variations sinusoïdales des grandeurs électromagnétiques au cours du temps avec la pulsation  $\omega = 2\pi f$  (où  $f$  désigne la fréquence). On adopte la notation complexe :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \exp(-j\omega t)] \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{H}(\vec{r}) \exp(-j\omega t)]\end{aligned}\tag{1.2}$$

L'écriture (1.1) des équations de Maxwell suppose implicitement que sources et champs sont répartis avec la régularité qui assure un sens aux diverses dérivations (c'est-à-dire qu'ils doivent être deux fois continûment dérivables). Or, souvent dans la pratique, ce n'est pas le cas (par exemple : répartitions localisées en volume, sur des surfaces ou des courbes, milieux limités par des surfaces où les champs sont discontinus). C'est pourquoi ces équations sont complétées par des conditions aux limites. L'application de la théorie des distributions aux équations aux dérivées partielles, comme celles de Maxwell, permet une écriture rigoureuse et compacte, incluant en particulier les conditions aux limites.

Dans cette théorie, on associe une distribution notée  $T_f$  à toute fonction  $f(\vec{r})$  localement sommable. Il faut que les grandeurs électromagnétiques ne soient fonctions que de la coordonnée spatiale  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ . On se restreindra donc au cas du régime harmonique pour la suite de la présentation.

Soient les quantités  $T_{\vec{D}}$ ,  $T_{\vec{E}}$ ,  $T_{\vec{B}}$ ,  $T_{\vec{H}}$ , et  $T_{\rho}$ , considérées comme les distributions vectorielles associées aux vecteurs  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ , et  $\vec{J}$  (qui sont les représentations complexes des champs réels). La quantité  $T_{\rho}$  est définie comme la distribution scalaire associée à la densité de charge  $\rho$ . On suppose que les vecteurs précédents  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ , et  $\vec{J}$  sont dérivables dans le complémentaire d'une surface  $S$  orientée (surface de discontinuité) séparant une région (1) (le milieu conducteur) d'une région (2) (l'air), de normale  $\vec{n}$  orientée arbitrairement de (1) vers (2) ( Fig. 1).

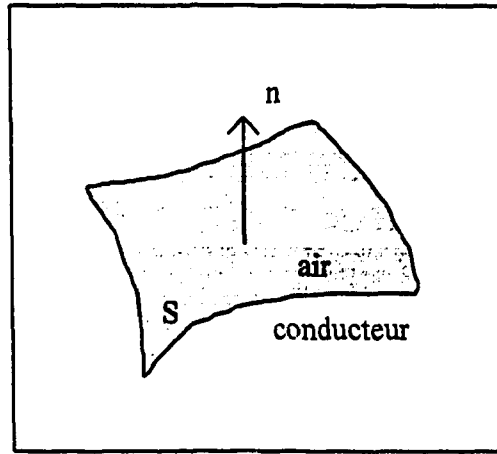


Fig. 1 : Convention d'orientation.

Afin de simplifier l'écriture, on conservera la notation  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}$  et  $\rho$  à la place de  $T_{\vec{D}}$ ,  $T_{\vec{E}}$ ,  $T_{\vec{B}}$ ,  $T_{\vec{H}}$ ,  $T_{\vec{J}}$  et  $T_{\rho}$ , en ayant présent à l'esprit que ces quantités sont maintenant considérées en tant que distributions vectorielles pour les cinq premières et en tant que distribution scalaire pour la dernière. De façon générale, la distribution  $\rho$  se décompose en une densité de charge volumique  $\rho_v$  et une charge superficielle, de densité  $\rho_s$ , décrite par la distribution  $\rho_s \delta_S$  :

$$\rho(\vec{r}) = \rho_v(\vec{r}) + \rho_s(\vec{r})\delta_S(\vec{r}) \quad (1.3)$$

De la même manière, la distribution vectorielle de courant  $\vec{J}$  se décompose généralement en une densité volumique  $\vec{J}_v$  et un courant superficiel de densité  $\vec{J}_s$ , décrit par la distribution  $\vec{J}_s \delta_S$  :

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_v(\vec{r}) + \vec{J}_s(\vec{r})\delta_S(\vec{r}) \quad (1.4)$$

Au sens des distributions, le système (1.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{rot} \vec{E}(\vec{r}) &= j\omega \vec{B}(\vec{r}) \\ \vec{rot} \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{J}(\vec{r}) - j\omega \vec{D}(\vec{r}) \\ \text{div} \vec{D}(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}) \\ \text{div} \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$



avec les distributions  $\rho$  et  $\vec{J}$  se décomposant respectivement suivant les relations (1.3) et (1.4).

Considérant le cas de la surface de discontinuité S et appliquant la règle de dérivation au sens des distributions, les équations (1.5) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \vec{rot} \vec{E}(\vec{r}) \right\} + \vec{n} \wedge \sigma_{\vec{E}} \delta_S(\vec{r}) &= j\omega \vec{B}(\vec{r}) \\
 \left\{ \vec{rot} \vec{H}(\vec{r}) \right\} + \vec{n} \wedge \sigma_{\vec{H}} \delta_S(\vec{r}) &= \vec{J}_V(\vec{r}) + \vec{J}_S(\vec{r}) \delta_S(\vec{r}) - j\omega \vec{D}(\vec{r}) \\
 \left\{ div \vec{D}(\vec{r}) \right\} + \vec{n} \cdot \sigma_{\vec{D}} \delta_S(\vec{r}) &= \rho_V(\vec{r}) + \rho_S(\vec{r}) \delta_S(\vec{r}) \\
 \left\{ div \vec{B}(\vec{r}) \right\} + \vec{n} \cdot \sigma_{\vec{B}} \delta_S(\vec{r}) &= 0
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Par identification, les équations (1.6) se décomposent en deux séries d'équations. La première série n'est autre que les équations de Maxwell usuelles au sens des fonctions :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \vec{rot} \vec{E}(\vec{r}) \right\} &= j\omega \vec{B}(\vec{r}) \\
 \left\{ \vec{rot} \vec{H}(\vec{r}) \right\} &= \vec{J}_V(\vec{r}) - j\omega \vec{D}(\vec{r}) \\
 \left\{ div \vec{D}(\vec{r}) \right\} &= \rho_V(\vec{r}) \\
 \left\{ div \vec{B}(\vec{r}) \right\} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

La seconde série d'équations, obtenues à partir des relations (1.6), constitue les conditions aux limites sur S, à savoir :

$$\begin{aligned}
 \vec{n} \wedge \sigma_{\vec{E}} &= 0 & \vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \\
 \vec{n} \wedge \sigma_{\vec{H}} &= \vec{J}_S & \vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{J}_S \\
 \vec{n} \cdot \sigma_{\vec{D}} &= \rho_S & \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \rho_S \\
 \vec{n} \cdot \sigma_{\vec{B}} &= 0 & \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ces conditions s'énoncent respectivement de la manière suivante :

- continuité de la composante tangentielle du champ électrique et de la composante normale de l'induction magnétique;

- discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique mesurée par la densité superficielle  $\vec{J}_s \wedge \vec{n}$ ;
- discontinuité de la composante normale de l'induction électrique mesurée par la densité superficielle  $\rho_s$ .

**Remarque :** dans la réalité physique, il n'y a pas de densité de courant superficiel ( $\vec{J}_s=0$ ) entre deux milieux usuels, d'où la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique. La notion de courant superficiel est rendue nécessaire par le modèle fictif du conducteur parfait.

## 1.2 Les milieux conducteurs

### 1.2.1 Relations constitutives

Au système d'équations (1.5), on ajoute les équations constitutives du milieu. Elles se présentent sous la forme d'une application de l'espace des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  dans les trois espaces, respectivement, des champs  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ , et  $\vec{J}$ , ce qu'on peut écrire :

$$(\vec{E}, \vec{H}) \rightarrow \begin{cases} \vec{D} \\ \vec{B} \\ \vec{J} \end{cases}$$

La première "ligne" de cette relation s'appelle la relation "diélectrique"; la deuxième, la relation "magnétique"; et la troisième, la relation "de conductivité". Si cette application est linéaire, le milieu est dit linéaire et l'on écrit :

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}) &= \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \mu \vec{H}(\vec{r}) \\ \vec{J}(\vec{r}) &= \sigma \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

avec  $\epsilon$  (F/m) permittivité électrique,  $\mu$  (H/m) perméabilité magnétique,  $\sigma$  (S/m) conductivité électrique. Lorsque l'application est non linéaire, le milieu est dit non linéaire (exemple : les matériaux ferromagnétiques).

• **Les milieux linéaires et isotropes** ont des propriétés identiques dans toutes les directions en un point donné.  $\epsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des grandeurs scalaires dépendant explicitement des coordonnées d'espace si le milieu est inhomogène et sont constantes sinon.

• **Les milieux linéaires et anisotropes** ont des propriétés qui varient selon les diverses directions issues d'un même point.  $\epsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des tenseurs d'ordre deux.

- *Les milieux amagnétiques* se caractérisent par une perméabilité magnétique égale à celle du vide ( $\mu_r = 1$ ). La relation magnétique est linéaire.

- *Les milieux magnétiques* se caractérisent par une perméabilité magnétique supérieure à celle du vide ( $\mu_r > 1$ ). La relation magnétique est donnée par un cycle d'hystérésis.

### 1.2.2 L'approximation quasi-statique

Pour un bon conducteur, la densité de courant de déplacement est négligeable par rapport à la densité de courant de conduction. En effet, en régime sinusoïdal on a :

$$\frac{\left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right|}{|\vec{J}|} = \frac{\omega \varepsilon}{\sigma} \quad (1.10)$$

Avec les valeurs typiques pour un bon conducteur,  $\varepsilon \cong \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F/m}$ ,  $\sigma \cong 10^7 \text{ S/m}$ ,

le rapport vaut  $10^{-17} f$ . Le courant de déplacement est donc négligeable vis-à-vis du courant de conduction aux fréquences plus basses que  $f \cong 10^{15} \text{ Hz}$ . C'est le cas en CND par courants de Foucault où la gamme de fréquences s'étend de 10 à 600 kHz.

### 1.3 Formulation en champs

Généralement, en CND par courants de Foucault, les milieux sont considérés linéaires et isotropes. Les défauts à détecter sont caractérisés par des variations de conductivité  $\sigma(\vec{r})$  et/ou de perméabilité  $\mu(\vec{r})$ . De plus, la permittivité  $\varepsilon(\vec{r})$  est plutôt supposée constante, égale à  $\varepsilon_0$ .

Pour la gamme de fréquences de travail, il est d'usage (cf. §1.2.2) de négliger les courants de déplacement à moins que le défaut recherché ne soit constitué d'air ( $\sigma(\vec{r})=0$ ). On peut considérer que la densité de charge  $\rho$  est nulle, que ce soit dans l'air ou bien dans le milieu conducteur. Avec ces considérations, et tenant compte des relations constitutives, le système (1.5) devient :

$$\begin{aligned} \vec{rot} \vec{E}(\vec{r}) &= j\omega \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}) \\ \vec{rot} \vec{H}(\vec{r}) &= [\sigma(\vec{r}) - j\omega \varepsilon_0] \vec{E}(\vec{r}) \\ \text{div} \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \\ \text{div} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{-1}{\mu(\vec{r})} \vec{H}(\vec{r}) \text{grad} \mu(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

En calculant le  $\vec{rot}(\vec{rot}\vec{E})$  et le  $\vec{rot}(\vec{rot}\vec{H})$ , on en déduit l'équation de type Helmholtz satisfaite par le champ électromagnétique total, soit :

$$[\Delta + k^2(\vec{r})]\vec{U}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \quad (1.12)$$

où  $\vec{U}(\vec{r})$  représente le champ électromagnétique total ( $\vec{E}(\vec{r})$  ou  $\vec{H}(\vec{r})$ ),  
 $k(\vec{r})$  est le nombre d'onde dans le milieu conducteur  
 $k^2(\vec{r}) = \omega^2 \epsilon_0 \mu(\vec{r}) + j\omega \mu(\vec{r}) \sigma(\vec{r})$   
 $\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_{\Delta\sigma}(\vec{r}) + \vec{J}_{\Delta\mu}(\vec{r})$  est la densité des courants induits fictifs dus aux variations de conductivité  $\Delta\sigma$  ou de perméabilité  $\Delta\mu$ .

L'expression de  $\vec{J}(\vec{r})$  dépend du type du défaut considéré et de la formulation choisie pour  $\vec{U}(\vec{r})$  (voir §1.3.1 et §1.3.2).

### 1.3.1 Types de défauts

Dans le cas le plus général, on peut classer les défauts en trois catégories :

- les défauts du type  $\Omega_\sigma$ , caractérisés par des variations de conductivité  $\sigma(\vec{r})$ . Le nombre d'onde dans le défaut a pour expression :  $k_\sigma^2(\vec{r}) = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 + j\omega \mu_0 \sigma(\vec{r})$ . C'est le cas par exemple des fissures et des inclusions.
- les défauts du type  $\Omega_\mu$ , caractérisés par des variations de la perméabilité  $\mu(\vec{r})$ . Le nombre d'onde dans le défaut a pour expression :  $k_\mu^2(\vec{r}) = \omega^2 \epsilon_0 \mu(\vec{r}) + j\omega \mu(\vec{r}) \sigma_0$ . C'est le cas des endommagements du type contraintes mécaniques.
- les défauts du type  $\Omega_{\sigma\mu}$ , caractérisés par la variation des deux paramètres  $\sigma(\vec{r})$  et  $\mu(\vec{r})$ . C'est le cas général pour lequel le nombre d'onde s'écrit :  $k_{\sigma\mu}^2(\vec{r}) = \omega^2 \epsilon_0 \mu(\vec{r}) + j\omega \mu(\vec{r}) \sigma(\vec{r})$ . C'est le cas pour la corrosion notamment.

### 1.3.2 La formulation en champ diffracté

L'expression du second membre dans (1.12) sera donnée pour une formulation en champ diffracté, électrique ou magnétique. Soit l'équation qui régit le champ électromagnétique dans le milieu homogène (c'est-à-dire en l'absence du défaut) :

$$[\Delta + k_0^2]\vec{U}_0(\vec{r}) = 0 \quad (1.13)$$

avec  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 + j\omega \mu_0 \sigma_0$ .

$\Delta + k^2$  étant un opérateur linéaire, l'application du principe de superposition à l'équation (1.12) et (1.13), permet d'obtenir l'équation de type Helmholtz qui régit le champ diffracté ou **champ dû au défaut** :

$$[\Delta + k_0^2] \bar{U}_d(\bar{r}) = \bar{J}_S(\bar{r}) \quad (1.14)$$

où  $\bar{U}_d(\bar{r}) = \bar{U}(\bar{r}) - \bar{U}_0(\bar{r})$  est le champ diffracté;  $\bar{U}_d(\bar{r})$  est soit  $\bar{E}_d(\bar{r})$ , soit  $\bar{H}_d(\bar{r})$ ,  
 $\bar{J}_S(\bar{r}) = \bar{J}_L(\bar{r}) + \bar{J}_{\Delta\sigma}(\bar{r}) + \bar{J}_{\Delta\mu}(\bar{r})$  est la densité de courants induits fictifs dans le défaut.

Nous donnons dans les tableaux ci-dessous les expressions des termes composant le second membre  $\bar{J}_S(\bar{r})$  selon leurs natures, linéaires :  $\bar{J}_L(\bar{r})$ , non linéaires en  $\sigma$  :  $\bar{J}_{\Delta\sigma}(\bar{r})$  ou non linéaires en  $\mu$  :  $\bar{J}_{\Delta\mu}(\bar{r})$ , et selon la formulation choisie et le type de défaut traité :

|                      |                      | $\bar{J}_L(\bar{r})$                                  | $\bar{J}_{\Delta\sigma}(\bar{r})$ | $\bar{J}_{\Delta\mu}(\bar{r})$  |
|----------------------|----------------------|---|-----------------------------------|---|
| $\bar{J}_S(\bar{r})$ | $\Omega_\sigma$      | $[k_0^2 - k_\sigma^2(\bar{r})] \bar{E}(\bar{r})$      | 0                                 | 0   |
|                      | $\Omega_\mu$         | $[k_0^2 - k_\mu^2(\bar{r})] \bar{E}(\bar{r})$         | 0                                 | $-\vec{\text{grad}}\mu(\bar{r}) \wedge \left[ \frac{1}{\mu(\bar{r})} \vec{\text{rot}} \bar{E}(\bar{r}) \right]$ |
|                      | $\Omega_{\sigma\mu}$ | $[k_0^2 - k_{\sigma\mu}^2(\bar{r})] \bar{E}(\bar{r})$ | 0                                 | $-\vec{\text{grad}}\mu(\bar{r}) \wedge \left[ \frac{1}{\mu(\bar{r})} \vec{\text{rot}} \bar{E}(\bar{r}) \right]$ |

Tableau 1. Formulation en champ électrique diffracté :  $\bar{U}_d(\bar{r}) = \bar{E}_d(\bar{r})$

|                      |                      | $\bar{J}_L(\bar{r})$                                  | $\bar{J}_{\Delta\sigma}(\bar{r})$  | $\bar{J}_{\Delta\mu}(\bar{r})$  |
|----------------------|----------------------|---|--|---|
| $\bar{J}_S(\bar{r})$ | $\Omega_\sigma$      | $[k_0^2 - k_\sigma^2(\bar{r})] \bar{H}(\bar{r})$      | $-\left[ \vec{\text{grad}}\sigma(\bar{r}) \right] \wedge \bar{E}(\bar{r})$ | 0   |
|                      | $\Omega_\mu$         | $[k_0^2 - k_\mu^2(\bar{r})] \bar{H}(\bar{r})$         | 0  | $\vec{\text{grad}} \left[ -\bar{H}(\bar{r}) \cdot \vec{\text{grad}}(\log \mu(\bar{r})) \right]$ |
|                      | $\Omega_{\sigma\mu}$ | $[k_0^2 - k_{\sigma\mu}^2(\bar{r})] \bar{H}(\bar{r})$ | $-\left[ \vec{\text{grad}}\sigma(\bar{r}) \right] \wedge \bar{E}(\bar{r})$ | $\vec{\text{grad}} \left[ -\bar{H}(\bar{r}) \cdot \vec{\text{grad}}(\log \mu(\bar{r})) \right]$ |

Tableau 2. Formulation en champ magnétique diffracté :  $\bar{U}_d(\bar{r}) = \bar{H}_d(\bar{r})$

#### 1.4 Formulation en potentiels

De  $\vec{\text{div}} \vec{B}(\vec{r}) = 0$ , on déduit :

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\text{rot}} \vec{A}(\vec{r}) \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{\mu(\vec{r})} \vec{\text{rot}} \vec{A}(\vec{r})\end{aligned}\quad (1.15)$$

et de  $\vec{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}) - j\omega \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\text{rot}}(\vec{E}(\vec{r}) - j\omega \vec{A}(\vec{r})) = 0$ , il vient :

$$\vec{E}(\vec{r}) - j\omega \vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\text{grad}} V(\vec{r}) \quad (1.16)$$

En utilisant les équations (1.15) et (1.16) dans l'expression de  $\vec{\text{rot}} \vec{H}(\vec{r})$  donnée par l'équation de Maxwell, on obtient :

$$\begin{aligned}[\Delta + k^2(\vec{r})] \vec{A}(\vec{r}) &= \left[ \mu(\vec{r}) \vec{\text{grad}} \frac{1}{\mu(\vec{r})} \right] \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\text{grad}} \vec{\text{div}} \vec{A}(\vec{r}) + \\ &[\mu(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) - j\omega \epsilon_0 \mu(\vec{r})] \vec{\text{grad}} V(\vec{r})\end{aligned}\quad (1.17)$$

L'expression de  $\vec{\text{div}} \vec{A}(\vec{r})$  est obtenue en remplaçant (1.16) dans  $\vec{\text{div}} \vec{E}(\vec{r}) = 0$ . On a :

$$j\omega \vec{\text{div}} \vec{A}(\vec{r}) = \Delta V \quad (1.18)$$

Finalement, en utilisant (1.18), l'équation (1.17) devient :

$$\begin{aligned}[\Delta + k^2(\vec{r})] \vec{A}(\vec{r}) &= \left[ \mu(\vec{r}) \vec{\text{grad}} \frac{1}{\mu(\vec{r})} \right] \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A}(\vec{r}) + \\ &\frac{1}{j\omega} [\Delta + k^2(\vec{r})] \vec{\text{grad}} V(\vec{r})\end{aligned}\quad (1.19)$$

Les potentiels vecteur  $\vec{A}(\vec{r})$  et scalaire  $V(\vec{r})$ , qui vérifient (1.19), sont déterminés à une transformation de jauge près, appelée jauge de Lorentz. Nous n'avons pas pu préciser cette transformation dans le cas général traité (milieu inhomogène caractérisé par des variations  $\sigma(\vec{r})$  et  $\mu(\vec{r})$ ). Normalement, elle devrait simplifier l'expression (1.19) tout en levant l'indétermination sur  $\vec{A}(\vec{r})$  et  $V(\vec{r})$ . Dans le cas d'un milieu homogène, la jauge de Lorentz s'écrit :

$$\vec{\text{div}} \vec{A}(\vec{r}) - j\omega\epsilon_0\mu_0 V(\vec{r}) = 0 \quad (1.20)$$

Il est donc possible de l'utiliser pour des défauts de type  $\Omega_\sigma$ . Il est facile de montrer alors que les potentiels vecteur  $\vec{A}(\vec{r})$  et scalaire  $V(\vec{r})$  vérifient dans ce cas :

$$\begin{aligned} [\Delta + k_\sigma^2(\vec{r})]\vec{A}(\vec{r}) &= \mu_0 \sigma(\vec{r}) \vec{\text{grad}} V(\vec{r}) \\ [\Delta + k_\sigma^2(\vec{r})]V(\vec{r}) &= j\omega\mu_0 \sigma(\vec{r})V(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

### 1.5 Formulation retenue

L'étude faite au §1.3 et §1.4 montre qu'une formulation en champ diffracté semble plus appropriée à notre problème. De plus, d'après l'expression du  $\vec{J}_s(\vec{r})$  donnée dans les tableaux 1 et 2, on constate que, pour la formulation en champ électrique diffracté, le terme  $\vec{J}_{\Delta\sigma}(\vec{r})$  est nul quel que soit le type du défaut. Pour cette raison, on va adopter cette formulation pour le problème direct en courants de Foucault, soit :

$$[\Delta + k_\sigma^2]\vec{E}_d(\vec{r}) = -\vec{J}(\vec{r}) \quad (1.22)$$

où  $\vec{J}(\vec{r}) = -\vec{J}_s(\vec{r})$  (cf. tableau 1)

$\vec{E}_d(\vec{r})$  est le champ diffracté défini par la relation :  $\vec{E}_d(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}_0(\vec{r})$ .

$\vec{E}(\vec{r})$  est le champ total tandis que  $\vec{E}_0(\vec{r})$  est le champ qui règne dans le matériau en l'absence de défaut.

## 2. RÉOLUTION FORMELLE DU PROBLÈME

### 2.1 Expression directe du champ à partir des courants

On prend comme point de départ l'équation (1.22), où chaque composante  $e_d$  du champ recherché  $\vec{E}_d(\vec{r})$  satisfait l'équation de Helmholtz scalaire inhomogène :

$$[\Delta + k_0^2]e_d(\vec{r}) = -j(\vec{r}) \quad (2.1)$$

On appelle solution élémentaire  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  toute solution de l'équation particulière :

$$[\Delta + k_0^2]G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.2)$$

$G(\vec{r}, \vec{r}')$  est une fonction, dite fonction de Green, qui représente le champ mesuré au point  $\vec{r}$  rayonné par une source élémentaire placée au point  $\vec{r}'$ . Une solution particulière de l'équation (2.1) est le produit de convolution :

$$e_d = j * G \quad (2.3)$$

On aura donc comme solution particulière de l'équation vectorielle (1.22) :

$$\vec{E}_d = \vec{J} * G \quad (2.4)$$

c'est-à-dire la convolution des courants fictifs, induits dans le défaut, par la solution élémentaire  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ . L'équation de convolution (2.4) s'écrit sous forme intégrale :

$$\vec{E}_d(\vec{r}) = \iiint_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (2.5)$$

où  $d\vec{r}'$  est l'élément de volume. Cette équation établit une relation entre le champ électrique diffracté et la densité des courants induits fictifs dus aux variations de conductivité  $\sigma(\vec{r})$  et/ou de perméabilité  $\mu(\vec{r})$ .



Pour le problème inverse, on souhaite disposer d'une relation entre le champ électrique diffracté et une fonction objet qui caractérise les variations relatives de la conductivité et/ou de la perméabilité du milieu inhomogène par rapport aux valeurs  $(\sigma_0, \mu_0)$ . La mise en évidence d'une telle fonction permettrait de déterminer lors de l'inversion, aussi précisément que possible, les distributions  $\sigma(\vec{r})$  et/ou  $\mu(\vec{r})$  dans le domaine  $\Omega$  du matériau contenant le défaut (*imagerie quantitative*). Quand il n'est pas possible d'obtenir une telle fonction objet, la formulation du problème direct reste une formulation en courants induits fictifs et l'inversion devrait permettre d'obtenir seulement le contour  $\partial\Omega$  du domaine définissant le défaut (*imagerie qualitative*). D'après le tableau 1, on peut définir une fonction objet linéaire seulement pour les défauts du type  $\Omega_\sigma$ . Pour les deux autres types de défauts, il n'est pas possible de définir une telle fonction linéaire.

Soit, pour le défaut de type  $\Omega_\sigma$ , la fonction objet, notée  $f(\vec{r})$ , définie par :

$$f(\vec{r}) = 1 - \frac{\sigma(\vec{r})}{\sigma_0} \quad (2.6)$$

Utilisant (2.6), la densité de courants induits s'écrit :

$$\vec{J}(\vec{r}) = -j\omega\mu_0\sigma_0 f(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \quad (2.7)$$

La relation (2.5) devient :

$$\vec{E}_d(\vec{r}) = -j\omega\mu_0\sigma_0 \iiint_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') dr' \quad (2.8)$$

qui est une relation entre le champ diffracté, présent dans le milieu conducteur, et la fonction objet.

L'objectif poursuivi dans [Hamman et Zorgati, 1994] étant de résoudre un problème inverse quantitatif, et non qualitatif, on est amené à se limiter à l'étude du problème direct formulé selon l'équation (2.8), c'est-à-dire au cas des défauts caractérisés uniquement par des variations de conductivité.

En contrôle non destructif, le champ diffracté interne n'est pas directement accessible à la mesure : il doit être mesuré par l'intermédiaire d'un capteur se trouvant nécessairement à l'extérieur du milieu conducteur. En tenant compte de cette caractéristique fondamentale, on présente à présent les étapes de résolution du problème 3D.

## 2.2 Le problème en 3D

Le milieu étudié est constitué de deux domaines notés  $D_1$  et  $D_2$ , séparés par une surface  $\Gamma$ . Nous considérons le cas d'un matériau métallique non magnétique ( $D_2$ ) plongé dans l'air ( $D_1$ ). Le milieu  $D_1$  est le domaine accessible à la mesure tandis que le milieu  $D_2$ , inaccessible, est celui qu'on cherche à évaluer lors d'un contrôle non destructif. Les milieux sont caractérisés par les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} D_1 : & (\epsilon_0, \mu_0, \sigma = 0) \\ D_2 : & (\epsilon_0, \mu_0, \sigma_0) \end{aligned}$$

Un défaut de type  $\Omega_\sigma$ , c'est-à-dire caractérisé par une conductivité  $\sigma(\bar{r})$ , dépendant de la variable d'espace  $\bar{r} \in \mathbb{R}^3$ , occupe un sous-domaine  $\Omega$  de  $D_2$ , tandis que la source de champ se trouve dans  $D_1$ . La collecte des mesures se fait dans un sous-domaine  $S$  de  $D_1$  (généralement réduit à une ligne en 2D).

On notera par  $E_{01}$ ,  $E_{02}$  les champs régnant respectivement dans  $D_1$  et  $D_2$ , en l'absence de défaut. En présence d'un défaut, ces champs seront notés  $E_1$  et  $E_2$ . Le champ électrique diffracté, mesuré dans  $S$  est donné, conformément à la relation (2.5) par :

$$\vec{E}_{1d}(\bar{r}) = \iiint_{\Omega} G_{12}(\bar{r}, \bar{r}') \vec{J}(\bar{r}') d\bar{r}' \quad \bar{r} \in S \subset D_1, \bar{r}' \in \Omega \quad (2.9)$$

où la densité des courants de la source est due au défaut  $\Omega_\sigma$  se trouvant dans  $D_2$ . D'après (2.7) elle a pour expression :

$$\vec{J}(\bar{r}) = -j\omega\mu_0\sigma_0 f(\bar{r}) \vec{E}_2(\bar{r}) \quad (2.10)$$

$G_{12}(\bar{r}, \bar{r}')$  est la fonction de Green air-métal, solution de l'équation particulière :

$$[\Delta + k_a^2] G_{12}(\bar{r}, \bar{r}') = -\delta(\bar{r} - \bar{r}') \quad \bar{r} \in D_1, \bar{r}' \in \Omega \quad (2.11)$$

avec  $k_a^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ .

Le champ  $\vec{E}_2(\bar{r})$ , régnant dans le milieu  $D_2$  en présence de défaut, est solution d'une équation de type (1.22) :

$$[\Delta + k_0^2][\bar{E}_2(\bar{r}) - \bar{E}_{02}(\bar{r})] = -\bar{J}(\bar{r}) \quad (2.12)$$

soit, d'après (2.5) :

$$\bar{E}_2(\bar{r}) = \bar{E}_{02}(\bar{r}) + \iiint_{\Omega} G_{22}(\bar{r}, \bar{r}') \bar{J}(\bar{r}') d\bar{r}' \quad \bar{r} \in D_2, \bar{r}' \in \Omega \quad (2.13)$$

$G_{22}(\bar{r}, \bar{r}')$  est la fonction de Green métal-métal, solution de l'équation particulière :

$$[\Delta + k_0^2]G_{22}(\bar{r}, \bar{r}') = -\delta(\bar{r} - \bar{r}') \quad \bar{r} \in D_2, \bar{r}' \in \Omega \quad (2.14)$$

### 2.3 Solution intégrale exacte

La résolution du problème direct est finalement obtenue en suivant les étapes suivantes :

- 1) calcul du champ interne en l'absence de défaut,  $\bar{E}_{02}(\bar{r})$ , régnant dans le milieu  $D_2$ , lui-même considéré comme homogène en l'absence de défaut.
- 2) calcul du champ interne  $\bar{E}_2(\bar{r})$  dans le milieu  $D_2$ , en présence de défaut. Il est donné par une équation de Fredholm de deuxième espèce :

$$\bar{E}_2(\bar{r}) = \bar{E}_{02}(\bar{r}) - j\omega\mu_0\sigma_0 \iiint_{\Omega} G_{22}(\bar{r}, \bar{r}') f(\bar{r}') \bar{E}_2(\bar{r}') d\bar{r}' \quad \bar{r} \in D_2, \bar{r}' \in \Omega \quad (2.15)$$

- 3) calcul du champ diffracté  $\bar{E}_{1d}(\bar{r})$ , mesuré dans un sous-domaine  $S$  de  $D_1$ , en présence de défaut. Il est donné par une équation de Fredholm de première espèce :

$$\bar{E}_{1d}(\bar{r}) = -j\omega\mu_0\sigma_0 \iiint_{\Omega} G_{12}(\bar{r}, \bar{r}') f(\bar{r}') \bar{E}_2(\bar{r}') d\bar{r}' \quad \bar{r} \in S \subset D_1, \bar{r}' \in \Omega \quad (2.16)$$

Si l'on remplace dans (2.16), l'expression de  $\bar{E}_2(\bar{r})$  donné par (2.15), on observe que la relation entre le champ diffracté mesuré et la fonction objet, qui caractérise l'image du milieu, n'est pas linéaire. La détermination de  $f(\bar{r})$  à partir de la connaissance de  $\bar{E}_{1d}(\bar{r})$  est donc un problème inverse non linéaire particulièrement difficile. Moyennant certaines hypothèses, on peut linéariser la relation (2.17) pour réduire la complexité de la résolution du problème inverse. Le modèle linéaire qui en découle sera présenté en détail au Chapitre 4.

### 3. STRATÉGIE DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME

La résolution de notre problème ne peut être effectuée analytiquement. C'est pourquoi, le problème doit être résolu numériquement après avoir discrétisé l'ensemble des équations obtenues. L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des diverses méthodes de résolution numérique du problème direct, afin de mieux situer notre choix.

#### 3.1 La méthode des moments

Cette méthode permet de ramener la résolution d'une équation intégrale à celle d'un système d'équations linéaires de rang fini. On considère des fonctions de  $\mathbf{R}^3$  dans  $\mathbf{C}$  formant un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  muni du produit scalaire :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbf{R}^3} f_1 f_2^* dv \quad \forall f_1, f_2 \in H \quad (3.1)$$

Soit l'équation fonctionnelle :

$$\mathcal{L}(f) = g \quad (3.2)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire (intégral par exemple),  $f$  est la fonction inconnue et  $g$  une fonction connue. Soit  $\{f_i\}$  une base complète de  $\mathcal{H}$ , alors :

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i \quad (3.3)$$

L'équation (3.2) s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathcal{L}(f_i) = g \quad (3.4)$$

Si l'on projette cette équation sur une deuxième base complète  $\{g_j\}$  de  $\mathcal{H}$ , on obtient le système linéaire suivant :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \langle \mathcal{L}(f_i), g_j \rangle = \langle g, g_j \rangle \quad (3.5)$$

ayant comme inconnus  $\alpha_i$ . En utilisant une notation matricielle, le système s'écrit :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (3.6)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\langle \mathcal{L}(f_i), g_j \rangle = A_{ij}] \\ \mathbf{b} &= [\langle g, g_j \rangle = B_j] \\ \mathbf{x} &= [\alpha_i] \end{aligned} \quad (3.7)$$

On obtient ainsi un système linéaire de rang infini dont la résolution n'est envisageable que dans des cas très particuliers ( $\mathbf{A}$  matrice diagonale ou triangulaire). On se ramène à un système de rang fini en considérant que la fonction  $f$  est approchée par :

$$f = f^{(N)} = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i \quad (3.8)$$

et on la projette sur les fonctions de base  $\{g_j\}$ ,  $j = \overline{1, M}$ . On en déduit un système linéaire de  $M$  équations à  $N$  inconnues :

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \mathcal{L}(f_i), g_j \rangle = \langle g, g_j \rangle, \quad j = \overline{1, M} \quad (3.9)$$

Si le support de  $f$  est suffisamment régulier, on peut montrer que la solution  $f^{(N)}$  converge vers  $f$  lorsque  $N$  tend vers l'infini. Pour que le système (3.9) admette une solution, il est nécessaire que  $M \geq N$ .

- Dans le cas  $M = N$ , des algorithmes de résolution directe (Gauss) ou de résolution itérative (gradient conjugué) peuvent être utilisés.
- Dans le cas  $M > N$ , le système est surdéterminé. Il est résolu par une méthode des moindres carrés qui minimise le résidu :

$$\varepsilon^2 = \sum_{j=1}^M \left| \langle \varepsilon_N, g_j \rangle \right|^2 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{L}(f_i) - g \quad (3.10)$$

Le choix des bases  $\{f_i\}$  et  $\{g_j\}$  se fait en pratique de manière à simplifier le plus possible le calcul des éléments de la matrice  $A$  et à rendre la convergence rapide.

### 3.2 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une technique d'analyse numérique qui permet d'obtenir des solutions approchées pour les problèmes aux dérivées partielles de la physique avec conditions aux limites. Soient une équation aux dérivées partielles, définie sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^3$ , et une fonction vectorielle vérifiant l'équation. On note  $u$  une de ses composantes. Les conditions aux limites du problème sont satisfaites par une combinaison de valeurs  $u$  et de ses dérivées partielles sur le bord  $\Gamma$  de  $\Omega$ . La fonction inconnue  $u$  prend ses valeurs sur un nombre infini de points et le problème a normalement un nombre infini d'inconnues. La procédure de discrétisation des éléments finis réduit celui-ci à un problème avec un nombre fini d'inconnues en divisant  $\Omega$  en éléments et en exprimant  $u$  en termes de fonctions approchées dans chacun des éléments. Les fonctions approchées sont définies en des points spécifiques appelés nœuds.

#### 3.2.1 Formulation variationnelle

En formulant le problème aux limites sous forme variationnelle, la solution est obtenue en cherchant une fonction  $u$  minimisant une certaine relation intégrale. Soit un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  muni du produit scalaire défini par :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv' d\Omega \quad \forall u, v \in H \quad (3.11)$$

Soit l'équation à résoudre dans  $\Omega$  :

$$\mathcal{L}u = f \quad (3.12)$$

où l'opérateur linéaire est  $\mathcal{L} = -\Delta$ , avec une condition aux limites du type :

$$u(s) = g(s) \quad s \in \Gamma \quad (3.13)$$

Soit  $V$  un sous-espace de  $\mathcal{H}$  où les fonctions  $u, v$  vérifient la condition aux limites précédente. Si  $a$  est une forme bilinéaire continue sur  $V \times V$ , et  $l$  une forme linéaire sur  $V$ , la formulation variationnelle s'énonce :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, a(u, v) = l(v) \quad (3.14)$$

En utilisant la **formule de Green** :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (3.15)$$

avec  $\vec{a} = v \vec{\operatorname{grad}} u$ , on obtient aisément :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V \\ \langle \mathcal{L}u, v \rangle &= \int_{\Omega} \vec{\operatorname{grad}} u \cdot \vec{\operatorname{grad}} v \, d\Omega \\ \langle \mathcal{L}u, v \rangle &= \int_{\Omega} f v \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.16)$$

d'où

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \vec{\operatorname{grad}} u \cdot \vec{\operatorname{grad}} v \, d\Omega \quad \forall u, v \in V \\ l(v) &= \int_{\Omega} f v \, d\Omega \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (3.17)$$

En construisant la forme quadratique :

$$F(v) = a(v, v) - l(v) - l^*(v) = \langle \mathcal{L}v, v \rangle - \langle f, v \rangle - \langle v, f \rangle \quad (3.18)$$

on montre que le problème variationnel consiste à trouver  $u$  tel que :

$$F(u) = \inf F(v) \quad \forall v \in V \quad (3.19)$$

avec  $\inf F(v)$  borne inférieure de l'ensemble des nombres réels  $\{F(v); v \in V\}$ .

### **3.2.2 Discrétisation**

Soit  $V^{(n)}$  un sous-ensemble de dimension finie engendré par la base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  et  $u^{(n)}$  une approximation de  $u$  :

$$u^{(n)} = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i \quad (3.20)$$

Le problème est ramené à la détermination des coefficients  $u_i$ . À partir de l'expression (3.14), on aboutit à la résolution du système linéaire suivant :

$$\sum_{i=1}^n u_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j) \quad j = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

L'étape suivante consiste à subdiviser  $\Omega$  en une réunion d'éléments de volume (par exemple des prismes) et d'imposer aux fonctions  $\varphi_i$  d'être polynomiales sur chaque élément. Ces fonctions sont entièrement déterminées par leurs valeurs sur les sommets de l'élément. Ainsi, à l'intérieur de l'élément,  $u$  varie linéairement en fonction de ses valeurs  $u_i$  aux sommets  $S_i$  de l'élément. Pour faciliter la résolution numérique, on cherche à obtenir des matrices  $A$  creuses, de termes génériques  $a(\varphi_i, \varphi_j)$ , à partir des propriétés de la forme bilinéaire  $a$ , des fonctions  $\varphi$  et d'une numérotation convenable des sommets (par exemple  $\varphi(S_i) = 1$  et  $\varphi(S_j) = 0$  si  $i \neq j$ ).



## 4. ÉTUDE D'UN PROBLÈME 2D EN VUE D'UNE INVERSION

Nous étudions, dans ce chapitre, la résolution du problème direct plan, en vue de fournir des signaux qui serviront de données au problème inverse étudié dans [Hamman et Zorgati, 1994]. Nous présentons également un modèle linéaire, destiné à simplifier la résolution du problème inverse. Nous avons analysé la structure de la matrice d'un tel modèle pour mettre en évidence les difficultés particulières auxquelles nous serons confrontés en phase d'inversion. Les résultats de ce modèle seront comparés à ceux obtenus par résolution intégrale exacte au chapitre 5.

### 4.1 Configuration étudiée

Considérons un morceau de tube de générateur de vapeur que l'on "ouvrirait" (Fig. 2).

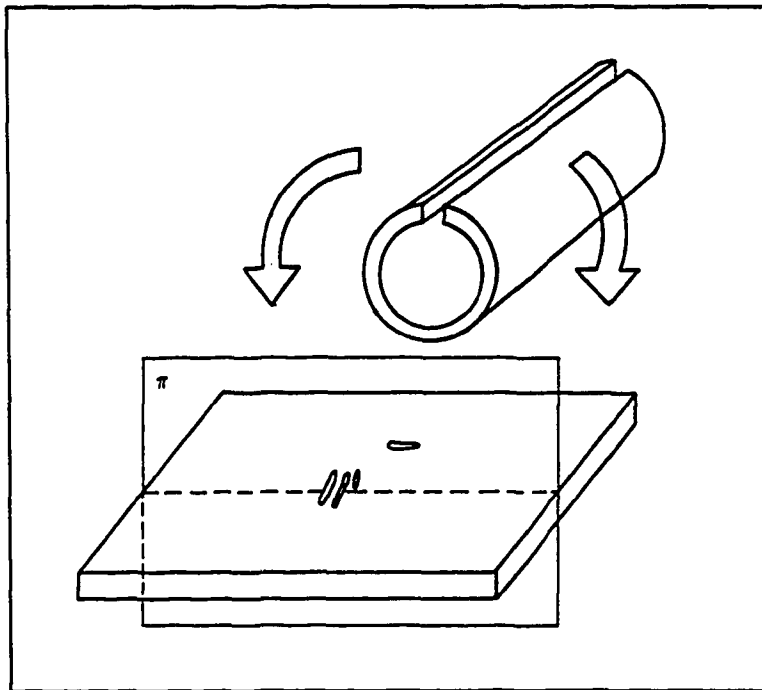


Fig. 2 : Passage d'une géométrie cylindrique à une géométrie plane 2D.

Sur la paroi interne de ce tube, on peut avoir des défauts transversaux et longitudinaux. En considérant un plan de coupe  $\pi$ , les défauts longitudinaux peuvent être considérés comme infiniment longs suivant l'axe perpendiculaire au plan de coupe et le problème peut être modélisé comme il est montré sur la figure 3 :

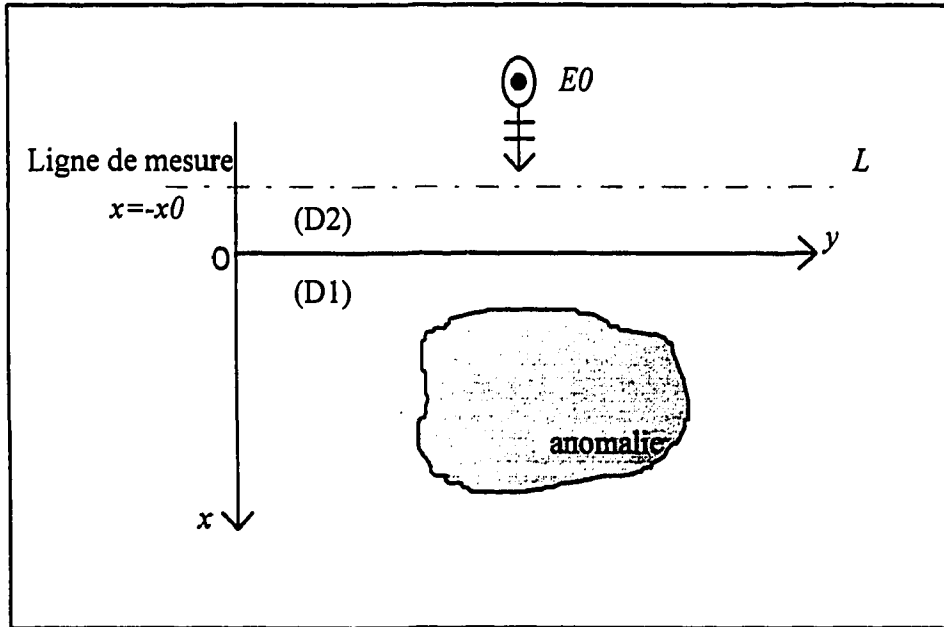


Fig. 3 : Modélisation bidimensionnelle.

## 4.2 Le modèle intégral exact

### 4.2.1 Équations de base

Les notations sont les mêmes que celles du §2.2. Nous considérons, par souci de simplicité, que le champ inducteur  $\vec{E}_0$  est une onde plane en polarisation transverse électrique pénétrant dans le métal sous incidence normale. Ceci correspond au cas d'un inducteur suffisamment long pour pouvoir considérer le champ incident comme uniforme suivant l'axe  $(0y)$ . Le milieu sans perte (D1) a pour nombre d'onde  $k_1$  tel que  $k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ . Le milieu conducteur (D2) a pour nombre d'onde  $k_2$  tel que  $k_2^2 = (1 + j)^2 / \delta^2$ . On note  $\delta = 1 / \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma_0}$  la profondeur de pénétration standard. Le champ inducteur, transmis du milieu (D1) au milieu (D2), satisfait les lois de Fresnel :

$$E_{01}(x, y) = \exp(jk_1 x) + R \exp(-jk_1 x) \quad (x, y) \in D_1 \quad (4.1)$$

$$E_{02}(x, y) = T \exp(jk_2 x) \quad (x, y) \in D_2 \quad (4.2)$$

où  $R$  et  $T$  sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface air/métal. On rappelle que pour l'incidence normale, ces coefficients ont pour expression :

$$R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad (4.3)$$

On remarque qu'en l'absence d'anomalie, les champs, dans l'air et le métal, sont connus et ne sont fonctions que de la variable  $x$  (profondeur de la paroi du tube). En présence de défaut, le champ d'anomalie  $\vec{E}_{1d}$  est fonction de  $x$  et de  $y$ , et il est observé au-dessus de la surface, sur une ligne de mesure  $L$  située dans l'air. On a donc :

$$\vec{E}_{1d} = E_{1d}(\vec{r})\vec{u}_z \quad \text{avec } \vec{r} = (x, y) \quad (4.4)$$

et les équations vectorielles (2.15) et (2.16) liant les champs aux paramètres du défaut deviennent scalaires :

$$E_2(x, y) = E_{02}(x, y) - j\omega\mu_0\sigma_0 \iint_{\Omega} G_{22}(x, x', y - y') f(x', y') E_2(x', y') dx' dy' \quad (4.5)$$

$(x', y') \in \Omega$

$$E_{1d}(x_0, y) = -j\omega\mu_0\sigma_0 \iint_{\Omega} G_{12}(x_0, x', y - y') E_2(x', y') f(x', y') dx' dy' \quad (4.6)$$

$y \in L \subset D_1, (x', y') \in \Omega$

Les fonctions de Green air/métal  $G_{12}$  et métal/métal  $G_{22}$  sont données par [Zorgati, 1990] :

$$G_{12}(x_0, x', y - y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j}{\alpha_2 + \alpha_1} [\exp j(\alpha_2 x' - \alpha_1 x_0)] \exp(ju(y - y')) du \quad (4.7)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{k_1^2 - u^2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \sqrt{k_2^2 - u^2}$$

et

$$G_{22}(x, x', y - y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j}{2\alpha_2} \left[ \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} \exp(j\alpha_2(x + x')) + \exp(j\alpha_2|x - x'|) \right] \exp(ju(y - y')) du \quad (4.8)$$

Comme on peut le constater, les fonctions de Green n'ont pas d'expression simple et la résolution ne peut être faite que dans un cadre numérique.

#### 4.22 Équations discrétisées et mise en œuvre numérique

La méthode de discrétisation retenue est la méthode des moments [Harrington, 1987]. Nous considérons un domaine carré  $\Omega'$  de  $1 \text{ mm}^2$  contenant le défaut  $\Omega$  sur lequel nous construisons un maillage régulier, de telle sorte que les valeurs du champ et de  $\sigma(x, y)$  puissent être considérées comme constants sur chacune des  $N = L^2$  cellules du maillage (Fig. 4).

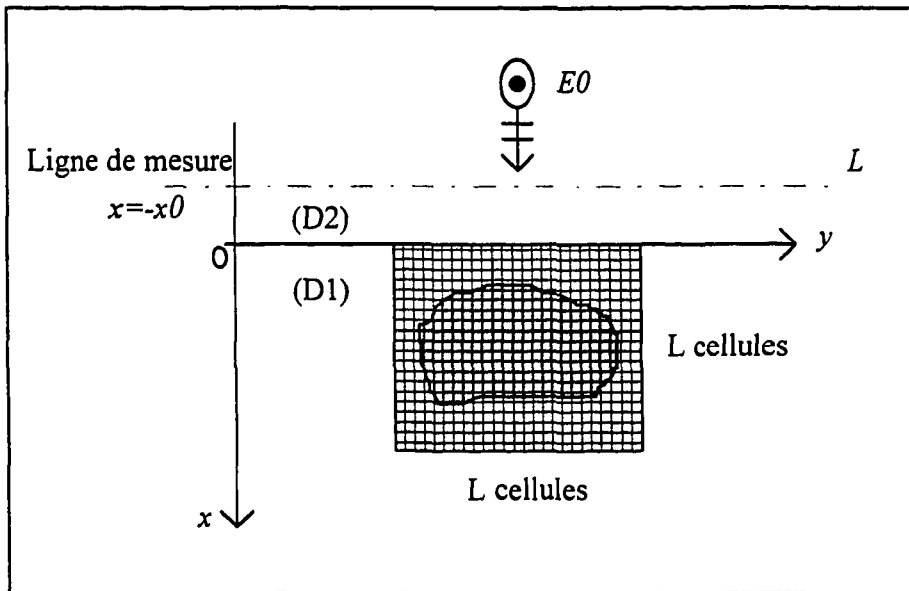


Fig. 4 : Discrétisation du domaine d'étude.

Nous considérons que le métal, non magnétique, a une conductivité de  $6 \cdot 10^6 \text{ S/m}$  et que le défaut est constitué d'air.

##### • Le maillage

Nous cherchons la taille maximale d'une cellule élémentaire permettant le calcul du champ avec une précision donnée. Intuitivement, le critère recherché est de la forme :

$$\Delta = \frac{\lambda}{N_0} = \frac{2\pi\delta}{N_0} \quad N_0 > 1 \quad (4.9)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde du champ dans le milieu conducteur. La profondeur de pénétration étant une fonction de la fréquence, la relation (4.9) montre que la taille maximale  $\Delta$  d'une cellule élémentaire du maillage est fonction de la fréquence. Nous avons choisi de calculer le maillage pour une fréquence maximale de 600 kHz. Dans [Zorgati, 1990], on préconise un choix pour  $\Delta$  tel que  $\Delta \geq \delta/4$  pour assurer la convergence

du processus numérique. Nous donnons, dans le tableau ci-dessous, les valeurs de  $L$  pour des valeurs typiques du pixel  $\Delta$  :

| $\Delta$     | $L = A / \Delta$ |
|--------------|------------------|
| $\delta / 4$ | 15               |
| $\delta / 5$ | 20               |
| $\delta / 7$ | 27               |

Pour limiter la taille-mémoire et le temps de calcul, nous avons retenu  $L=15$ , soit  $N=225$  cellules élémentaires. La taille d'une cellule élémentaires est de  $60 \mu\text{m}$ .

#### • Calcul du champ diffracté exact

L'application de la méthode des moments (cf. §3.1) permet de transformer l'équation intégrale (4.5) en un système d'équations linéaires. Les  $N$  inconnues de ce système sont les valeurs du champ interne au centre  $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$  de chaque cellule  $\Delta_i$  du maillage. L'équation (4.5) s'écrit après discrétisation :

$$E_2(\vec{r}_j) = E_{02}(\vec{r}_j) - j\omega\mu_0\sigma_0 \sum_{i=1}^N f(\vec{r}_i) E_2(\vec{r}_i) \iint_{\Delta_i} G_{22}(\vec{r}_j, \vec{r}') d\vec{r}' \quad j = \overline{1, N}$$

et pour  $\vec{r}'$  placé aux points  $\vec{r}_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ), on obtient :

$$\sum_{i=1}^N \left[ \delta_{ij} + j\omega\mu_0\sigma_0 f(\vec{r}_i) \iint_{\Delta_i} G_{22}(\vec{r}_j, \vec{r}_i) d\vec{r} \right] E_2(\vec{r}_i) = E_{02}(\vec{r}_j)$$

soit sous forme matricielle :

$$(\mathbf{I}_N - \mathbf{G}_2 \mathbf{X}) \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{02} \quad (4.10)$$

avec :  $\mathbf{e}_2$  (resp.  $\mathbf{e}_{02}$ ) : vecteur  $N \times 1$  contenant les valeurs du champ  $E_2$  (resp.  $E_{02}$ ) sur les  $N$  cellules du maillage de la zone de métal étudiée. Ces valeurs sont rangées en balayant cette zone ligne par ligne de gauche à droite (en partant de la surface de séparation air/métal),

$\mathbf{G}_2$  : matrice carrée de taille  $N \times N$ , contenant les valeurs discrètes de la fonction de Green métal/métal, et de terme générique :  $G_{ij} = -j\omega\mu_0\sigma_0 \iint_{\Delta_i} G_{22}(\vec{r}_j, \vec{r}_i) d\vec{r}$

**X** : matrice carrée de taille  $N \times N$  définie par :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} f(\bar{r}_1) & & 0 \\ & f(\bar{r}_i) & \\ 0 & & f(\bar{r}_N) \end{bmatrix} \text{ où } f(\bar{r}_i) = 1 - \frac{\sigma(\bar{r}_i)}{\sigma_0} \text{ sont les valeurs de la}$$

fonction objet sur chaque cellule  $\Delta_i$ .

Pour plus d'information sur le calcul des termes  $G_{ij}$  de la matrice  $\mathbf{G}_2$ , on se reportera à [Zorgati, 1990]. Le champ interne  $E_2$  est obtenu par la résolution du système linéaire (4.10) à l'aide d'un algorithme de Gauss-Jordan ou de gradient conjugué.

L'étape suivante consiste à calculer le champ diffracté externe. En notant  $M$  le nombre de points de mesure sur  $L$  et  $\bar{r}_j = (x_0, y_j)$ , la forme discrète de l'équation intégrale (4.6) s'écrit en utilisant la même procédure :

$$E_{1d}(\bar{r}_j) = -j\omega\mu_0\sigma_0 \sum_{i=1}^N f(\bar{r}_i) E_2(\bar{r}_i) \iint_{\Delta_i} G_{12}(\bar{r}, \bar{r}_j) d\bar{r} \quad j = \overline{1, M}$$

soit sous forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_1 \mathbf{X} \mathbf{e}_2 \quad (4.11)$$

avec :  $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{01}$  : vecteur  $M \times 1$  contenant les échantillons du champ diffracté  $E_{1d}$  prélevés sur la ligne de mesure  $L$ ,

$\mathbf{G}_1$  : matrice de taille  $M \times N$ , contenant les valeurs discrètes de la fonction de Green air/métal et de terme générique :  $G_{ij} = -j\omega\mu_0\sigma_0 \iint_{\Delta_i} G_{12}(\bar{r}, \bar{r}_j) d\bar{r}$ .

### 4.3 Un modèle simplifié

L'objectif maintenant est de définir un modèle simple qui permettra de réduire la complexité de résolution du problème inverse moyennant certaines hypothèses. Le modèle le plus simple est un modèle linéaire qui relie la grandeur observée à la fonction objet. Celui que nous choisissons est du type convolutif : nous supposons que le champ diffracté, mesuré par l'intermédiaire d'un récepteur se trouvant dans l'air, est le résultat de la convolution d'une grandeur  $h$ , par la fonction objet  $f$ . L'équation intégrale de convolution peut donc s'écrire ainsi :

$$E_{1d}(x_0, y) = \iint_{\Omega} h(x_0, x', y - y') f(x', y') dx' dy' \quad (4.12a)$$

Le noyau de l'intégrale  $h$  est la réponse impulsionnelle du modèle. Cette réponse ne dépend pas du défaut et est déterminée par la géométrie adoptée et par la configuration du récepteur avec lequel on collecte les mesures. La fonction objet, définie par :

$$f(x, y) = 1 - \frac{\sigma(x, y)}{\sigma_0} \quad (4.12b)$$

est nulle si le point  $(x, y)$  est dans le métal sain et non nulle si le point  $(x, y)$  appartient au défaut. Elle présente ainsi l'avantage de représenter directement une image du milieu.

#### • Calcul du champ diffracté approché

Le champ diffracté externe approché est la convolution de la réponse impulsionnelle  $h$  par la fonction objet  $f$ . On note :

$x$  le vecteur contenant les  $N = L^2$  valeurs de la fonction objet sur les pixels de discrétisation de la zone  $\Omega^*$ , ces pixels étant rangés en balayant cette zone ligne par ligne de gauche à droite (on appelle couche chacune de ces lignes),

$y$  le vecteur contenant les  $M$  valeurs du champ diffracté prélevées sur la ligne de mesure.

Ce modèle de convolution relativement simple, puisqu'on a fait l'hypothèse de linéarité par rapport à la fonction caractéristique  $f$  du défaut, sous-entend des hypothèses physiques que l'on expose maintenant.

#### • Comparaison avec la solution physique exacte

Par identification de ce modèle avec l'expression (4.6), obtenue par des considérations physiques, on a l'égalité :

$$h(x_0, x', y - y') = -j\omega\mu_0\sigma_0 G_{12}(x_0, x', y - y') E_2(x', y') \quad (4.14)$$

Le champ  $\bar{E}_2$  dépend du défaut puisqu'il est solution de l'équation (4.4). Or en toute rigueur, pour que  $h$  soit une réponse impulsionnelle, il est nécessaire qu'elle soit indépendante du défaut. Le modèle de convolution correspond donc à un modèle physique dans lequel on approxime  $\bar{E}_2$  par le champ  $\bar{E}_{02}$  régnant en l'absence de défaut. Cette

approximation revient à négliger l'équation (4.5) et est appelée **approximation de Born d'ordre 1**, dite approximation de Born forte.  $h$  s'écrit donc :

$$h(x_0, x', y - y') = -j\omega\mu_0\sigma_0 G_{12}(x_0, x', y - y') E_{02}(x', y') \quad (4.15)$$

Le champ diffracté calculé par le modèle de convolution est le champ obtenu en faisant une approximation de type Born d'ordre 1 (forte). On l'appellera, par la suite, champ diffracté approché.

#### • Erreur de modélisation

Le champ diffracté exact peut s'exprimer en introduisant la réponse impulsionnelle  $h$  par :

$$E_{1d}(x_0, y) = \iint_{\Omega} h(x_0, x', y - y') (1 + \alpha(x', y')) f(x', y') dx' dy' \quad (4.16a)$$

avec

$$\alpha(x', y') = \frac{E_2(x', y') - E_{02}(x', y')}{E_{02}(x', y')} \quad (4.16b)$$

Il est donc la convolution de  $h$  par un signal  $f_d = (1 + \alpha)f$  qui dépend du défaut par l'intermédiaire du champ interne total  $E_2$ . L'application des méthodes d'inversion sur ce modèle linéaire ne permet donc pas de retrouver l'image  $f$  du défaut, mais une grandeur perturbée  $f_d = (1 + \alpha)f$ . Le terme  $\alpha$ , qui constitue l'erreur de modèle, a pour expression littérale :

$$\alpha(x, y) = -j\omega\mu_0\sigma_0 \iint_{\Omega} G_{22}(x, x', y - y') f(x', y') \frac{E_2(x', y')}{E_{02}(x', y')} dx' dy' \quad (4.17)$$

On remarque que :

- la valeur de cette erreur croît avec le terme  $\omega\mu_0\sigma_0$  en facteur de l'intégrale,
- pour un facteur  $\omega\mu_0\sigma_0$  donné, son importance augmente avec la taille du défaut puisqu'elle s'exprime comme une intégrale sur le défaut.

Un ordre de grandeur de l'erreur relative sera donné au §5.3 en calculant le terme  $\|(E_2 - E_{02})f\|/\|E_{02}f\|$  pour des défauts de taille variable, à une fréquence de travail de 100 kHz. On étudiera aussi pour un défaut donné, l'évolution de cette erreur avec la fréquence.



• **Analyse de la matrice H**

Après discrétisation, l'équation intégrale de convolution s'écrit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (4.18)$$

Le phénomène d'atténuation, caractéristique des courants de Foucault, confère à la matrice du système la particularité d'être structurée en couches, de sorte que le système s'écrit sous une forme-bloc :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = [\mathbf{H}_1 \mid \dots \mid \mathbf{H}_i \mid \dots \mid \mathbf{H}_L] \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{L,1} \\ x_{1,i} \\ \vdots \\ x_{L,i} \\ x_{1,L} \\ \vdots \\ x_{L,L} \end{pmatrix}$$

• **Effet de l'atténuation sur la structure de H** : la décomposition de la matrice **H** en  $L$  blocs permet d'écrire la relation, valable pour tout bloc  $i$  :

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{G}_{12,i} \cdot \mathbf{E}_{02,i} = \mathbf{G}_{12,i} \cdot T \exp\left(j \frac{1+j}{\delta} \cdot i\Delta\right) \mathbf{I}_L$$

où :  $\mathbf{G}_{12,i}$  est la matrice de Green, ayant une structure de convolution. Cette matrice contient les valeurs, pour les pixels de la couche  $i$ , de la fonction de Green  $G_{12}$  discrétisée,

$\mathbf{E}_{02,i}$  est une matrice de taille  $L \times L$ , contenant les valeurs du champ interne sur la couche  $i$  :  $\mathbf{E}_{02,i} = E_{02}(i) \cdot \mathbf{I}_L$  avec  $E_{02}(i) = T \exp\left(j \frac{1+j}{\delta} \cdot i\Delta\right)$ .

La linéarisation a pour effet d'incorporer des termes exponentiellement amortis dans la matrice de convolution initiale du système. On montre que la matrice **H** peut se décomposer en un produit de deux matrices **A** et **D** [Zorgati, 1994] :

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}\mathbf{D}$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice contenant des termes non exponentiellement amortis et  $\mathbf{D}$  une matrice contenant tous les termes exclusivement exponentiellement amortis. La matrice  $\mathbf{H}$  peut s'écrire :

$$\mathbf{H} = \left[ e^{-\frac{z}{b}} \mathbf{A}_1 \quad \cdot \quad e^{-k\frac{z}{b}} \mathbf{A}_k \quad \cdot \quad e^{-L\frac{z}{b}} \mathbf{A}_L \right]$$

de sorte que (4.18) peut aussi prendre la forme :

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \sum_{k=1}^L e^{-k(\frac{z}{b})} \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k = \mathbf{y} = \sum_{k=1}^L \mathbf{y}_k$$

Cette expression montre que la contribution de la couche  $i$  est atténuée d'un facteur exponentiel, d'autant plus fort qu'elle est enfouie. Cette situation se traduira par la difficulté de reconstruire les défauts en profondeur.

La linéarisation du problème, dans le cadre d'une approximation de Born forte, altère la structure initiale de convolution pure de la matrice du système. L'incorporation de termes exponentiellement amortis aura pour effet prévisible, de dégrader sévèrement l'information en couches profondes, et ainsi, de limiter la zone accessible à l'imagerie par courants de Foucault. On se reportera à [Zorgati, 1994] pour plus de détails sur cette question.

• **Nombre de condition** : en norme  $L_2$ , le nombre de condition d'une matrice est le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière. L'instabilité de la solution du système linéaire  $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$  est liée à ce nombre de condition. En effet, d'après la relation :

$$\frac{\|\mathbf{dx}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{H}) \frac{\|\mathbf{dy}\|}{\|\mathbf{y}\|}$$

une petite erreur  $\mathbf{dy}$  sur les mesures engendre des fluctuations  $\mathbf{dx}$  sur la solution, d'autant plus importantes que le nombre de condition de la matrice  $\mathbf{H}$ , noté  $\text{cond}(\mathbf{H})$ , est grand. Ce nombre de condition pour une matrice  $\mathbf{H}$  de taille fixée ( $400 \times 225$ ) a pour valeurs typiques en courants de Foucault :

- $\text{cond}(\mathbf{H}) = 3 \cdot 10^9$  à  $f = 20$  kHz
- $\text{cond}(\mathbf{H}) = 10^{11}$  à  $f = 400$  kHz

Le problème inverse "Courants de Foucault" est donc extrêmement mal conditionné et ceci d'autant plus que la fréquence est élevée. Cet aspect est illustré par les courbes du spectre des valeurs singulières de  $\mathbf{H}$  (Figure 5).

• **Intérêt d'un tel modèle**

Ce modèle simplifié a pour intérêt principal de simplifier la résolution du problème inverse. En effet, la résolution inverse exacte suppose la prise en compte de deux équations couplées. Il s'agit d'un problème inverse non linéaire particulièrement difficile. Avant d'aborder l'inversion non linéaire, il semble logique d'étudier les difficultés de résolution du problème inverse linéarisé (caractère mal-posé de l'équation de première espèce et phénomène d'atténuation de l'onde électromagnétique dans le milieu). Ce modèle, ainsi que le modèle exact, ont été utilisés dans [Hamman et Zorgati, 1994] pour l'étude du problème inverse associé.

Au §5.3, les performances de ce modèle seront étudiés, et quantifiées en comparant directement les valeurs qu'il fournit à celles données par résolution du problème exact. On tentera de définir alors son domaine de validité en fonction des paramètres pertinents du problème, fréquence d'excitation et taille du défaut.

## 5. RÉSULTATS

Nous avons simulé un certain nombre de situations afin d'évaluer l'influence des paramètres du problème. Nous avons plus particulièrement cherché à mettre en évidence d'éventuelles situations remarquables. Sans que l'étude ne soit exhaustive, nous nous sommes intéressés à l'influence, sur le champ diffracté exact, de la fréquence d'excitation, de la localisation du défaut ainsi que de la hauteur de la ligne de mesure. Nous avons comparé systématiquement le champ diffracté exact et le champ diffracté approché, calculé par le modèle de convolution (évaluation qualitative). Pour chaque défaut simulé, nous avons calculé l'erreur de modèle (évaluation quantitative). Une étude de l'évolution de cette erreur avec la fréquence a aussi été menée.

### 5.1 Les défauts simulés

La situation étudiée concerne des défauts, de type "absence de métal" (fissure, entaille, gorge), pour lesquels la conductivité d'anomalie est supposée être voisine de celle de l'air, soit  $10^{-9}$  S/m. Nous donnons, dans le tableau ci-dessous, les noms, les dimensions (profondeur en  $x$ , largeur en  $y$ ) et les types des défauts que nous avons simulés :

| Défaut | Taille                               | Type        |
|--------|--------------------------------------|-------------|
| A1     | $60\mu\text{m} \times 60\mu\text{m}$ | débouchant  |
| A2     | $0.1\text{mm} \times 60\mu\text{m}$  | débouchant  |
| A3     | $0.1\text{mm} \times 0.1\text{mm}$   | débouchant  |
| A4     | $0.2\text{mm} \times 0.2\text{mm}$   | débouchant  |
| A5     | $1\text{mm} \times 60\mu\text{m}$    | débouchant  |
| A6     | $0.5\text{mm} \times 60\mu\text{m}$  | débouchant  |
| A7     | $0.5\text{mm} \times 60\mu\text{m}$  | enfoui      |
| A8     | $1\text{mm} \times 0.1\text{mm}$     | débouchant  |
| A9     | $0.2\text{mm} \times 1\text{mm}$     | superficiel |
| A10    | $0.5\text{mm} \times 0.5\text{mm}$   | débouchant  |

Les courbes du champ diffracté exact, sous forme de sa partie réelle et de sa partie imaginaire, pour chacun de ces défauts, sont rassemblées en **Annexe A**. La collecte des mesures, sur la ligne de mesure  $L$  située dans l'air (cf. Fig. 3, §4.1), se fait avec un pas d'échantillonnage égal à la taille de la cellule élémentaire du maillage. Figurent également les courbes de Lissajous, associées aux modes de mesure absolu et différentiel.

Les "signaux" du champ diffracté exact seront utilisés par la suite pour valider le modèle linéaire élaboré au §4.3.

## 5.2 Influence de quelques paramètres caractéristiques

Un phénomène caractéristique de la physique des courants de Foucault est l'atténuation exponentielle du champ exciteur selon la profondeur. Cet effet de peau a pour conséquence de concentrer les lignes de courants induits dans le métal au voisinage de la surface. L'épaisseur de cette zone, appelé épaisseur de peau, varie avec l'inverse de la racine carrée de la fréquence du champ exciteur. Nous étudions à présent l'influence, sur le champ diffracté, de quelques paramètres.

- **Influence de la localisation du défaut sur le champ diffracté** : pour une fréquence du champ exciteur donné, plus le défaut est localisé en surface, plus le champ diffracté est important. Inversement, le champ diffracté est très faible voire quasi-nul lorsque le défaut est enfoui en-dessous de la zone de peau (courbes en **Annexe B**).
- **Influence de la présence d'un défaut en surface** : nous considérons deux défauts situés dans l'épaisseur de peau. L'un est localisé en surface et l'autre est enfoui. Nous calculons l'écart entre le champ diffracté par le défaut enfoui et la différence entre le champ diffracté par les deux défauts et le champ diffracté par le défaut situé en surface. Cette étude montre qu'un défaut suffisamment important situé en surface concentre les lignes de courant de telle manière qu'il "cache" la présence d'un défaut enfoui. Un petit défaut superficiel n'a pas cette influence (courbes en **Annexe B**). Une reconstruction couche par couche devrait pouvoir remédier à cet obstacle.
- **Influence de la fréquence d'excitation sur le champ diffracté** : une étude en fréquence (courbes **Annexe B**) montre que l'augmentation de la fréquence d'excitation s'accompagne d'une diminution de la largeur du signal. Ainsi plus la fréquence est élevée, meilleure est la résolution. En contrepartie, la profondeur de pénétration devient infime et la zone accessible à l'imagerie aussi. On peut donc penser que la largeur du signal est plus importante pour les couches enfouies que pour les couches internes.
- **Influence de la hauteur de la ligne de mesure** : nous avons effectué des simulations pour trois positions de la ligne de mesure : 0.5 mm, 1 mm et 1.5 mm. Les courbes obtenues sont données en **Annexe B**. On constate que l'amplitude du champ diffracté décroît à mesure que l'on s'éloigne de l'interface air/métal, ce qui est un comportement tout à fait "prévisible". Cet éloignement s'accompagne d'une augmentation de la largeur du signal et donc d'une diminution de la résolution. Ces courbes présentent une forte analogie avec celles obtenues pour l'étude en fréquence.
- **Conclusion** : un défaut, localisé hors de la zone de peau, ne peut pas être correctement détecté. On doit donc choisir une fréquence suffisamment faible pour détecter un défaut situé en profondeur. Inversement, un défaut de petite taille localisé en surface sera d'autant mieux détecté que la fréquence est élevée. Le choix du meilleur compromis profondeur de pénétration/résolution constitue une difficulté majeure de l'imagerie par courants de Foucault.

### 5.3 Performances du modèle de pseudo-convolution

• **Défauts de taille variable, fréquence fixée** : pour chaque défaut, nous comparons la courbe du champ diffracté exact et celle du champ diffracté approché, calculé par le modèle de pseudo-convolution. La fréquence choisie pour cette étude est 100 kHz, valeur courante en CND par courants de Foucault. Ces courbes sont rassemblées en Annexe C.

Cette évaluation qualitative du comportement du modèle est complétée par une évaluation quantitative. Un ordre de grandeur de l'erreur de modèle  $\alpha$ , due à l'approximation de Born est donné dans le tableau ci-dessous, en calculant l'erreur relative sur le défaut  $\|(E_2 - E_{02})f\|/\|E_{02}f\|$ .

| Défaut | Erreur (%) |
|--------|------------|
| A1     | 1.22       |
| A2     | 2.07       |
| A3     | 3.7        |
| A4     | 7.02       |
| A5     | 5.54       |
| A6     | 4.42       |
| A7     | 4.02       |
| A8     | 10.82      |
| A9     | 21.45      |
| A10    | 24.75      |

Nous constatons que le modèle fournit des résultats acceptables lorsque les défauts sont de petite taille (jusqu'à 3% de la surface de métal étudiée : A1, A2, A3, A6). En revanche, les résultats se dégradent lorsque le défaut atteint une taille importante : 10% et plus de la surface de métal étudié (A8, A9, A10). La validité du modèle demeure critique pour les défauts de taille intermédiaire : 4 à 10% de la surface de métal étudié (A4, A5). Les résultats pour les défauts enfouis, tel A7, sont aussi bons que ceux obtenus pour les défauts internes, tel A6.

• **Défauts de même surface, fréquence variable** : on étudie l'évolution de l'erreur du modèle en fonction de la fréquence. On considère trois défauts de même surface :

| Défaut | Taille        |
|--------|---------------|
| A4     | 0.2mm × 0.2mm |
| A4a    | 0.1mm × 0.4mm |
| A4b    | 0.4mm × 0.1mm |

On constate que l'erreur devient rapidement rédhibitoire lorsque la fréquence augmente (3% d'erreur à 40 kHz, 20 à 25 % d'erreur à 400 kHz). L'approximation de Born est donc

erronée à haute fréquence. L'erreur est quasiment la même en basse fréquence ( $f \leq 40$  kHz) pour les trois défauts. En revanche, à haute fréquence, l'erreur est beaucoup plus grande pour le défaut plus étendu en surface. Pour un aperçu qualitatif sur le comportement du modèle, nous donnons, pour le défaut A4, les courbes des champs diffractés, exact et approché, à 40 kHz et 400 kHz (courbes en **Annexe C**).

• **Conclusion** : les résultats obtenus confirment la justification théorique, selon laquelle le modèle de pseudo-convolution est valable lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites simultanément :

- fréquence d'excitation basse,
- petits défauts.

À une fréquence courante en CND par courants de Foucault (100 kHz), la validité du modèle est confirmée pour des défauts qui occupent jusqu'à 3% de la surface de métal étudiée, mais demeure critique pour des défauts de taille intermédiaire – 4 à 10% de la surface.

#### 5.4 Intérêt d'une approche multifréquences et choix des fréquences

• Une approche "multifréquences" peut faciliter la tâche d'inversion à deux niveaux :

##### a) Réduction du nombre de condition de la matrice

Pour une approche "multifréquences" globale, l'élaboration du système linéaire à partir de l'ensemble des données disponibles se fait comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{f_k} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{f_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{f_k} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{f_n} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

avec

$\mathbf{y}_{f_k}$  : le vecteur  $M \times 1$  contenant les valeurs du champ diffracté à la fréquence  $f_k$

$\mathbf{H}_{f_k}$  : la matrice  $M \times N$  du système linéaire pour la fréquence  $f_k$

$\mathbf{x}$  : le vecteur  $N \times 1$  contenant les valeurs de la fonction objet sur les pixels de la zone de métal étudié.

La solution  $\mathbf{x}$  de ce système étant réelle, on écrira  $\mathbf{y}_{f_k} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{y}_{f_k}) \\ \text{Im}(\mathbf{y}_{f_k}) \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{H}_{f_k} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{H}_{f_k}) \\ \text{Im}(\mathbf{H}_{f_k}) \end{bmatrix}$ .

Cet assemblage, en mode "multifréquences" global, confère à la matrice  $\mathbf{H}$  du système linéaire une structure globalement triangulaire, ce qui devrait améliorer son conditionnement.

#### b) Information sur le défaut

En vertu du phénomène de peau auquel sont soumis les courants de Foucault, chaque jeu de données contient une information sur le défaut, spécifique de la profondeur de pénétration atteinte d'après la fréquence d'excitation utilisée. Le fait d'utiliser plusieurs fréquences devrait ainsi apporter plus d'informations sur le défaut.

- **Choix des fréquences** : la réduction du nombre de condition de la matrice  $\mathbf{H}$  globale dépendant des fréquences, un choix judicieux est à définir. En raison de l'effet de peau, il semble logique de choisir les fréquences en échelle logarithmique dans la gamme de fréquences considérée, [20 kHz, 400 kHz]. Le nombre de fréquences a été choisi par essais en étudiant le spectre des valeurs singulières (Figure 5). Nous constatons que l'utilisation de plusieurs fréquences en échelle logarithmique ralentit la décroissance vers 0 des valeurs singulières et améliore le nombre de condition par rapport à la situation à 400 kHz. L'utilisation de 10 fréquences n'apporte pas d'améliorations considérables par rapport à 5 fréquences. On se limitera donc à 5 fréquences en échelle logarithmique, par la suite. Les valeurs de ces fréquences sont : [20, 40, 90, 200, 400] kHz. Néanmoins, le conditionnement de  $\mathbf{H}$  reste très élevé,  $10^9$ . Une régularisation du problème s'avère donc indispensable.

### 5.5 Conclusion

En courants de Foucault, le phénomène d'atténuation du champ électromagnétique dans le métal est aussi important que celui de propagation. De fait, le choix du meilleur compromis profondeur de pénétration/résolution s'avère critique. Le phénomène d'atténuation se manifeste sur la résolution du problème inverse par une accentuation du caractère mal-posé du problème. Les termes exponentiellement amortis incorporés dans la matrice  $\mathbf{H}$  du modèle de convolution, conséquence directe de la linéarisation par approximation de Born, ont pour effet de masquer les contributions de profondeur du défaut. Cette situation devrait se traduire par une difficulté de reconstruction en profondeur des défauts.



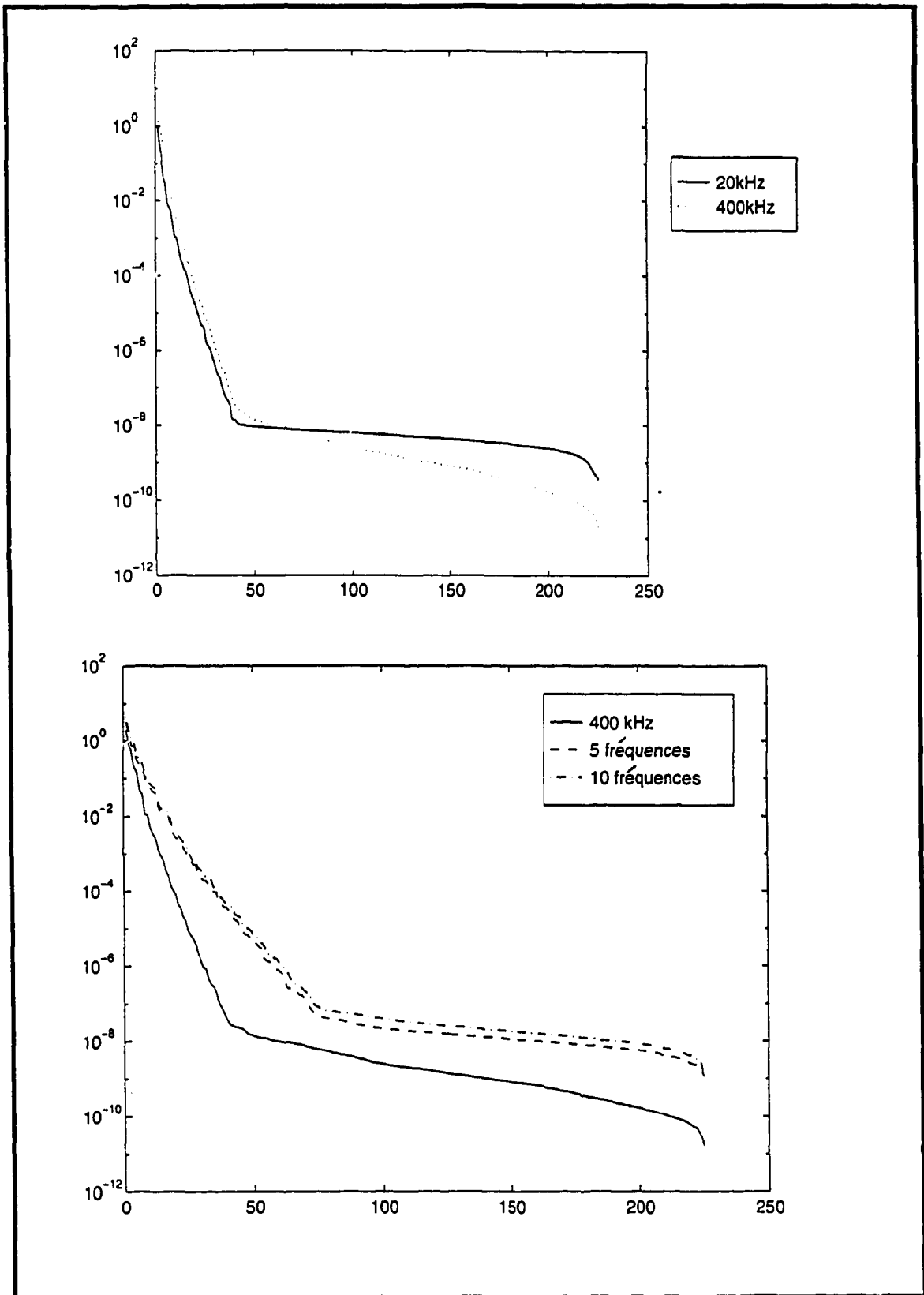


Figure 5 : Spectre des valeurs singulières de la matrice  $H$

## CONCLUSION

Le Contrôle Non Destructif par courants de Foucault (CND) est utilisé à EDF pour la détection de défauts altérant des objets conducteurs tels que les tubes de générateurs de vapeur. Afin de faciliter le diagnostic, une nouvelle technique est étudiée : l'imagerie par courants de Foucault.

La première étape, objet de ce travail, consiste à résoudre le problème direct. Il s'agit de déterminer les grandeurs mesurables (champs ou impédance), connaissant parfaitement le matériau. Dans cette optique, nous avons formulé le problème direct en courants de Foucault dans le cas général d'une géométrie 3D, appliquant la théorie des distributions et les équations de Maxwell. Le modèle, étudié par la suite, permettra de définir et orienter les études en inversion d'une part, et de générer les signaux synthétiques qui serviront de données au problème inverse d'autre part.

Les méthodes d'inversion connues étant fondées sur une représentation intégrale des champs, les codes aux "éléments finis" conviennent difficilement, en l'état actuel, pour l'inversion. Ainsi, pour des raisons pratiques de disponibilité d'un modèle réaliste et conforme aux exigences de la démarche inverse, nous avons abordé le problème direct du contrôle par courants de Foucault pour une situation simplifiée, à l'aide d'une formulation intégrale. Sans porter atteinte à la pérennité des développements, passés ou à venir en inversion, nous nous sommes ainsi limités au cas d'un bloc-plan semi-infini, excité en régime harmonique par une source, en mode transverse électrique, de type onde plane.

Pour cette configuration, nous avons étudié un modèle de pseudo-convolution, que nous avons validé en comparant, de manière quantifiée, ses résultats à ceux fournis par le modèle exact. Le modèle linéarisé fournit des bons résultats, pourvu que les défauts ne soient pas de très grande taille et que la fréquence d'excitation soit faible. Ce n'est pas toujours le cas pour la gamme de fréquences couramment utilisée en CND par courants de Foucault.

Nous avons ensuite simulé un certain nombre de situations afin d'évaluer l'influence de certains paramètres du problème. Nous avons plus particulièrement cherché à mettre en évidence d'éventuelles situations remarquables. Nous nous sommes intéressés à l'influence, sur le champ diffracté exact, de la fréquence d'excitation, de la localisation du défaut ainsi que de la hauteur de la ligne de mesure.

Cette étude met en évidence l'importance du phénomène d'atténuation du champ électromagnétique dans l'imagerie par courants de Foucault. L'incorporation de termes exponentiellement amortis dans la matrice du modèle initial de convolution a pour effet de masquer les contributions de profondeur du défaut. Cette situation se traduira par la difficulté de reconstruction en profondeur des défauts à une fréquence donnée. Une approche "multifréquences" du problème apporte quelques améliorations (information plus complète, réduction du conditionnement de la matrice du système). Néanmoins, il sera nécessaire d'utiliser des méthodes performantes de régularisation, spécifiques aux problèmes inverses mal-posés. Il faudra surtout tenter d'apporter des éléments de solution au problème de l'atténuation.

## PERSPECTIVES

Pour traiter des données réelles, il sera nécessaire de disposer d'outils de résolution du problème direct 3D, dont la formulation devra être conforme aux exigences imposées par la démarche inverse. En l'état actuel de nos connaissances, ce développement suppose un effort d'importance moyenne, pour une échéance de réalisation à court/moyen terme.

Cet investissement, s'il était décidé, permettrait, en complément au code généraliste TRIFOU, de disposer de codes dédiés à des usages spécifiques, spécialisés pour des situations d'intérêt en CND et mieux adaptés *a priori* à d'éventuels transferts sur site, en cas de succès de nos travaux. Le code générique TRIFOU servirait, dans ces conditions, de logiciel de référence (validation des codes spécialisés, étude des limites de validité des approximations, étude de cas trop complexes pour les codes dédiés, etc).

Parallèlement, la conception d'une sonde, adaptée à l'imagerie par courants de Foucault, doit être envisagée.

## BIBLIOGRAPHIE

**Fournet, 1979** : "Électromagnétisme", Dunod, Paris, 1979.

**Hamman et Zorgati, 1994** : "Imagerie par courants de Foucault. Limites de l'approximation de Born et intérêt d'une résolution exacte du problème inverse", Rapport EDF-DER HP21/94/030, juillet 1994.

**Harrington, 1987** : "The Method of Moments in Electromagnetics", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol. 1, Number 3, 181-200, 1987.

**Pichot, 1986** : "Électromagnétisme", Techniques de l'Ingénieur 6-1986, E1200-3 à E1201-11, 1986.

**Prémel, 1992** : "Imagerie tomographique des milieux conducteurs par courants de Foucault : Application au contrôle non destructif des tubes métalliques", Thèse de doctorat de l'Université de Paris-Sud-Orsay, décembre 1992.

**Roddier, 1971** : "Distributions et transformation de Fourier", Édi-Science, Paris, 1971.

**Stratton, 1961** : "Théorie de l'électromagnétisme", Dunod, Paris, 1961.

**Zorgati, 1990** : "Imagerie par courants de Foucault. Application au contrôle non destructif", Thèse de doctorat de l'Université Paris VII, juin 1990.

**Zorgati, 1994** : "Eddy-Current Imaging : Approaches, Formulations and Problems", À paraître dans les actes du Congrès ISIP'94 : International Symposium on Inverse Problems in Mechanical Engineering, Paris/Clamart, 2-4 Novembre 1994.

## **ANNEXE A : COURBES DU CHAMP DIFFRACTÉ EXACT**

Cette annexe regroupe les courbes du champ diffracté exact à 100 kHz pour chacun des défauts simulés. Le carré de métal étudié est représenté sur la première figure. Les axes sont gradués en nombre de mailles. L'interface air/métal est en haut de la figure. Le défaut est représenté en noir. Le champ diffracté exact est représenté sous forme de sa partie réelle et de sa partie imaginaire. Figurent également les courbes de Lissajous associées aux modes de mesure absolu et différentiel.

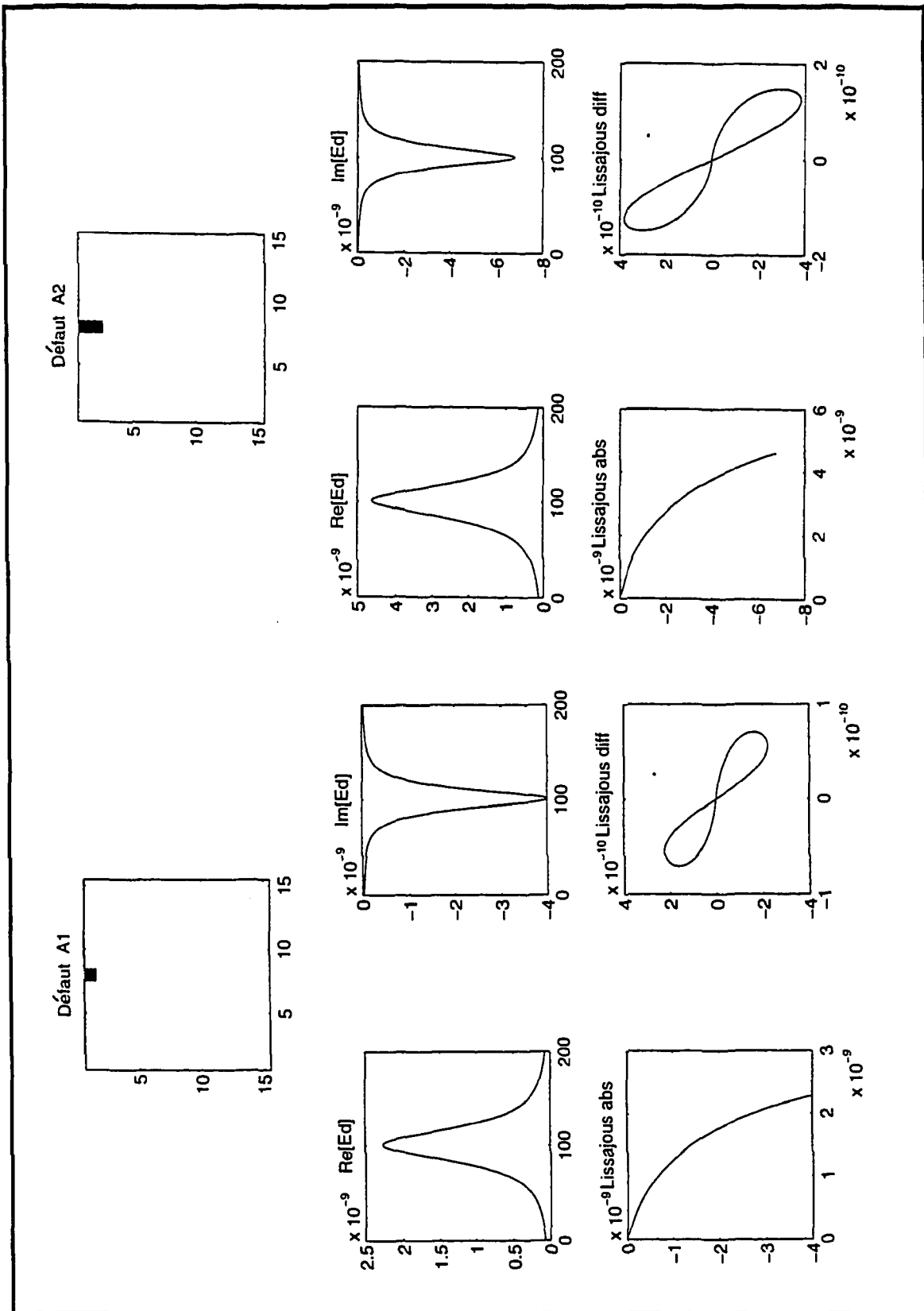


Figure A1 : Champ diffracté pour les défauts A1 et A2.

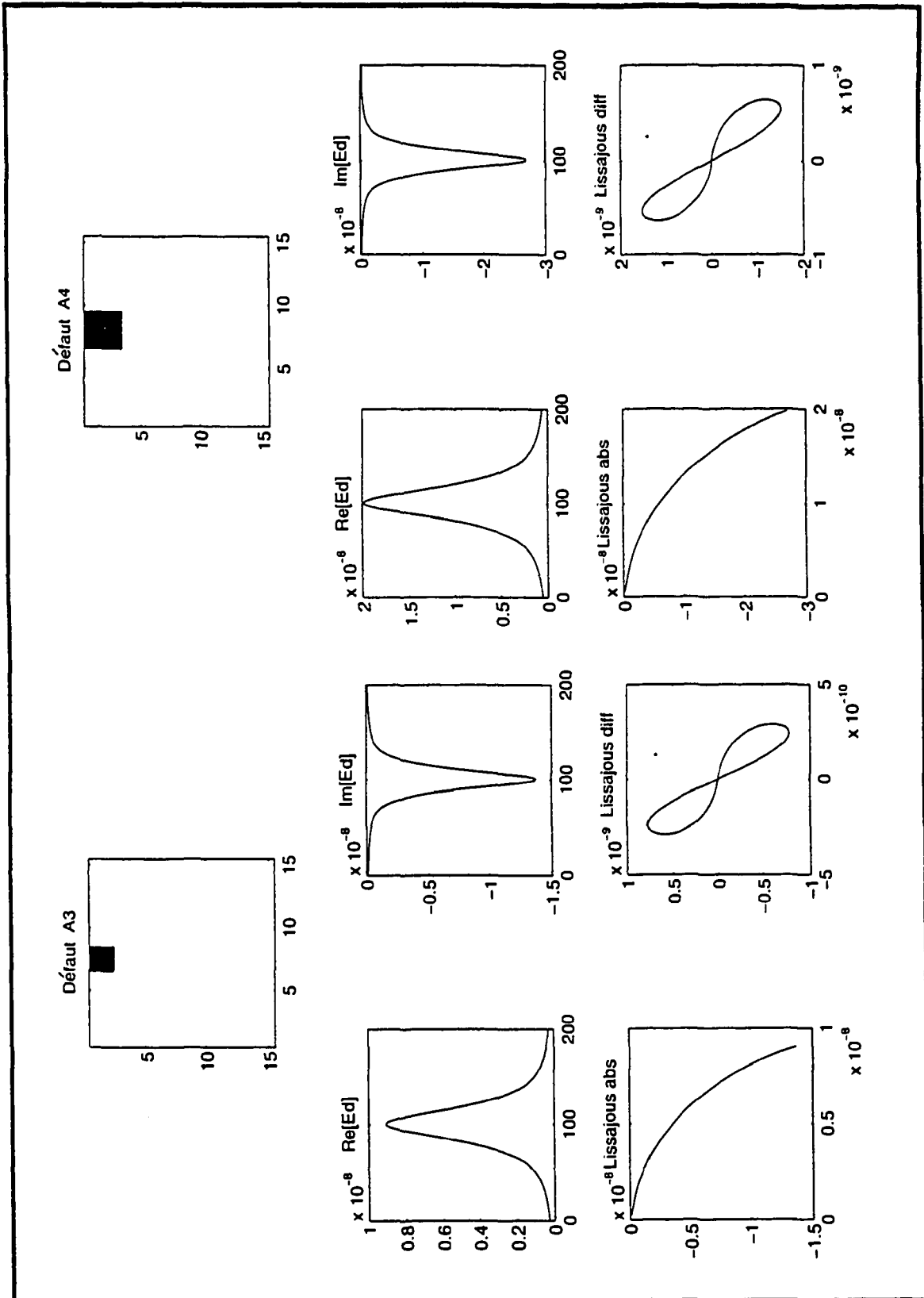


Figure A2 : Champ diffracté pour les défauts A3 et A4.

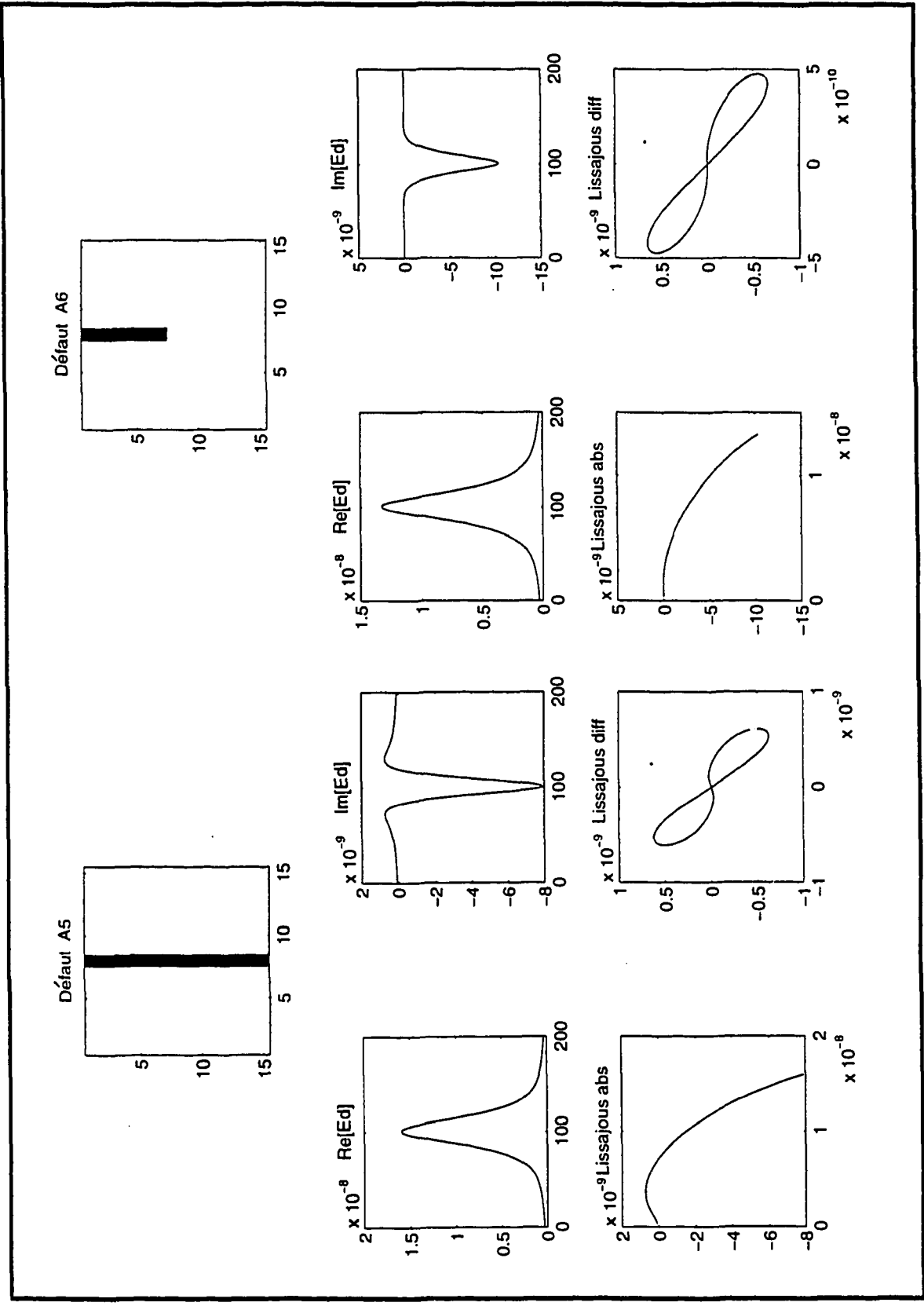


Figure A3 : Champ diffracté pour les défauts A5 et A6.



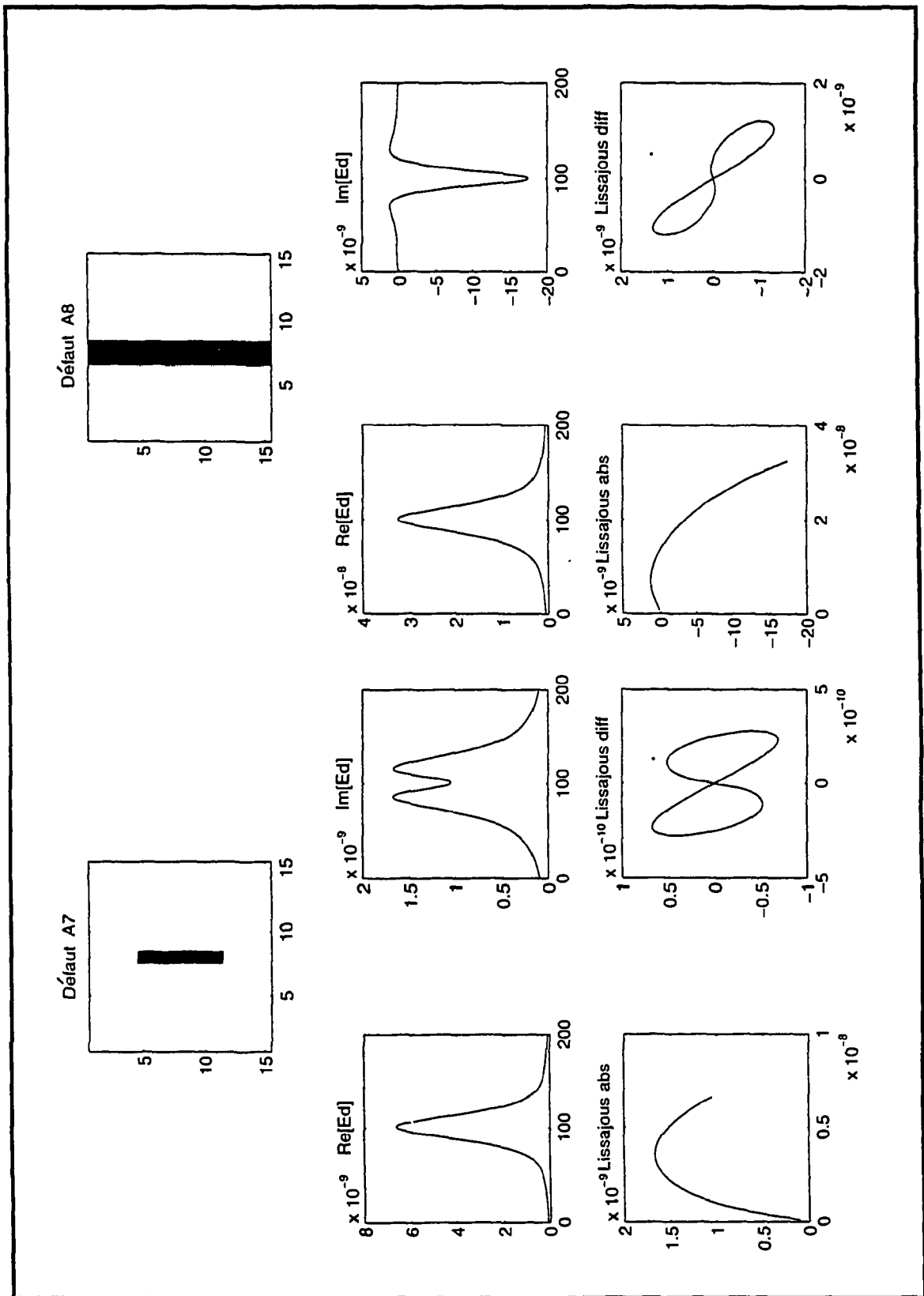


Figure A4: Champ diffracté pour les défauts A7 et A8.

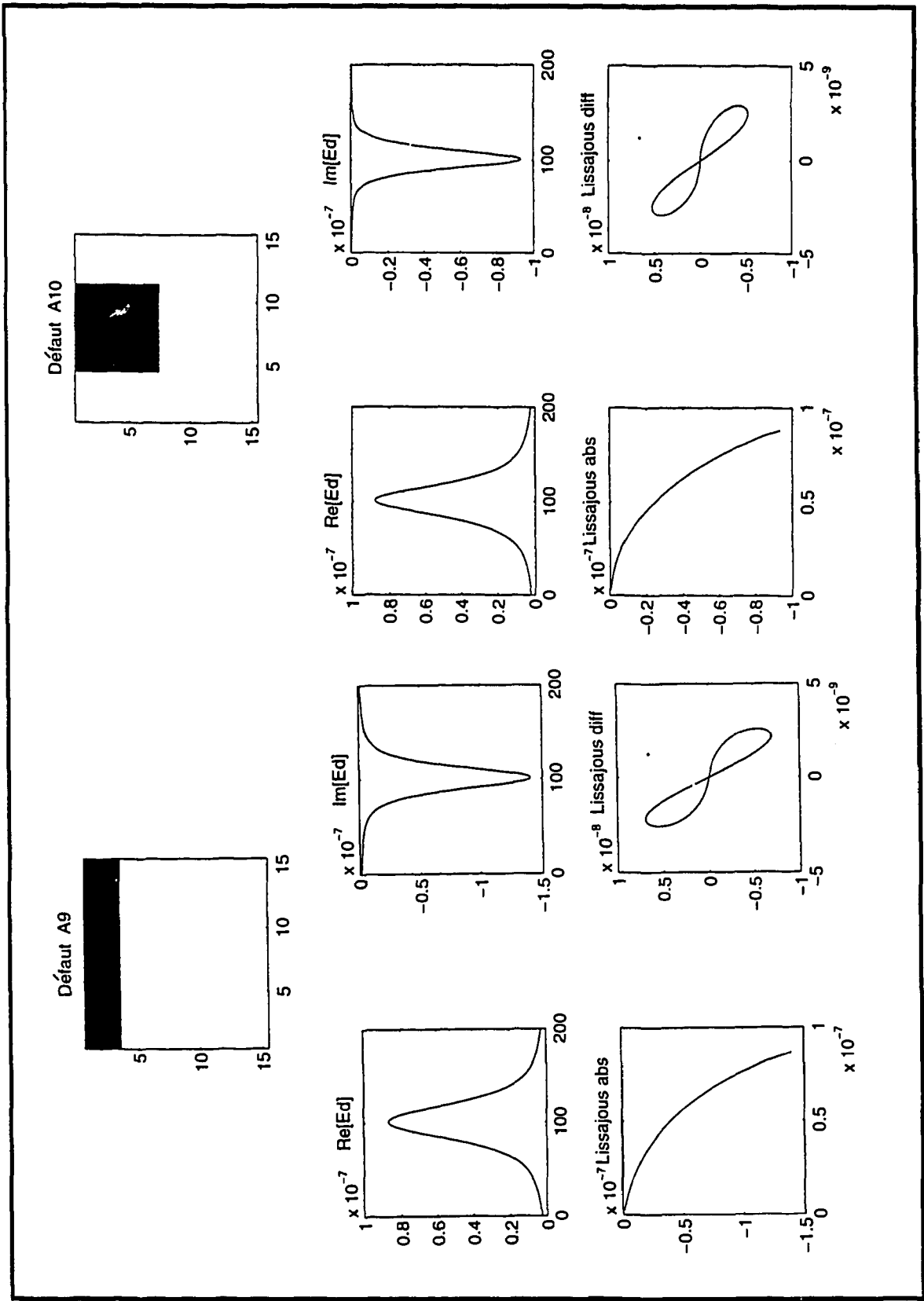


Figure A5: Champ diffracté pour les défauts A9 et A10.

## **ANNEXE B : ÉTUDE PARAMÉTRIQUE**

Cette annexe regroupe les simulations faites afin d'évaluer l'influence de certains paramètres du problème – localisation du défaut, présence d'un défaut en surface, fréquence d'excitation, hauteur de la ligne de mesure – sur le champ diffracté exact. Le champ diffracté exact est représenté sous forme de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

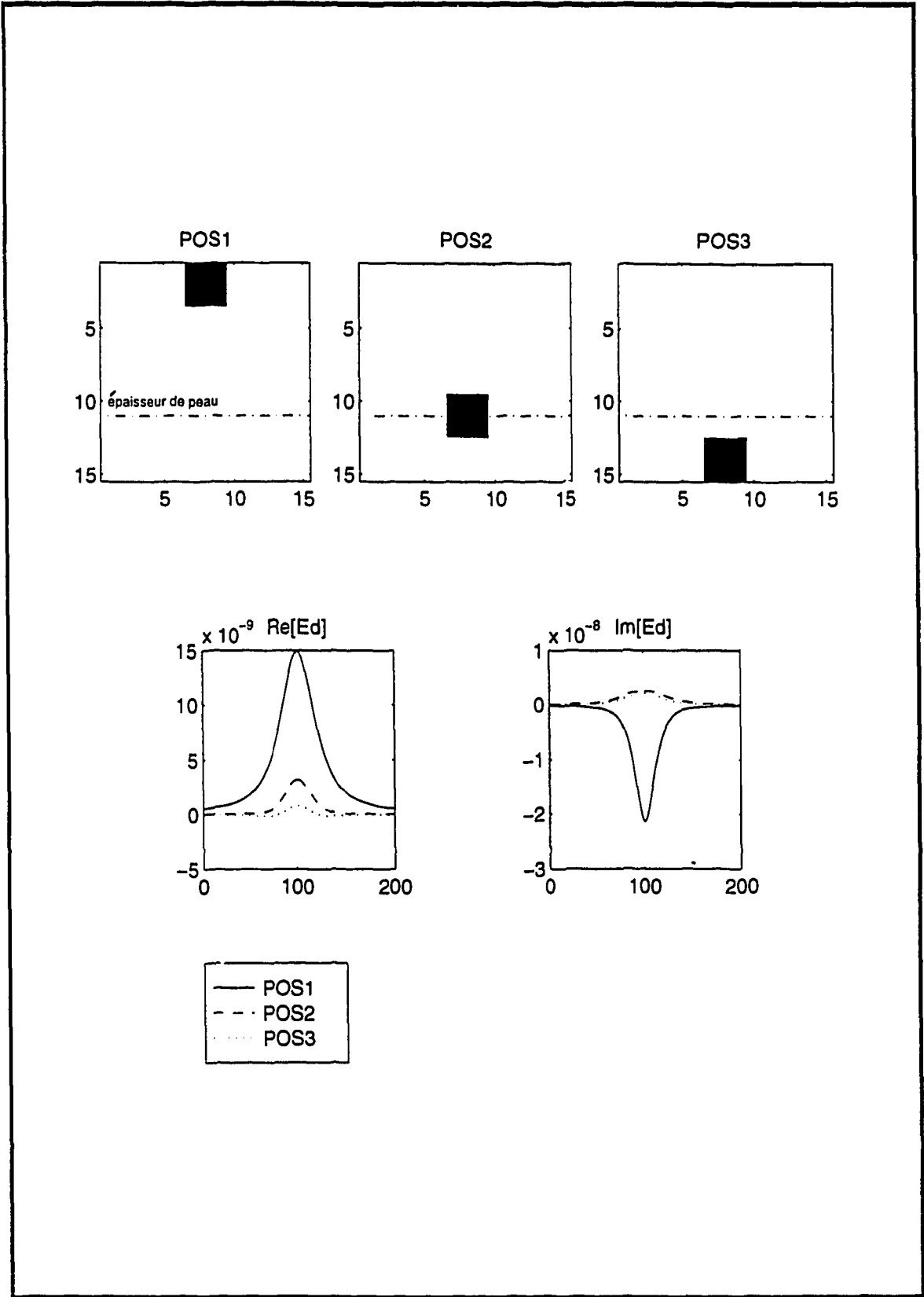


Figure B1 : Influence de la localisation du défaut sur le champ diffracté.

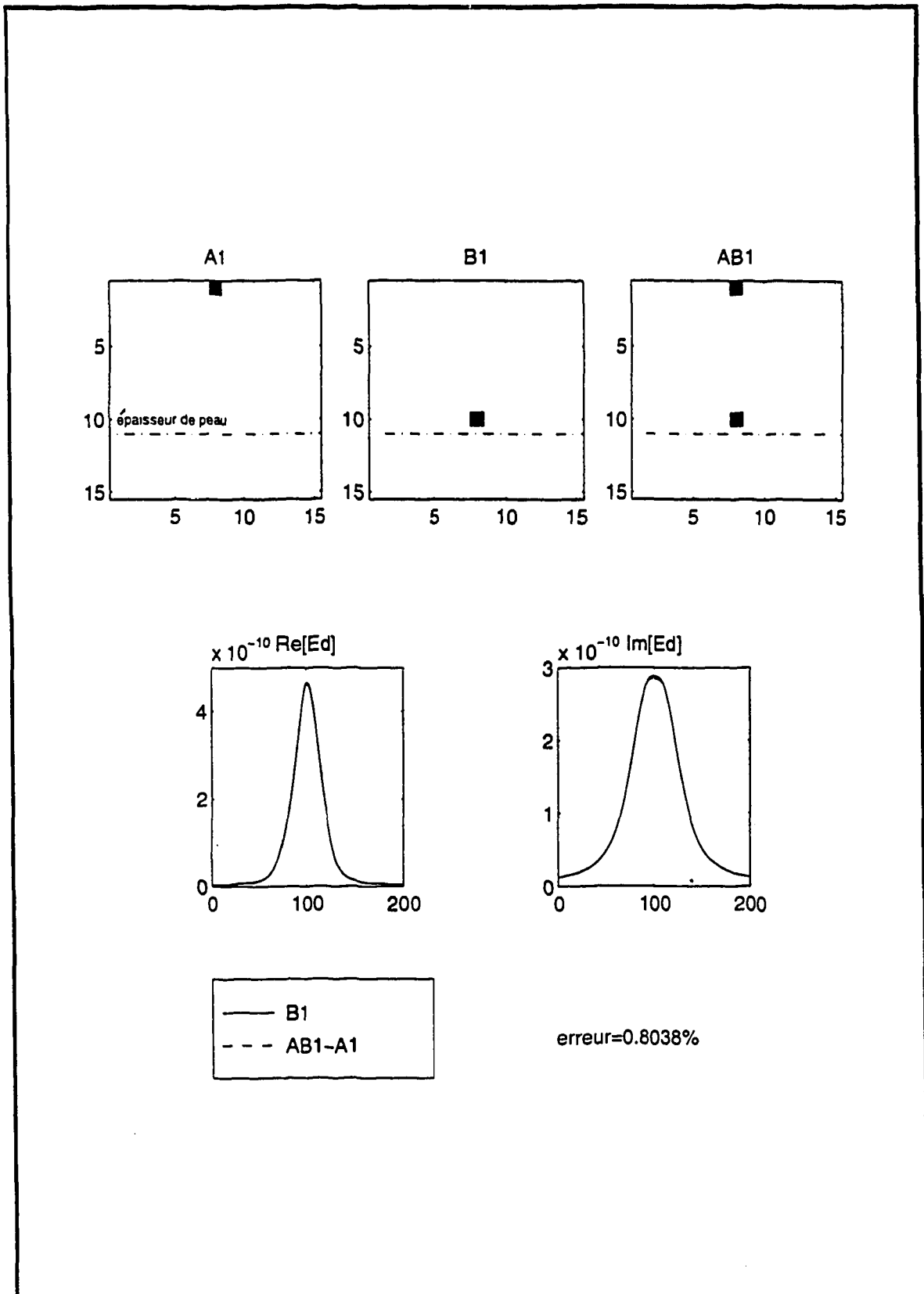
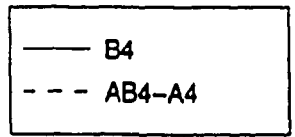
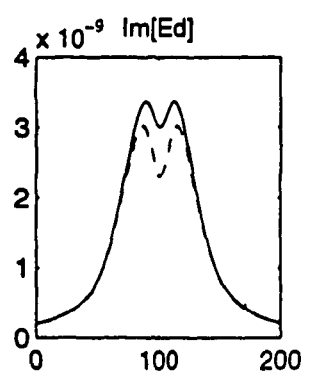
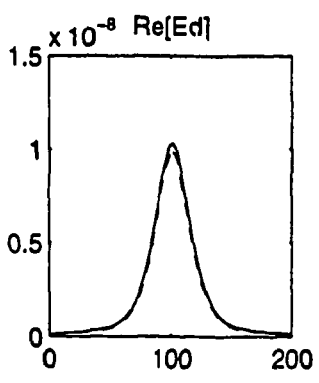
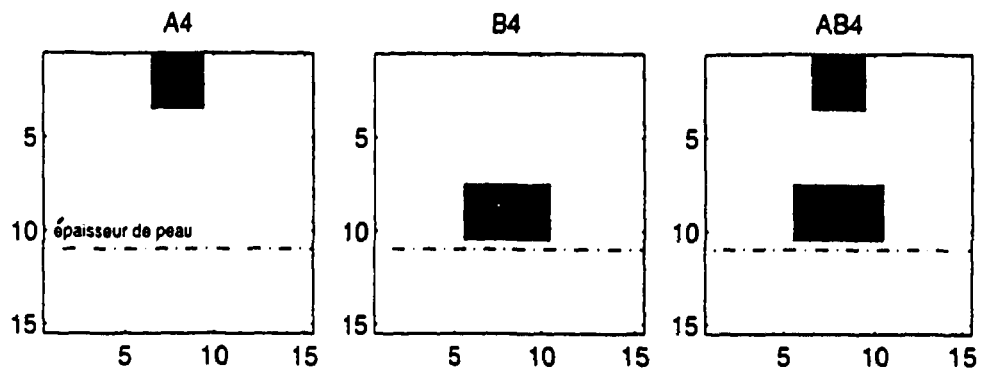


Figure B2 : Effet de masquage d'un défaut enfoui par un défaut débouchant - cas 1.



erreur=7.66%

Figure B3 : Effet de masquage d'un défaut enfoui par un défaut débouchant - cas 2.

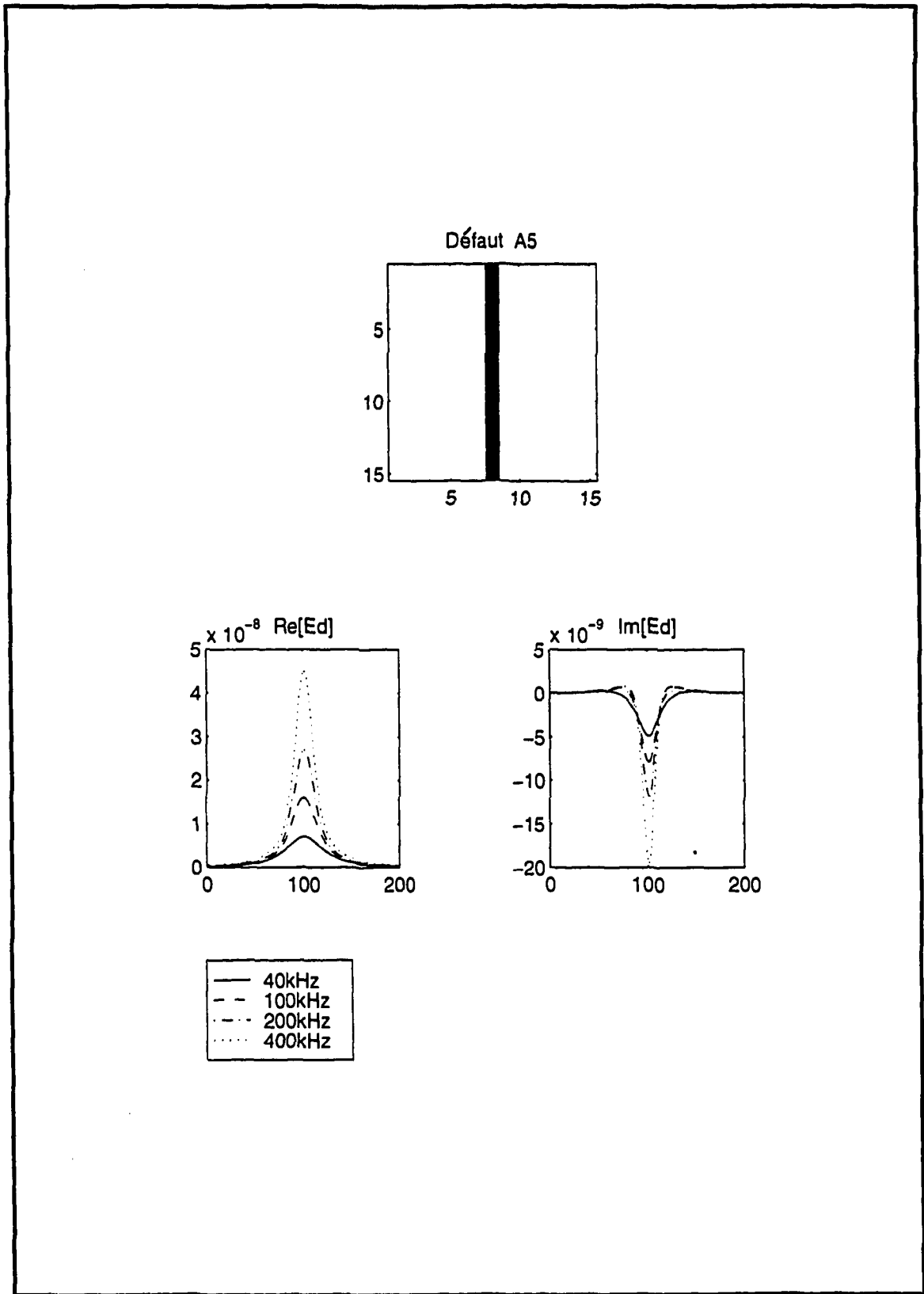


Figure B4 : Influence de la fréquence sur le champ diffracté.

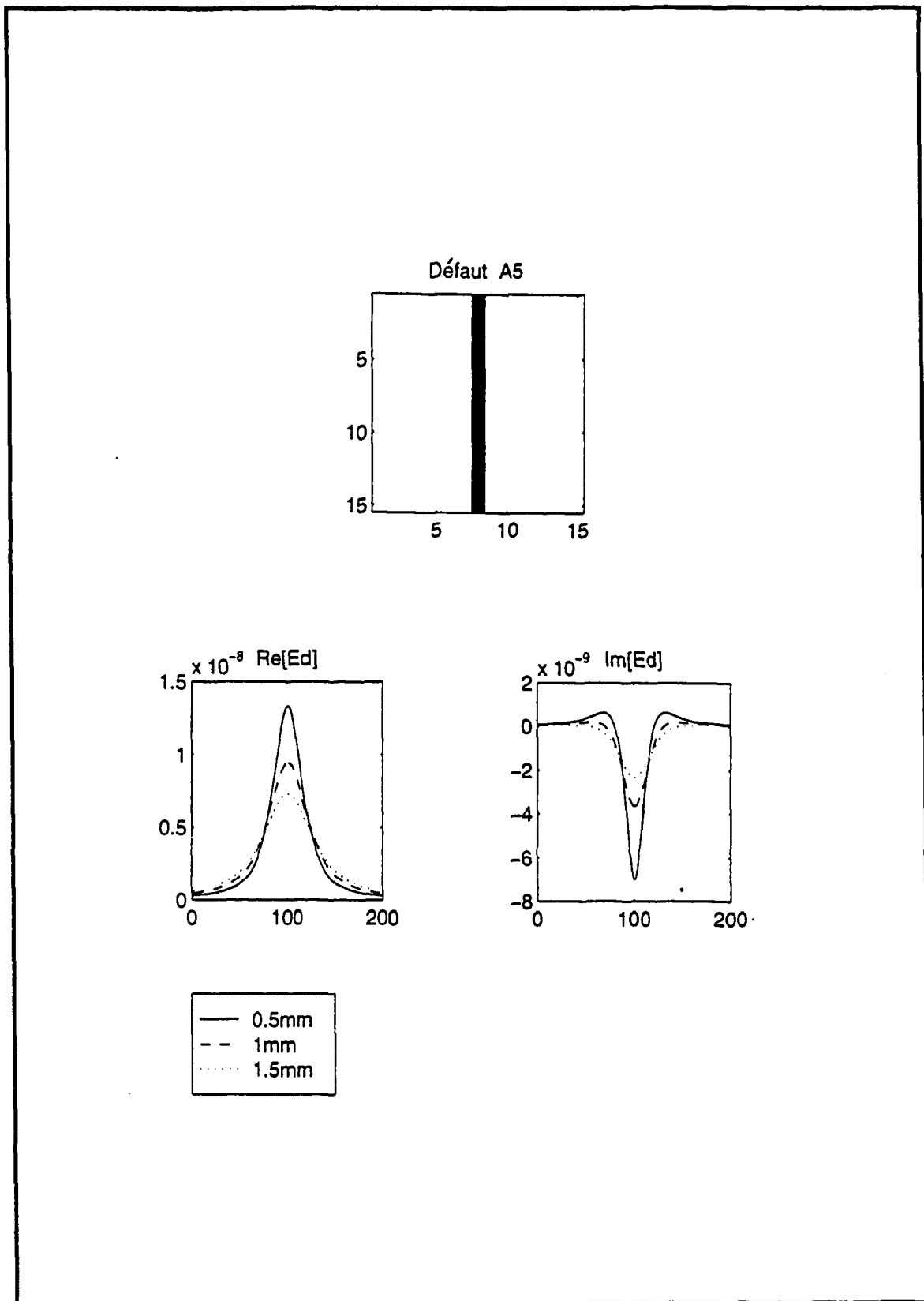


Figure B5 : Influence de la hauteur de la ligne de mesure sur le champ diffracté.



## **ANNEXE C : ÉTUDE DU MODÈLE DE CONVOLUTION**

Cette annexe regroupe les courbes des champs diffractés, exact et approché, à 100 kHz. Le carré de métal étudié est représenté sur la première figure. Les axes sont gradués en nombre de mailles. L'interface air/métal est en haut de la figure. Le défaut est représenté en noir. L'erreur de modèle est indiquée en % (cf. §4.2.3). Figurent également les courbes de l'évolution de l'erreur de modèle en fonction de la fréquence pour trois défauts de même surface. Pour le défaut A4, les courbes des champs diffractés, exact et approché, à 40 kHz et 400 kHz, sont données.

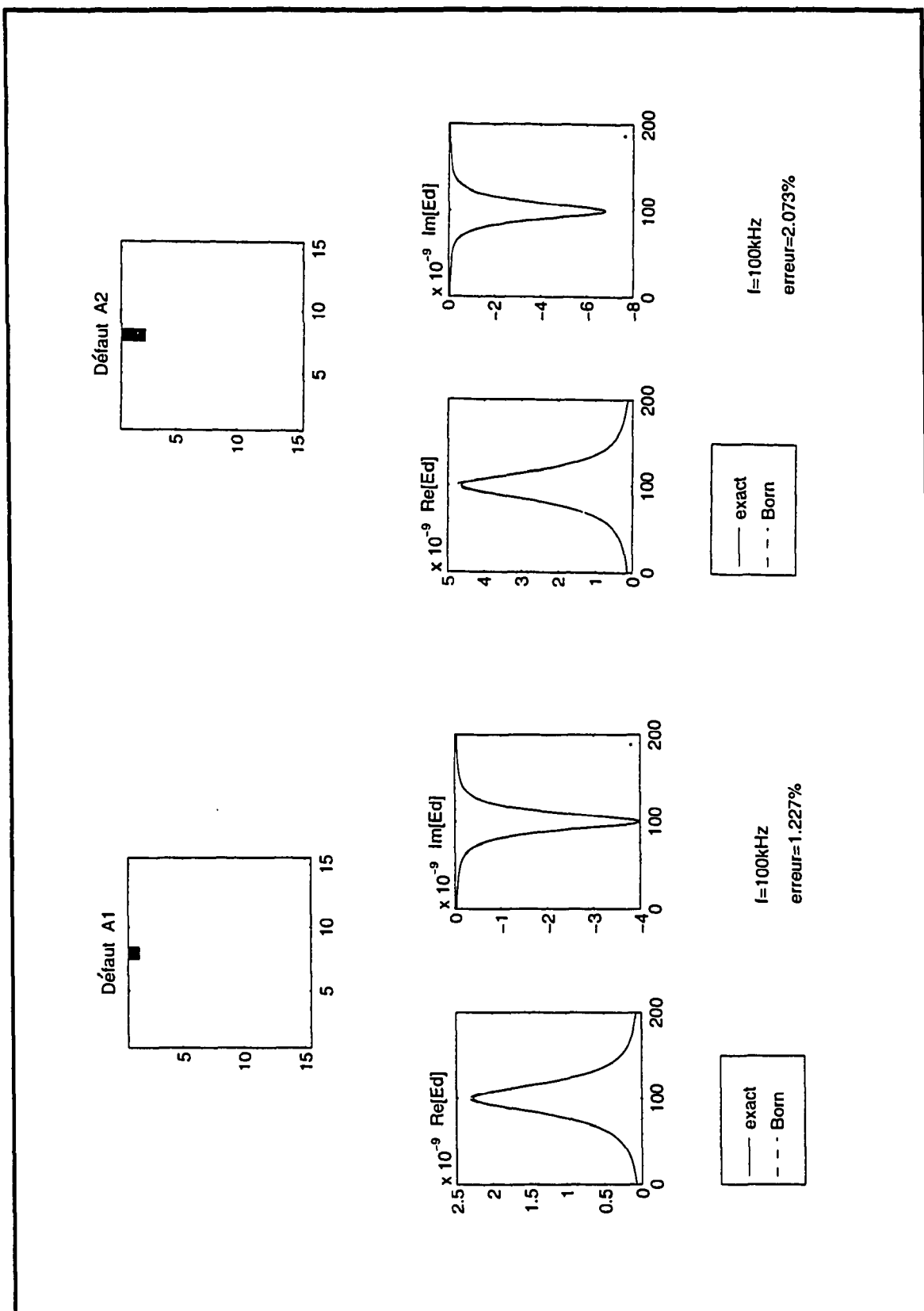


Figure C1 : Comparaison des champs diffractés, exact et approché - défauts A1 et A2.

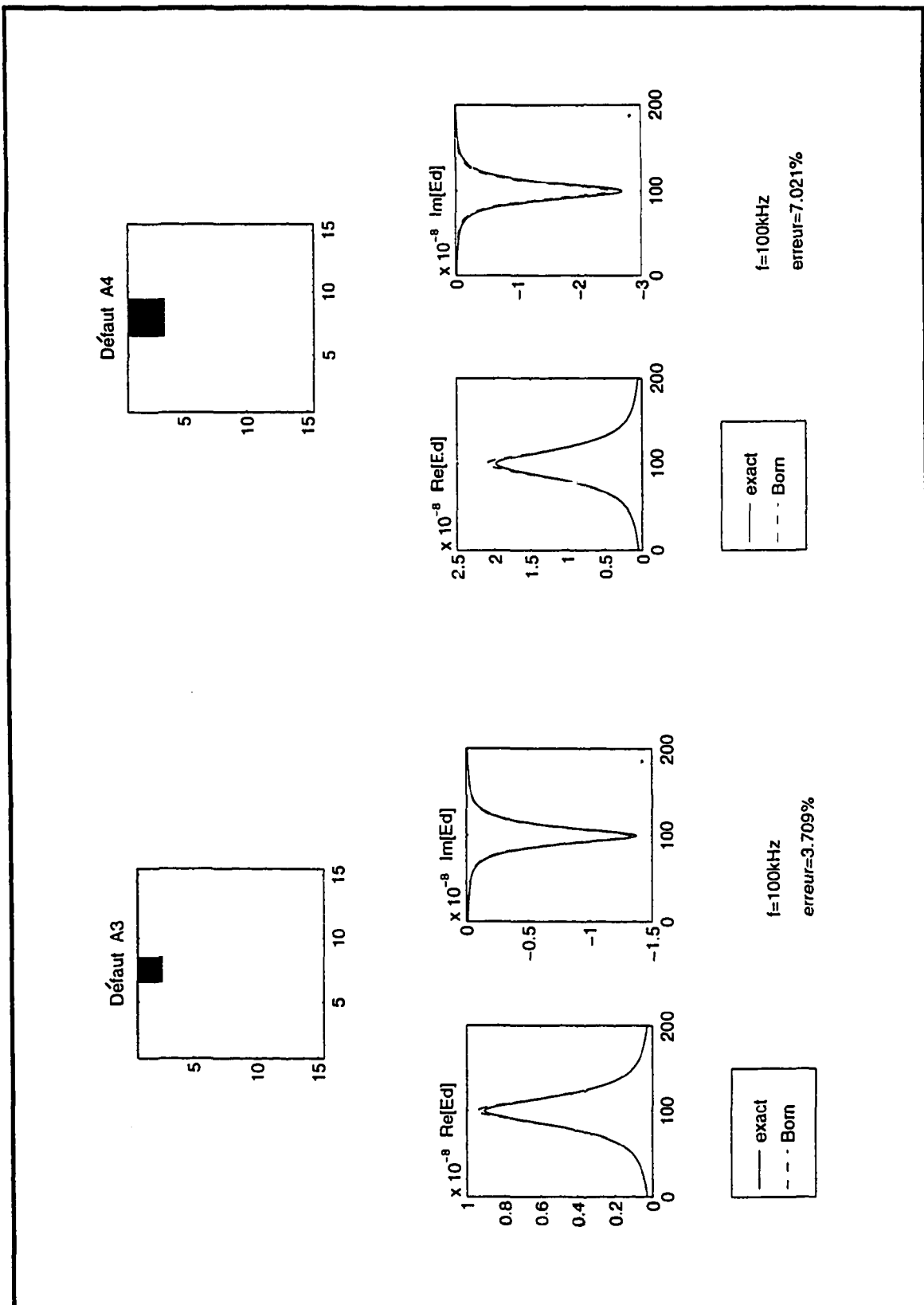


Figure C2 : Comparaison des champs diffractés, exact et approché - défauts A3 et A4.

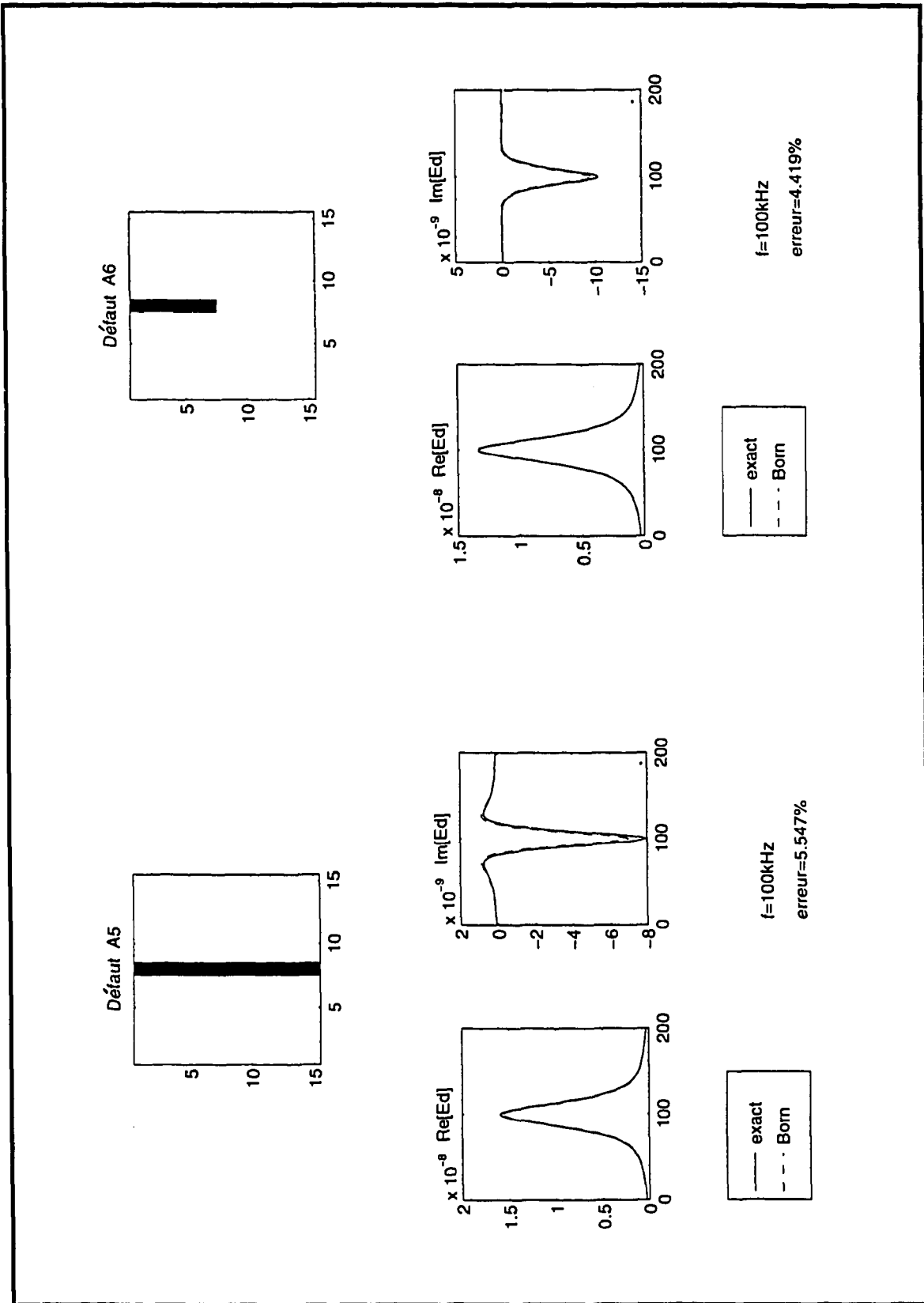


Figure C3 : Comparaison des champs diffractés, exact et approché - défauts A5 et A6.

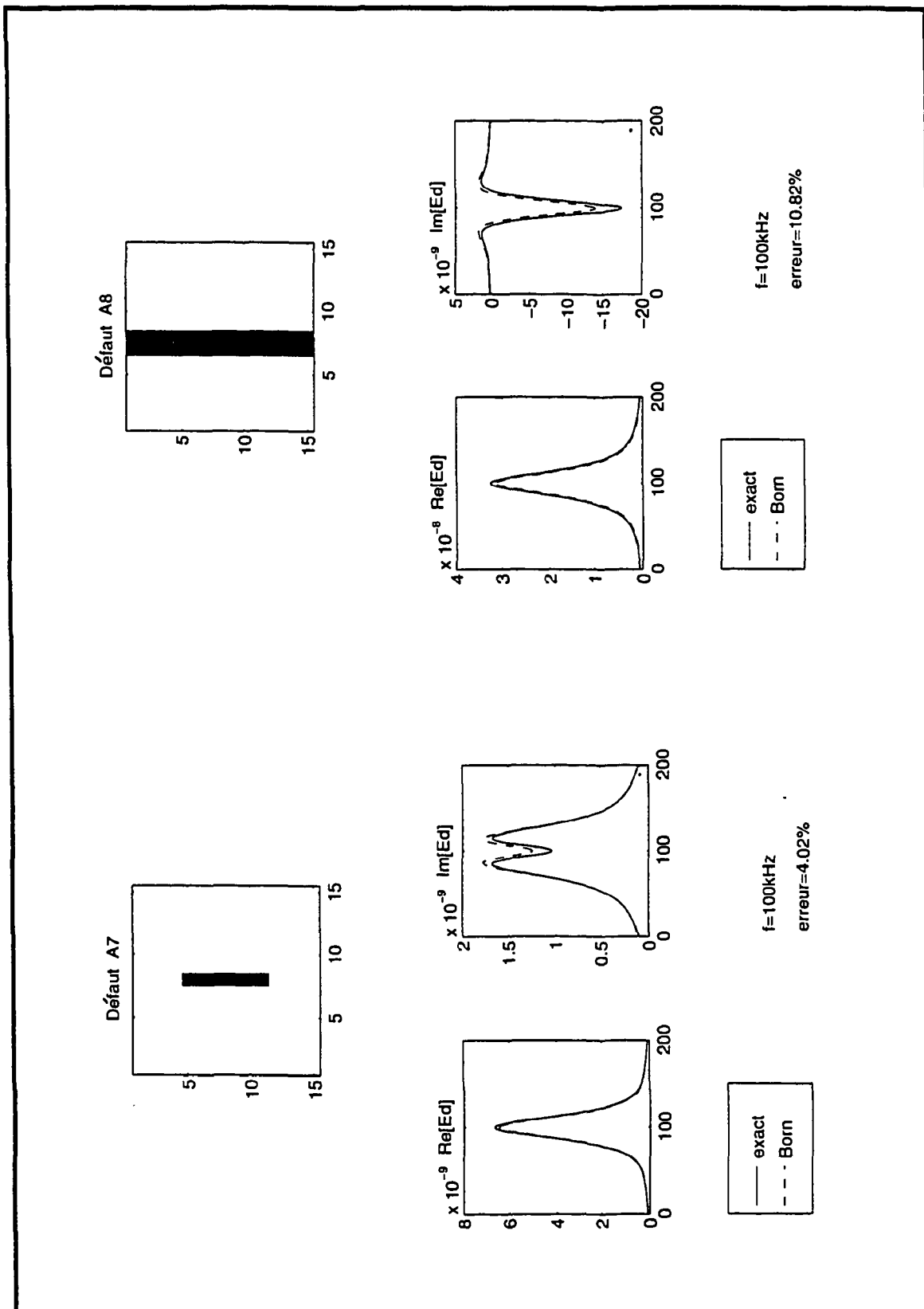


Figure C4 : Comparaison des champs diffractés, exact et approché - défauts A7 et A8.

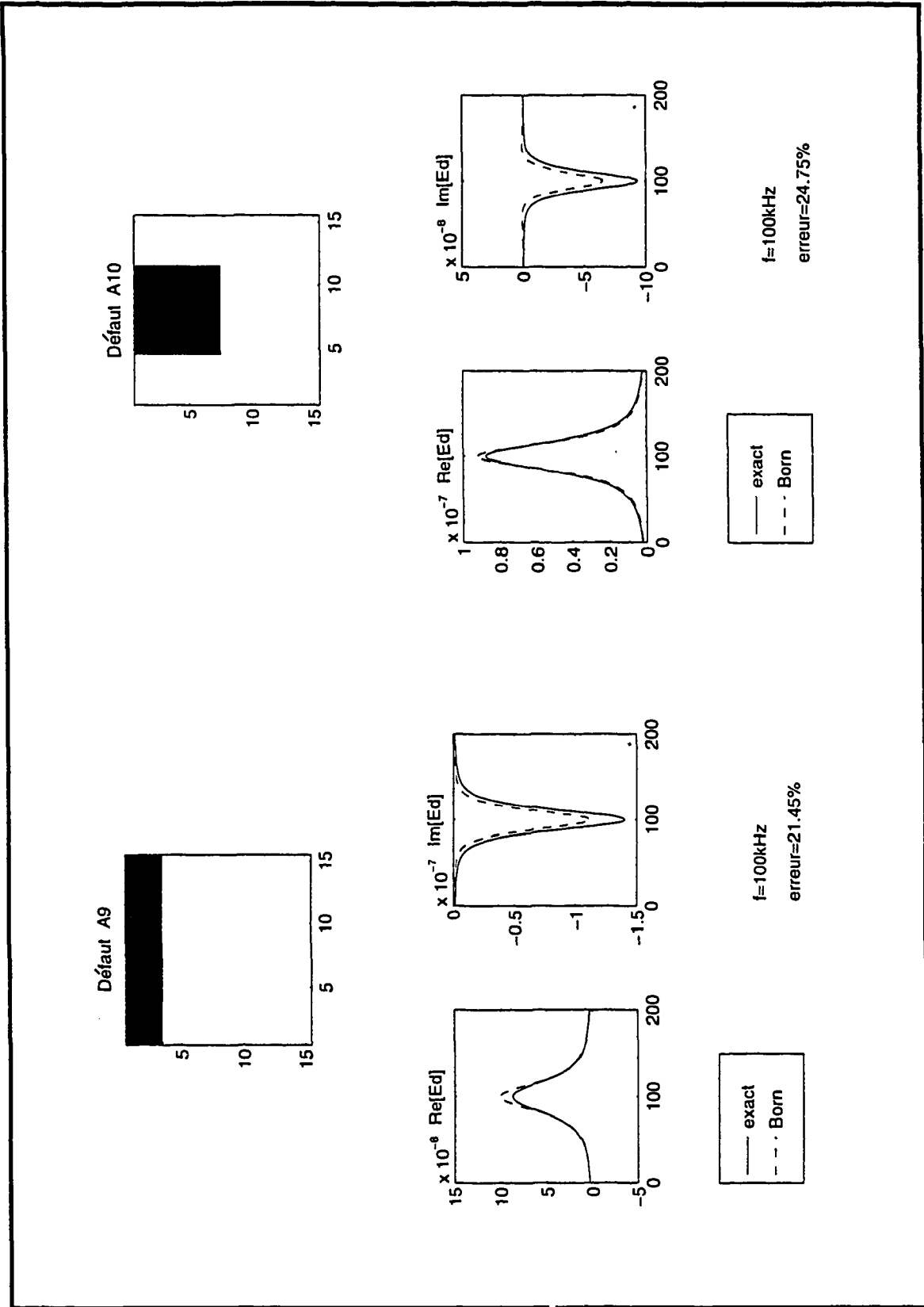


Figure C5 : Comparaison des champs diffractés, exact et approché - défauts A9 et A10.

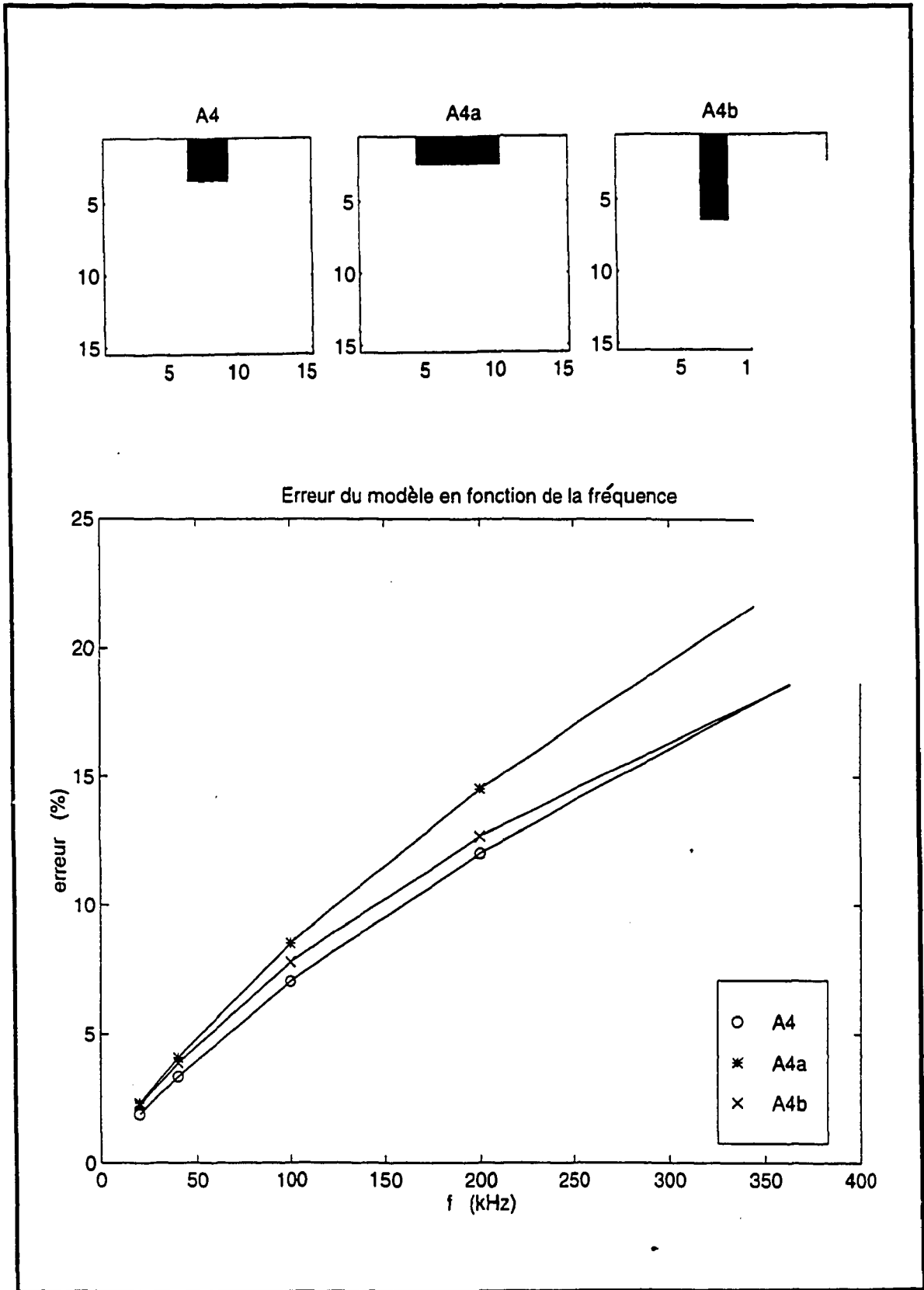


Figure C6 : Évolution de l'erreur de modèle selon la fréquence - cas de trois défauts.

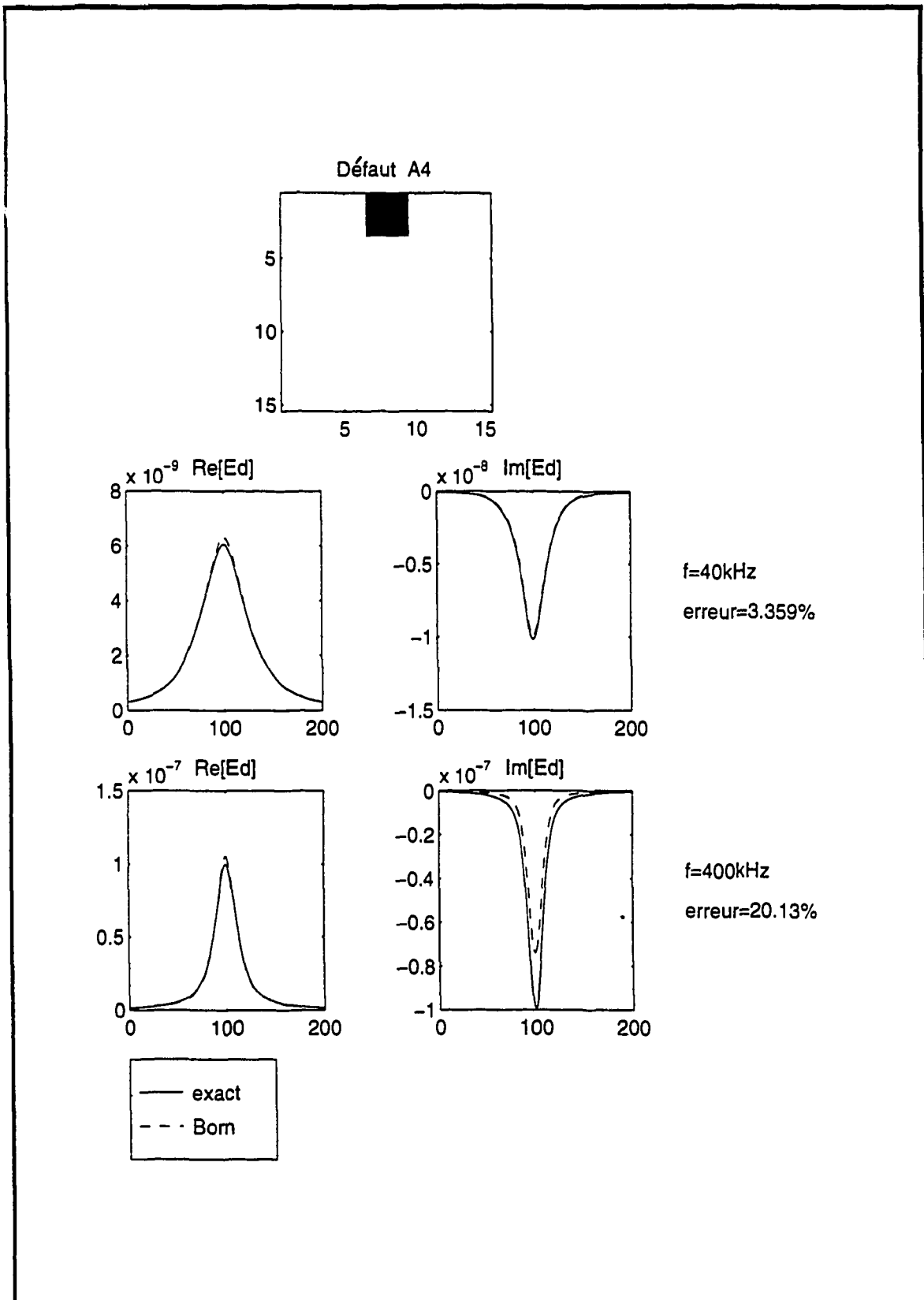


Figure C7 : Effet de la fréquence sur l'erreur de modèle - cas du défaut A4.