



UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MEXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

**USO DE LA TECNICA RBS (RUTHERFORD
BACKSCATTERING) PARA EL ANALISIS DE OBSIDIANAS
Y PELICULAS DE CARBURO DE SILICIO**

TESIS

PARA OBTENER EL TITULO DE

FISICO

PRESENTA:

FILIP FRANCO SOLLOVA

TOLUCA, ESTADO DE MEXICO, 1998.

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS**

**USO DE LA TECNICA RBS (RUTHERFORD
BACKSCATTERING) PARA EL ANALISIS DE OBSIDIANAS
Y PELICULAS DE CARBURO DE SILICIO**

FILIP FRANCO SOLLOVA

DIRECTOR:

FIS. GHIRALDO MURILLO OLAYO

1998.

**AGRADEZCO A LAS SIGUIENTES PERSONAS E INSTITUCIONES QUE
CONTRIBUYERON EN LA REALIZACIÓN DE ESTE TRABAJO:**

**A MI MADRE:
VERA SOLLOVA MANENOVA**

**A MI DIRECTOR DE TESIS:
FIS. GHIRALDO MURILLO OLAYO**

A ADRIANA ELIZABETH NUNCIO QUIROZ

**AL INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES NUCLEARES POR LAS
FACILIDADES Y RECURSOS QUE HICIERON POSIBLE ESTE TRABAJO**

**AL INSTITUTO DE FISICA DE LA UNAM POR FACILITAR EL EMPLEO DEL
ACELERADOR VAN DE GRAAFF**

INDICE

INTRODUCCION.....	1
CAPITULO 1.....	5
1.1 INTRODUCCION.....	5
1.2 CONFIGURACION DEL EXPERIMENTO.....	5
1.3 ESPECTRO DE RBS.....	6
1.4 RELACION ENTRE UNA MUESTRA Y SU ESPECTRO.....	7
CAPITULO 2.....	13
2.1 INTRODUCCION.....	13
2.2 FACTOR CINEMATICO.....	13
2.3 SECCION DIFERENCIAL DE RETRODISPERSION.....	15
2.4 PERDIDA DE ENERGIA DENTRO DE LA MUESTRA.....	19
2.5 STRAGGLING Y POSICION REAL DE UN FRENTE DE PICO ELEMENTAL.....	22
CAPITULO 3.....	25
3.1 CALCULO DE LA ESCALA DE PROFUNDIDAD.....	25
3.2 ALTURA DE UN ESPECTRO.....	30
3.3 INTEGRACION DE PICOS.....	31
CAPITULO 4.....	33
4.1 ANALISIS DE UNA PELICULA DE ORO-MYLAR-ORO.....	33
4.2 ANALISIS DE PELICULAS DE CARBURO DE SILICIO.....	39
4.3 ANALISIS DE OBSIDIANAS.....	45
CONCLUSIONES.....	49
APENDICE A Factor Cinemático.....	51
APENDICE B Sección Diferencial de Rutherford.....	55
BIBLIOGRAFIA.....	61

INTRODUCCION

El experimento realizado por Rutherford sirvió como base para el desarrollo de la técnica de análisis multielemental conocida como RBS (Rutherford Backscattering). El desarrollo de la técnica RBS ha sido posible debido principalmente a tres factores. En primer lugar, el empleo de los aceleradores de partículas para generar un haz de iones permite una corriente lo suficientemente alta como para lograr un análisis estadístico confiable de los eventos de retrodispersión que son detectados, esto aunado al desarrollo de la instrumentación electrónica (eficiencia de los detectores principalmente) permite que los tiempos en los que se lleva a cabo cada experimento sean mucho menores que en los primeros experimentos realizados. Finalmente, el uso de la computadora para el almacenamiento y análisis de datos, ha simplificado considerablemente el trabajo de análisis cualitativo y cuantitativo. Como consecuencia de lo anterior, es posible llevar a cabo el análisis de varias muestras en el mismo tiempo en el cual hace algunos años sólo se analizaba una muestra.

La técnica RBS se basa en el análisis de colisiones elásticas entre el proyectil (comunmente partículas alfa) y el núcleo blanco. Debido a las bajas energías de bombardeo y al tipo de proyectil usado, el proceso más importante que ocurre al chocar el proyectil con el núcleo blanco es una colisión elástica.

A grandes rasgos, lo que se hace en el experimento es medir la energía cinética de las partículas retrodispersadas; y ya que la energía de una partícula que ha sido retrodispersada por un núcleo ligero es menor que la de otra que ha colisionado con un núcleo más pesado, entonces se puede identificar con qué núcleo ha chocado el proyectil midiendo su energía de retrodispersion. Se hace la observación de que no hay retrodispersión cuando la masa del núcleo blanco es menor o igual a la masa del proyectil, debido a esto, no es posible detectar elementos con masa menor o igual a la del proyectil.

Existen factores que alteran la energía con la que se detectan las partículas salientes, entre ellos se encuentra la pérdida de energía que sufren los núcleos retrodispersados en el interior del material al interaccionar con los átomos del mismo en su camino de entrada y salida. Esta pérdida de energía provee información acerca de la profundidad a la cual se llevó a cabo la colisión. La concentración de un elemento dentro de la muestra puede determinarse por el número de eventos detectados con la energía característica de interacción con ese elemento.

Una parte de este trabajo consiste en el uso de la técnica RBS para caracterizar muestras de obsidianas de diversas regiones de la República

Mexicana. La otra parte del trabajo es un análisis de películas delgadas de carburo de silicio. Estas muestras son parte de un proyecto de investigación para desarrollar semiconductores contruidos con este material.

La Tesis consta de 4 capítulos. En el capítulo 1 se expone la forma en la que se obtienen los espectros de RBS, así como el significado de estos y la relación que guardan con las muestras que los generaron. Los conceptos físicos fundamentales para la técnica RBS son expuestos en el capítulo 2. En el capítulo 3 se aplican los conceptos tratados en el capítulo 2 para establecer la relación cuantitativa muestra-espectro. Finalmente, en el capítulo 4 un espectro de oro-mylar es analizado para ilustrar el método expuesto en los capítulos anteriores; este capítulo también contiene los resultados del análisis de los espectros de las obsidianas y de las películas de carburo de silicio, los cuales no se analizan de la misma forma que el espectro de oro-mylar. El análisis de estas muestras se llevó a cabo con el programa RUMP, ya que un análisis manual tomaría demasiado tiempo y los resultados no serían tan precisos como los obtenidos con el programa de análisis.

**NEXT PAGE(S)
left BLANK**

CAPITULO 1

FORMACION DE UN ESPECTRO RBS

1.1 INTRODUCCION

Para poder entender la teoría del análisis RBS es necesario comprender diversos procesos de interacción de la radiación con la materia, la generación del espectro de energía obtenido del procesamiento de señales provenientes de un detector que registra los eventos de retrodispersión, hasta llegar a los resultados del análisis. En este capítulo se habla esencialmente de las condiciones experimentales y se ejemplifica la formación de algunos espectros de energía ideales.

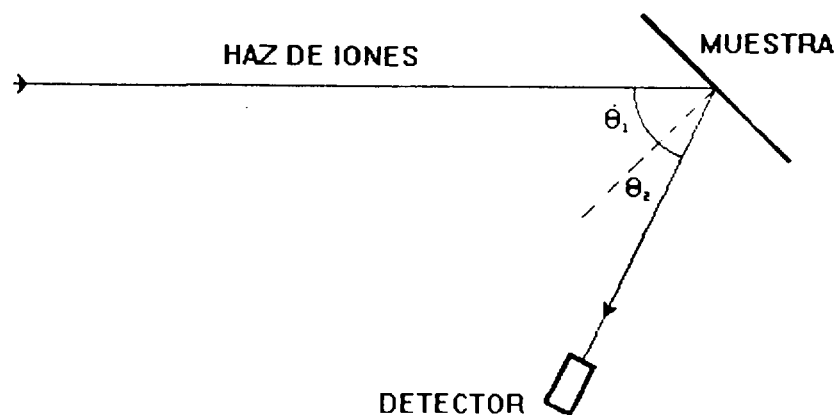


Figura 1.1 Arreglo experimental.

1.2 CONFIGURACION DEL EXPERIMENTO

El arreglo experimental empleado para obtener los espectros es el siguiente: el haz

incidente es horizontal y la superficie de la muestra es colocada verticalmente. El haz incidente y la línea recta que va del centro del detector al punto de la muestra donde incide el haz se encuentran en el mismo plano horizontal. El ángulo formado por la normal a la muestra y el haz incidente es θ_1 y el ángulo formado por la normal a la muestra y la línea recta detector-muestra es θ_2 . En la figura 1.1 se muestra un esquema del arreglo experimental.

El acelerador empleado para obtener los espectros para este trabajo es el acelerador Van de Graaff del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México; este acelerador tiene un voltaje máximo en la terminal de 5.5 MV, está situado verticalmente y el haz es desviado 90° para ser dirigido a la línea de detectores. El diámetro de la sección transversal del haz de iones es de aproximadamente 3 mm. Las muestras fueron bombardeadas con partículas α con una energía de 2.0 MeV y una corriente de haz de 4nA.

1.3 ESPECTRO DE RBS

Cuando una partícula retrodispersada incide en el detector se produce una ionización la cual genera una señal de corriente; esta a su vez es transformada en una señal de voltaje (proporcional a la energía de la partícula detectada), la cual se amplifica y se envía a un analizador multicanal. Este dispositivo separa el intervalo de energía del espectro en subintervalos llamados canales. Si una señal de cierta energía se asocia a un número de canal determinado, entonces otra señal de menor energía corresponderá a un número de canal menor que el anterior. Si el ancho del intervalo de energía por canal \mathcal{E} es el mismo para todos los canales, entonces existe una relación lineal entre la energía y su correspondiente canal. Para localizar el intervalo de energía correspondiente al canal i se suma el producto $(\mathcal{E})(i)$ a la energía \mathcal{E}_0 correspondiente al canal cero.

$$E_{canali} = \mathcal{E}_0 + (\mathcal{E})(i) \quad (1.1)$$

Los valores de \mathcal{E} y \mathcal{E}_0 se obtienen a partir del espectro de una muestra de composición conocida, o de los picos característicos de un isótopo radioactivo. Este proceso de calibración debe llevarse a cabo cada vez que se inicia una sesión de experimentos. Un espectro de RBS es el conjunto de datos obtenidos en el experimento, donde cada dato es un número asociado a un canal, el cual representa el número de partículas detectadas cuya energía se encuentra dentro del intervalo correspondiente a ese canal.

En la gráfica de un espectro de RBS el eje horizontal representa la energía o el número de canal y el eje vertical representa el número de cuentas o partículas detectadas por cada canal (de aquí en adelante al hablar de un espectro de RBS nos referiremos ya sea al conjunto de datos o a la gráfica de estos datos); es decir, si se detectan N_i partículas cuya energía se encuentra dentro del intervalo de energía asociado al canal i entonces en el espectro aparecerá un punto con coordenadas (i, N_i) .

1.4 RELACION ENTRE UNA MUESTRA Y SU ESPECTRO.

En esta sección se explica la relación entre una muestra y su espectro de RBS con ayuda de algunos ejemplos. En primer lugar consideremos el caso ideal de una muestra con un espesor de un diámetro atómico, compuesta de un solo isótopo A , es decir, sólo habrá retrodispersión en la primera capa atómica, ya que es la única que existe. Entonces todas las partículas detectadas a un ángulo dado tendrán la misma energía E , debido a que todas inciden con la misma energía, todas son retrodispersadas por átomos con la misma masa y además no hay pérdida de energía dentro del material debido a que se trata de una capa con un espesor de un diámetro atómico. Por lo tanto el espectro tendrá la forma de la figura 1.2. Es decir, fueron detectadas n partículas con energía E y a otras energías no se detectó ninguna partícula. Si la muestra del ejemplo anterior fuera una capa monoatómica compuesta de dos isótopos A y B , entonces en lugar de un

pico aparecerán dos picos (fig. 1.3).

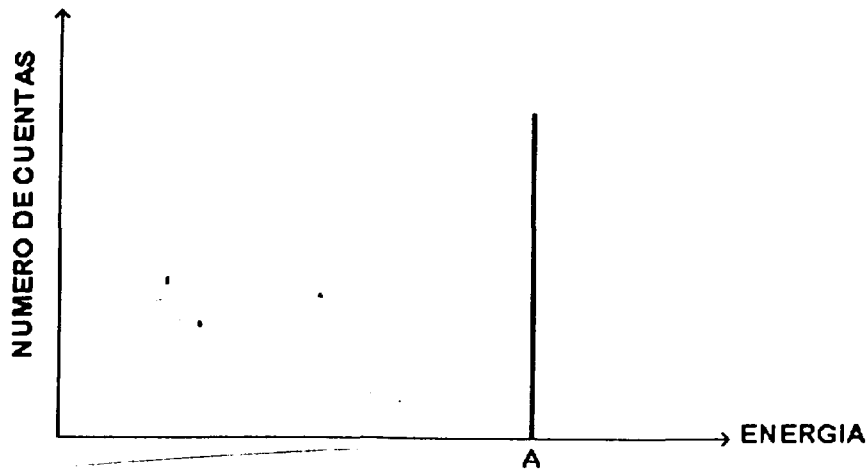


Figura 1.2 Espectro de una muestra con un espesor de un diámetro atómico compuesta por un sólo isótopo.

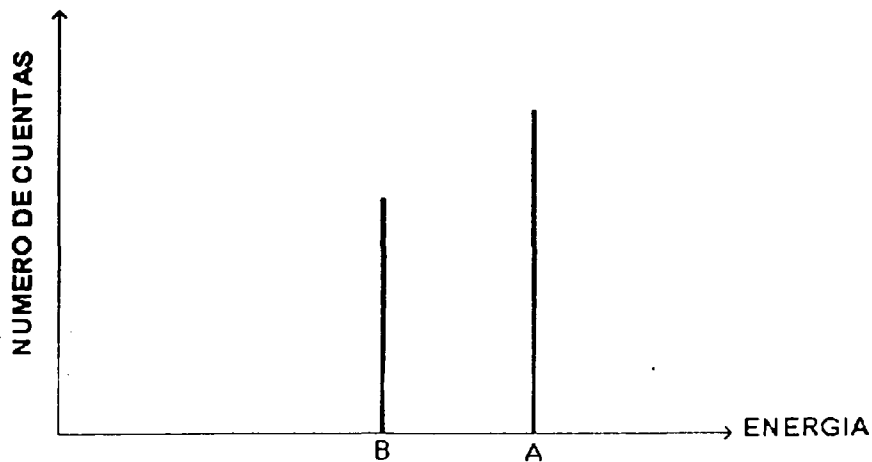


Figura 1.3 Espectro de una muestra con un espesor de un diámetro atómico compuesta por dos isótopos.

En el caso de una película delgada homogénea de espesor dx , constituida por un sólo isótopo; el espectro tendrá la forma de la figura 1.4 (se supone que la pérdida de energía es pequeña). La altura del espectro a energía E_1 representa el número de partículas detectadas que fueron retrodispersadas por los núcleos que se encuentran cerca de la superficie de la muestra. Las partículas retrodispersadas por los núcleos que se encuentran en capas cada vez más profundas saldrán con energías cada vez menores, las partículas dispersadas en la última capa saldrán con energía E_2 , y finalmente, para energías menores que E_2 no se detectarán partículas debido a que fuera de la muestra

no habrá núcleos con los cuales pudiesen chocar los proyectiles. La altura del espectro para cada canal permanece aproximadamente constante debido a que se trata de una muestra homogénea (nuevamente se supone una pérdida de energía pequeña), y por lo tanto, la probabilidad de retrodispersión en la dirección del detector es aproximadamente la misma a cualquier profundidad.

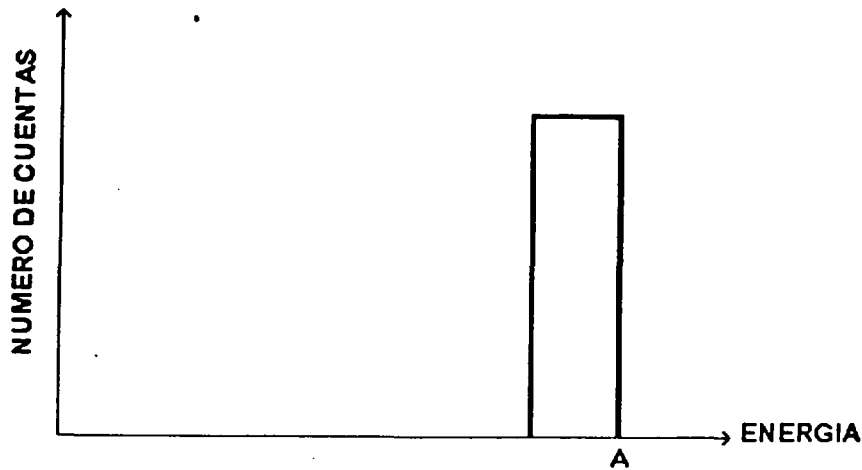


Figura 1.4 Espectro de una muestra homogénea de espesor dx compuesta por un sólo isótopo.

Ahora consideremos el espectro de una película delgada homogénea depositada sobre un sustrato grueso y también homogéneo; ambas capas compuestas por un sólo tipo de isótopo cada una (fig. 1.5). Los proyectiles retrodispersados en la primera capa de la película tendrán una energía E_A , mientras que los dispersados en la primera capa del sustrato tendrán una energía E_B . La descripción de la parte del espectro correspondiente a la película es la misma que en el ejemplo anterior, y la parte correspondiente al sustrato muestra retrodispersión a profundidades cada vez mayores hasta llegar a la energía cero, es decir, hasta que las partículas retrodispersadas no tengan la energía suficiente para salir de la muestra. Cabe hacer notar que en la práctica la altura de la parte correspondiente al sustrato grueso presenta una variación en la altura, a pesar de que el material es homogéneo; esto es debido a que la sección de retridispersión varía

inversamente con la energía incidente (sec. 2.3).

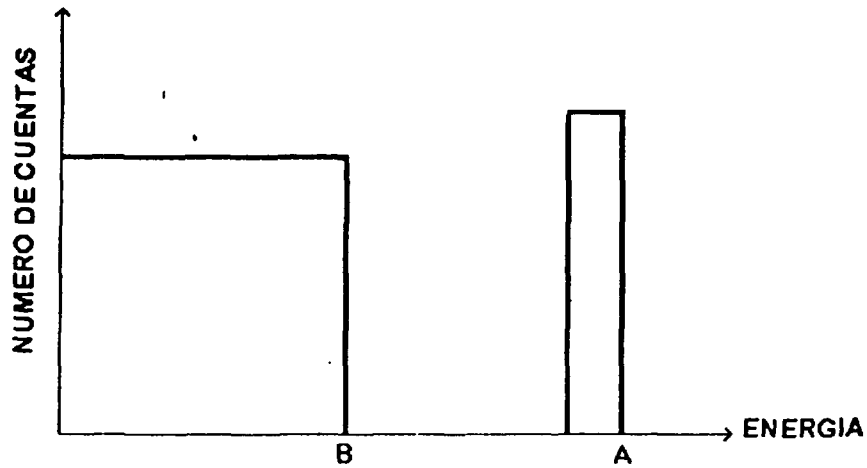


Figura 1.5 Espectro de una película homogénea de espesor dx compuesta por un sólo isótopo depositada sobre un sustrato grueso.

Finalmente, en el espectro de una muestra gruesa diatómica y homogénea (fig. 1.6), se observan los dos frentes correspondientes a las energías de retrodispersión en la superficie. Aunque la retrodispersión por ambos elementos (A y B) se realiza en la superficie, la energía de retrodispersión es diferente debido a la diferencia de masas.

En la parte correspondiente al elemento B , el número de cuentas por canal es la suma de las cuentas producidas por cada elemento a esas energías. Para ambos elementos la energía se extiende hasta cero debido a que se trata de una muestra gruesa.

Es importante mencionar que en la práctica no es posible obtener espectros tan perfectos debido a la resolución del sistema y al fenómeno de straggling (sec. 2.5). La

figura 1.7 es un ejemplo de un espectro real de oro-mylar-oro.

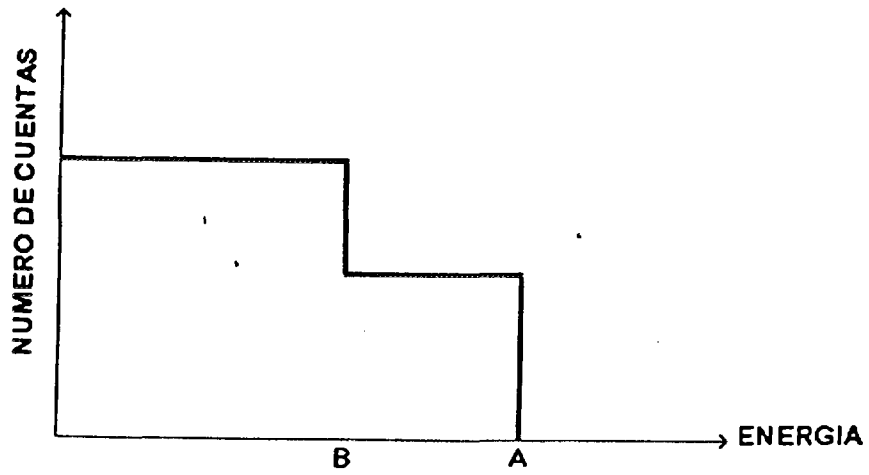


Figura 1.6 Espectro de una muestra gruesa, homogénea, compuesta por dos isótopos.

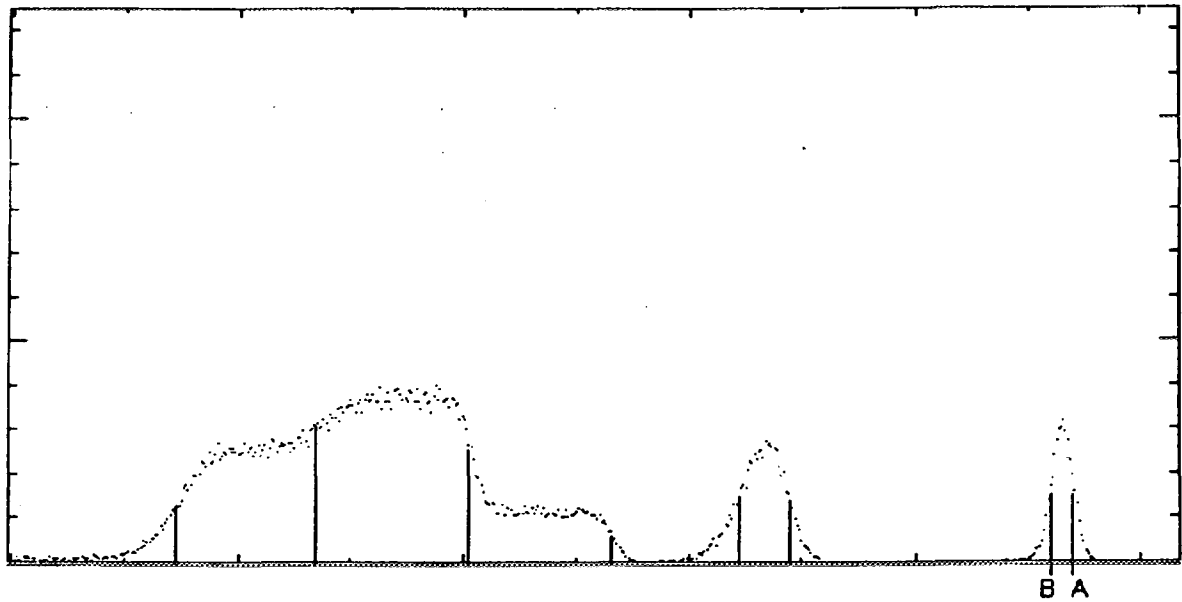


Figura 1.7 Espectro de una película de oro-mylar-oro.

CAPITULO 2

CONCEPTOS FISICOS

2.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior se habló de la relación entre una muestra y su espectro desde el punto de vista cualitativo. El presente capítulo trata acerca de los conceptos físicos en los que se basa la técnica RBS, siendo los más importantes el factor cinemático, la sección diferencial y la pérdida de energía; el factor cinemático establece la relación entre la energía de retrodispersión y la masa del núcleo dispersor, la sección diferencial está relacionada con la probabilidad de que ocurra un evento de dispersión (la cual es función de la densidad atómica), y la pérdida de energía nos ayuda a conocer la profundidad a la cual se lleva a cabo la dispersión. Estos conceptos están relacionados con las características de un espectro, es decir, con la energía y con el número de cuentas por canal.

2.2 FACTOR CINEMATICO

La energía de retrodispersión de un proyectil puede conocerse empleando una expresión obtenida al considerar las leyes de conservación del momento y de la energía para un choque elástico entre dos partículas. El factor cinemático K para el elemento i se define como

$$K_i = \frac{E_1^i}{E_0}, \quad (2.1)$$

donde E_1^i es la energía de retrodispersión para el elemento i y E_0 es la energía de

bombardeo.

La expresión para el factor cinemático K en función de la masa del proyectil m_1 , la masa del núcleo blanco m_2 y el ángulo de retrodispersión θ es:

$$K = \left[\frac{\left(1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2 \theta\right)^{1/2} + \left(\frac{m_1}{m_2}\right) \cos \theta}{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)} \right]^2. \quad (2.2)$$

Esta expresión para el factor cinemático se obtiene en el apéndice A. Entonces, conociendo E_0 y E_1^i se puede conocer K , y como este factor depende de la masa del núcleo, entonces se puede conocer el elemento contra el cual chocó el proyectil.

Al analizar un espectro de RBS es importante conocer la resolución de masa δm_2 del sistema experimental. El valor de δm_2 puede ser modificado variando los parámetros del experimento como son: ángulo de retrodispersión, energía y masa del proyectil. La resolución de energía δE_1 depende principalmente del detector y del sistema electrónico, por lo tanto está predeterminada por el tipo de sistema de detección con que cuenta el laboratorio. La separación de energía ΔE_1 para una diferencia de masa Δm_2 se encuentra a partir de 2.1 y está dada por:

$$\Delta E_1 = E_0 \left(\frac{dm}{dm_2} \right) \Delta m_2. \quad (2.3)$$

Sustituyendo δE_1 por ΔE_1 y δm_2 por Δm_2 y despejando δm_2 tenemos:

$$\delta m_2 = \frac{\delta E_1}{E_0 (dK/dm_2)}. \quad (2.4)$$

Otro factor que puede afectar la resolución de masa para retrodispersión en capas profundas es el fenómeno de straggling tratado en la sección 2.5.

2.3 SECCION DIFERENCIAL DE RETRODISPERSION

2.3.1 SECCION DE RUTHERFORD

Consideremos a un proyectil dispersado por un núcleo, el ángulo de dispersión dependerá del parámetro de impacto b . Si el proyectil pasa dentro de la región acotada por las circunferencias de radio b y radio $b + db$, ambas con centro en el eje que pasa por el núcleo dispersor y paralelo a la trayectoria del proyectil, entonces este saldrá con un ángulo de dispersión entre θ y $d\theta$ (fig. 2.1); el área entre las dos circunferencias es:

$$d\sigma = 2\pi b |db|. \quad (2.5)$$

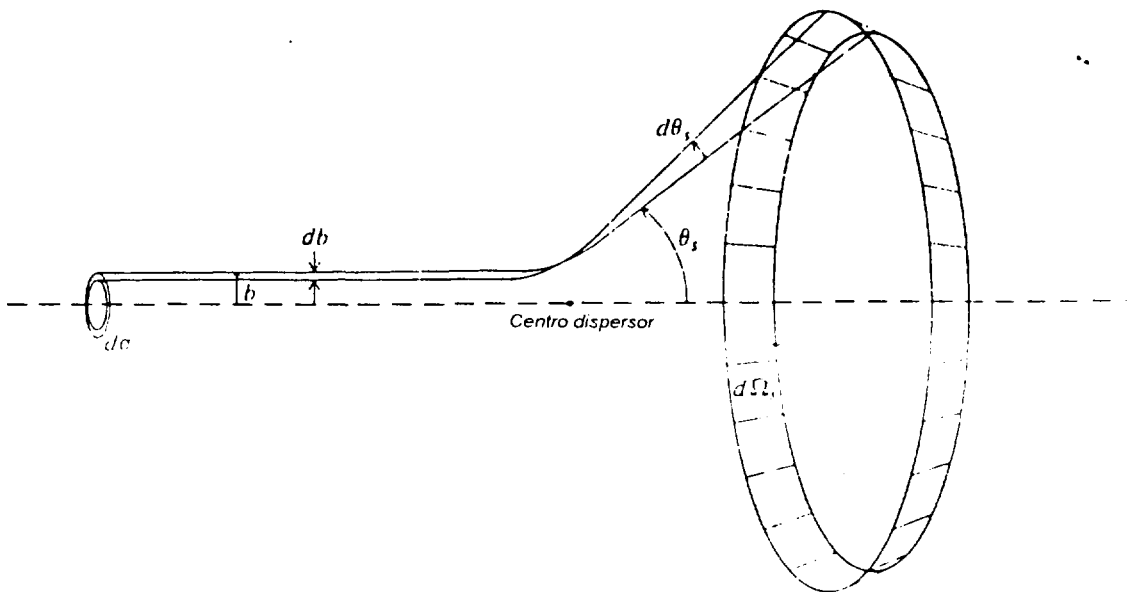


Figura 2.1 Relación entre el parámetro de impacto y el ángulo de dispersión.

Si se trata de un haz constante y homogéneo con un flujo de Q partículas por segundo, entonces el número de partículas dH que pasan entre las dos circunferencias está dado por:

$$dH = \frac{Q}{A} d\sigma. \quad (2.6)$$

donde A es el área de la sección transversal del haz de partículas.

Ya que el haz incide sobre una región ocupada por un gran número de núcleos, entonces el número de partículas dispersadas es:

$$dH = n \frac{Q}{A} d\sigma, \quad (2.7)$$

donde n es el número de átomos "iluminados" por el haz, dado por: $n = ANt$. Aquí N es la densidad atómica y t es el espesor de la muestra, entonces

$$dH = QNtd\sigma. \quad (2.8)$$

Pero el valor de $d\sigma$ está relacionado con el ángulo de dispersión mediante la sección de Rutherford para el sistema de laboratorio:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{K Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{4}{\sin^4 \theta} \frac{\left(\left[1 - \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \sin \theta \right]^2 \right)^{1/2} + \cos \theta}{\left[1 - \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \sin \theta \right]^2} \quad (2.9)$$

Aquí Z_1 es el número atómico del proyectil, Z_2 es el número atómico del blanco, e es la carga del electrón, E es la energía de bombardeo. θ es el ángulo de retrodispersión y m_1 y m_2 son las masas del proyectil y del blanco respectivamente. La constante K tiene un valor de $K = 1/4\pi\epsilon_0$. Esta expresión para la sección de Rutherford se obtiene en el apéndice A.

Estableciendo la ecuación:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right), \quad (2.10)$$

tenemos que:

$$d\sigma = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega. \quad (2.11)$$

En la expresión 2.10 el término del lado izquierdo es la diferencial de σ respecto a Ω y el término del lado derecho es la sección diferencial de Rutherford.

Sustituyendo 2.11 en 2.8 tenemos:

$$dH = QNt \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (2.12)$$

El número H de partículas que inciden en el detector se obtiene integrando la expresión anterior sobre el ángulo sólido Ω_d que abarca el detector, es decir:

$$H = QNt \int_{\Omega_d} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (2.13)$$

Se define la sección transversal promedio σ como:

$$\sigma = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_d} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \quad (2.14)$$

entonces, sin perder mucha precisión, se puede reemplazar la integral de la expresión 2.13 por $\Omega\sigma$ y se llega a:

$$H = Q\Omega\sigma Nt. \quad (2.15)$$

σ puede tomarse como $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ evaluada en el ángulo de dispersión θ . Esto puede hacerse debido a que el valor de la sección de dispersión no cambia demasiado para el ángulo de dispersión con el cual se realizó el experimento, y además el ángulo sólido que subtende el detector es relativamente pequeño como para que exista un cambio apreciable en el valor de la sección.

2.3.2 SECCIONES TIPO NO-RUTHERFORD

La sección diferencial de Rutherford fue obtenida tomando en cuenta que la interacción proyectil-blanco era coulombiana únicamente y despreciando la interacción con los electrones del átomo así como las fuerzas nucleares, de aquí que la validez de la sección de Rutherford está limitada a ciertos intervalos de energía, dependiendo del isótopo

empleado como proyectil y del blanco.

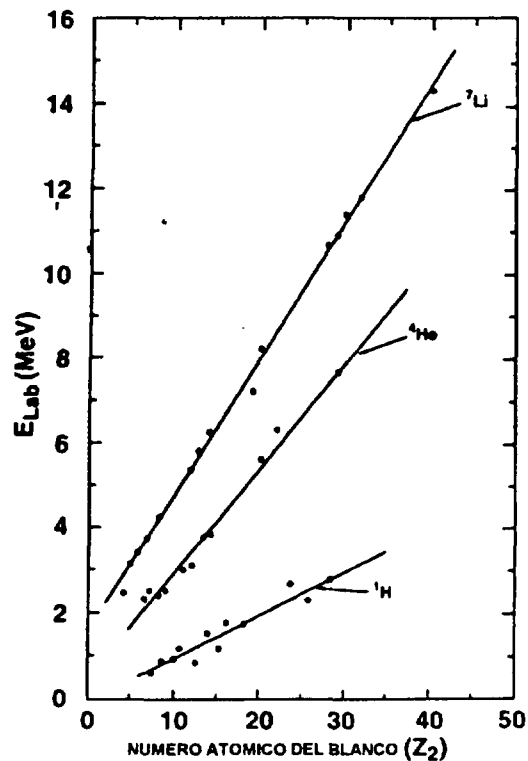


Figura 2.2 Gráfica que muestra las energías de bombardeo a partir de las cuales los valores la sección de Rutherford dejan de ser válidos (por encima de las líneas).

Para bajas energías los valores de la sección dejan de ser los predichos por 2.9 debido a que la velocidad del proyectil es comparable con la de los electrones ligados al átomo blanco y por lo tanto surgen efectos de apantallamiento. Por otro lado, a altas energías las desviaciones de la sección se deben a que el proyectil tiene la velocidad necesaria para acercarse al núcleo lo suficiente como para sentir la influencia de las fuerzas nucleares. La gráfica de la figura 2.2 muestra las regiones para el ${}^1\text{H}$, ${}^4\text{He}$ y ${}^7\text{Li}$ en donde la sección de dispersión es la sección de Rutherford (por debajo de la línea) y donde no lo es (región sobre la línea).

Los valores numéricos para las secciones no-Rutherford son obtenidos experimentalmente ya que a la fecha no existe una forma lo suficientemente precisa de calcularlos.

2.4 PERDIDA DE ENERGIA

DENTRO DE LA MUESTRA.

2.4.1 PERDIDA DE ENERGIA

Cuando el proyectil entra en el material, la interacción de éste con los átomos del material provoca una pérdida de energía. Si en un intervalo de distancia Δx_1 , una partícula pierde una energía ΔE , entonces la razón de la pérdida de energía a la distancia recorrida es $\frac{\Delta E}{\Delta x_1}$. Sin embargo, la pérdida de energía por unidad de distancia no es constante, sino que depende de la energía; esto significa que para el siguiente intervalo de distancia $\Delta x_2 = \Delta x_1$, $\frac{\Delta E}{\Delta x_2}$ no tendrá el mismo valor que $\frac{\Delta E}{\Delta x_1}$.

La pérdida de energía por unidad de longitud se define como:

$$\frac{dE}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta x}. \quad (2.16)$$

Por conveniencia se considera a $\frac{dE}{dx}$ como una cantidad positiva. Las unidades de $\frac{dE}{dx}$ son las de *energía/distancia*. Ya que $\frac{dE}{dx}$ es función de la energía, entonces la energía que tendrá una partícula después de viajar una distancia t se encuentra integrando:

$$E(x) = E - \int_0^t \frac{dE}{dx} dx. \quad (2.17)$$

Esta integral no se puede calcular directamente ya que $\frac{dE}{dx}$ depende de la energía y no de x . Pero a partir de la ecuación¹:

$$\frac{dE}{dx} = \left(\frac{dE}{dx} \right) \quad (2.18)$$

¹En la ec. 2.18 el término del lado izquierdo es la diferencial de E respecto a x y el término del lado derecho es la función de pérdida de energía dependiente de la energía.

obtenemos

$$dx = \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE \quad (2.19)$$

Integrando ambos lados llegamos a

$$x = \int_E^{E_0} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE \quad (2.20)$$

Por medio de esta expresión se puede conocer la distancia que habrá recorrido una partícula que entró en el material con una energía E_0 en función de la energía que tenga después de haber recorrido una distancia x .

2.4.2 APROXIMACIONES PARA $\frac{dE}{dx}$

Si la distancia que recorre el proyectil es pequeña, entonces el valor de $\frac{dE}{dx}$ variará muy poco en todo el recorrido, considerando este valor como constante se puede obtener la llamada aproximación superficial dada por

$$x = \int_E^{E_0} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} \Big|_{E_0} dE = (E - E_0) \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} \Big|_{E_0}, \quad (2.21)$$

donde $\left(\frac{dE}{dx} (E) \right)^{-1} \Big|_{E_0}$ es el valor de la pérdida de energía a energía E_0 . Tenemos además la aproximación a la energía promedio:

$$x = (E - E_0) \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} \Big|_{\bar{E}}, \quad (2.22)$$

donde

$$\bar{E} = \frac{1}{2} (E + E_0). \quad (2.23)$$

2.4.3 SECCION DE FRENADO ϵ

El valor de la pérdida de energía $\frac{dE}{dx}$ depende del número de átomos que encuentre

el proyectil en su camino, es decir, dos muestras de materiales que tienen la misma composición pero diferente densidad atómica tendrán valores distintos de $\frac{dE}{dx}$.

Otra cantidad empleada para medir la pérdida de energía es la sección de frenado ε , dada por:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \frac{dE}{dx}, \quad (2.24)$$

donde N es la densidad atómica. Esta cantidad tiene la ventaja de que es independiente de la densidad atómica, sus unidades son las de *energía/área*.

2.4.4 SECCION DE FRENADO PARA MATERIALES COMPUESTOS POR MAS DE UN ELEMENTO.

Para un material que contiene más de un elemento la sección de frenado está dada por la combinación lineal de las secciones de frenado de cada elemento constituyente, donde los coeficientes de la combinación lineal son las proporciones atómicas normalizadas en las que se encuentra presente cada elemento en el material, es decir:

$$\varepsilon^{A_1 A_2 \dots A_k} = \sum_{i=1}^k n_i \varepsilon^{A_i}, \quad (2.25)$$

$$\text{con } \sum_{i=1}^k n_i = 1,$$

donde $\varepsilon^{A_1 A_2 \dots A_k}$ es la sección de frenado para una muestra compuesta por los elementos A_1, A_2, \dots, A_k y n_i es la proporción en la que se encuentra presente el elemento A_i .

Por ejemplo, para una muestra que contiene a los elementos A y B en proporciones m y n respectivamente se tiene que:

$$\varepsilon^{AB} = m\varepsilon^A + n\varepsilon^B. \quad (2.26)$$

Esta forma de obtener la sección de frenado para una muestra compuesta, se conoce como regla de Bragg.

2.5 STRAGGLING Y POSICION REAL DE UN FRENTE DE PICO ELEMENTAL.

Cuando un haz de partículas viaja una distancia x dentro de un material, este pierde una energía $\Delta E = E_0 - E(x)$ donde $E(x)$ está dado por 2.17. En realidad este valor ΔE de pérdida de energía es un promedio de los valores de la pérdida de energía de cada una de las partículas del haz. La energía que pierde una partícula depende del número de colisiones que esta experimenta y éste número varía al azar; entonces, si inicialmente se tiene un haz monoenergético con energía E_0 , después de recorrer cierta distancia en el material, las partículas que conforman el haz habrán perdido una cantidad de energía que se encuentra dentro del intervalo $\Delta E \pm \delta E$. Este fenómeno se conoce como straggling. Sus efectos se pueden apreciar en el espectro como un ensanchamiento y

pérdida de altura de los picos elementales (fig. 2.3).

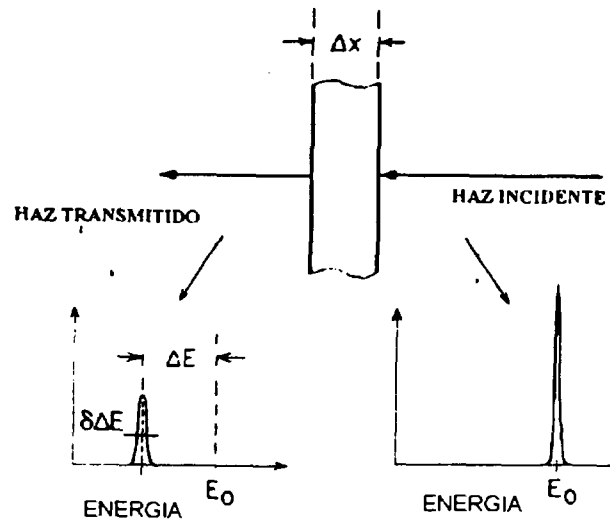


Figura 2.3 Fenómeno de Straggling.

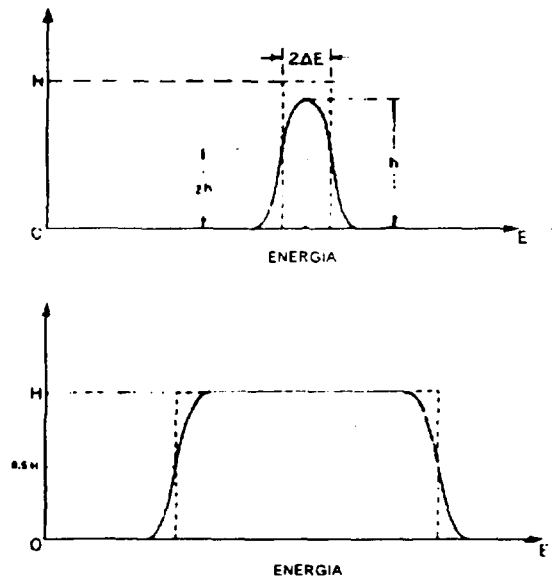


Figura 2.4 Determinación del frente real de un pico elemental.

Para retrodispersión superficial no hay straggling debido a que los proyectiles no tienen que viajar dentro de la muestra. Sin embargo se aprecia un efecto similar en la parte de alta energía de los picos debido a varios factores que afectan la resolución del sistema,

siendo uno de ellos el hecho de que el haz no es completamente monoenergético. Se puede decir que la forma de los extremos de un pico elemental será la de una distribución gaussiana; entonces como extremo real de un pico se puede tomar el canal cuya altura es la mitad de la altura máxima (fig. 2.4) o un punto intermedio entre este último y la altura máxima, dependiendo del ancho del pico.

CAPITULO 3

ELEMENTOS DE LA TECNICA RBS

3.1 CALCULO DE LA ESCALA DE PROFUNDIDAD

3.1.1 SECCION DE FRENADO PARA MUESTRAS COMPUESTAS POR UN SOLO ELEMENTO

En primer lugar se obtendrá la escala de profundidad para una muestra formada por un solo elemento y posteriormente se hará la generalización para muestras que contienen varios elementos. Tomemos en cuenta un haz de partículas con energía E_0 que incide en una muestra con un ángulo θ_1 con respecto a la normal de la superficie de la muestra, y consideremos que se detectan las partículas dispersadas a un ángulo θ_2 respecto a la normal (fig. 3.1). Las partículas dispersadas en la superficie se detectan con energía KE_0 y las partículas dispersadas a una profundidad x se detectan con energía E_2 . La energía del proyectil justo antes de una retrodispersión a una profundidad x es $E_1 < E_0$, y su energía justo después de la colisión será KE_1 . En la figura 3.1 se observa que la distancia que recorre el haz dentro del material hasta llegar a la profundidad x es $x/\cos\theta_1$ y la distancia que recorre hasta salir de la muestra es $x/\cos\theta_2$. A partir de 2.20 obtenemos:

$$\frac{x}{\cos\theta_1} = - \int_{E_0}^{E_1} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE, \quad (3.1)$$

$$\frac{x}{\cos\theta_2} = - \int_{KE_1}^{E_2} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE. \quad (3.2)$$

Por el teorema del valor medio para integrales existe un valor de la energía E' con $E_1 \leq E' \leq E_0$ tal que:

$$\int_{E_0}^{E_1} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE = (E_1 - E_0) \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} \Big|_{E'} \quad (3.3)$$

llamemos $\frac{dE}{dx} \Big|_{in}$ a la cantidad $\frac{dE}{dx} \Big|_{E'}$ y sea $\frac{dE}{dx} \Big|_{out}$ el análogo para el camino de salida, entonces

$$E_1 = E_0 - \frac{x}{\cos \theta_1} \frac{dE}{dx} \Big|_{in} \quad (3.4)$$

$$E_2 = K E_1 - \frac{x}{\cos \theta_2} \frac{dE}{dx} \Big|_{out} \quad (3.5)$$

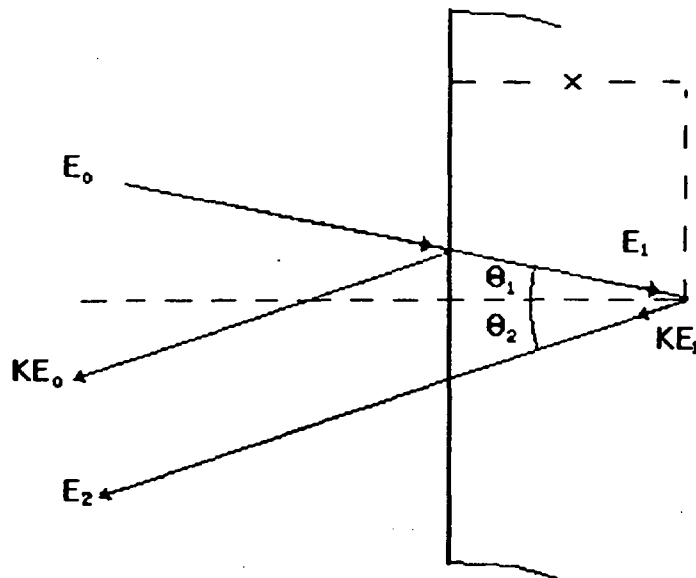


Figura 3.1 Retrodispersión en la superficie y dentro de una muestra.

Pero los valores de E_1 y $K E_1$ no se pueden determinar experimentalmente, sin embargo, pueden eliminarse empleando 3.4 y 3.5, dando como resultado:

$$K E_0 - E_2 = \left[\frac{K}{\cos \theta_1} \frac{dE}{dx} \Big|_{in} + \frac{1}{\cos \theta_2} \frac{dE}{dx} \Big|_{out} \right] x. \quad (3.6)$$

Definamos al factor de pérdida de energía $[S]$ como:

$$[S] = \left[\frac{K}{\cos \theta_1} \frac{dE}{dx} \Big|_{in} + \frac{1}{\cos \theta_2} \frac{dE}{dx} \Big|_{out} \right], \quad (3.7)$$

y sea $\Delta E = K E_0 - E_2$, entonces:

$$\Delta E = [S] x, \quad (3.8)$$

es decir, el valor de $[S]$ nos dice como es la pérdida de energía en función de la profundidad. Se hace la observación de que la relación entre ΔE y x no es lineal, ya que el valor de $[S]$ no es constante, debido a la dependencia de la energía para los valores de $\frac{dE}{dx} \Big|_{in}$ y de $\frac{dE}{dx} \Big|_{out}$. Sin embargo, en algunos casos un valor constante de $[S]$ es una buena aproximación a la realidad.

Si el factor de pérdida de energía $[S]$ se multiplica por $1/N$, entonces obtenemos el factor de sección de frenado $[\varepsilon]$, es decir:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{N} [S] = \left[\frac{K}{\cos \theta_1} \varepsilon_{in} + \frac{1}{\cos \theta_2} \varepsilon_{out} \right], \quad (3.9)$$

de aquí que:

$$\Delta E = [\varepsilon] N x.$$

La aproximación de energía superficial y la aproximación de energía promedio pueden emplearse para $[S]$ y $[\varepsilon]$ de la misma forma en que se emplearon en la sección 2.4.2. Para valores pequeños de x se emplea la aproximación de energía superficial dada por:

$$[S_0] = \left[\frac{K}{\cos \theta_1} \frac{dE}{dx} \Big|_{E_0} + \frac{1}{\cos \theta_2} \frac{dE}{dx} \Big|_{KE_0} \right], \quad (3.10)$$

y

$$[\varepsilon_0] = \left[\frac{K}{\cos \theta_1} \varepsilon(E_0) + \frac{1}{\cos \theta_2} \varepsilon(K E_0) \right]. \quad (3.11)$$

En los casos en los que el cambio en la energía es más apreciable se emplea la aproximación de energía promedio:

$$[\bar{S}] = \left[\frac{K}{\cos \theta_1} \frac{dE}{dx} \Big|_{\bar{E}_{in}} + \frac{1}{\cos \theta_2} \frac{dE}{dx} \Big|_{\bar{E}_{out}} \right], \quad (3.12)$$

y

$$[\bar{\varepsilon}] = \left[\frac{K}{\cos \theta_1} \varepsilon(\bar{E}_{in}) + \frac{1}{\cos \theta_2} \varepsilon(\bar{E}_{out}) \right], \quad (3.13)$$

donde

$$\bar{E}_{in} = \frac{1}{2} (E_0 + E_1), \quad (3.14)$$

y

$$\bar{E}_{out} = \frac{1}{2} (K E_1 + E_2). \quad (3.15)$$

Aquí el problema consiste en el hecho de que es imposible obtener directamente los valores de E_1 . Una solución es considerar que la pérdida de energía $\Delta E = K E_0 - E_2$ (la cual se puede conocer) se distribuye en el camino de entrada y salida de forma tal que

$$E_1 = E_0 - \frac{1}{2} \Delta E = E_2 + \frac{1}{2} \Delta E. \quad (3.16)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \bar{E}_{in} &\simeq E_0 - \frac{1}{4} \Delta E, \\ \bar{E}_{out} &\simeq E_1 + \frac{1}{4} \Delta E. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En caso de que se requiera mayor precisión puede emplearse el método iterativo. Este método consiste en obtener la aproximación superficial $[\varepsilon_0]$ y con ésta calcular un espesor x . Empleando 3.4 se calcula una aproximación para E_1 y con el valor obtenido se calcula

un nuevo valor de $[\varepsilon]$ usando la aproximación de energía promedio. Este proceso se repite hasta obtener la precisión deseada. Este método se ilustra en el siguiente diagrama:

$$E_{in} \simeq E_0, \quad E_{out} \simeq K E_0, \quad [\bar{\varepsilon}] \simeq [\varepsilon_0] \quad y \quad \bar{\varepsilon}_{in} \simeq \varepsilon_0$$

↓

$$Nx = \frac{\Delta E}{[\bar{\varepsilon}]}$$

↓

$$E_1 = E_0 - \frac{Nx}{\cos \theta_1} \bar{\varepsilon}(E_{in})$$

↓

$$\bar{E}_{in} = \frac{1}{2} (E_0 + E_1)$$

$$\bar{E}_{out} = \frac{1}{2} (K E_1 + E_2)$$

↓

$$[\bar{\varepsilon}] = \left[\frac{K}{\cos \theta_1} \varepsilon(\bar{E}_{in}) + \frac{1}{\cos \theta_2} \varepsilon(\bar{E}_{out}) \right]$$



3.1.2 SECCION DE FRENADO PARA MUESTRAS COMPUESTAS POR VARIOS ELEMENTOS

Para una muestra compuesta por n elementos existen n factores de sección de frenado, cada factor corresponde a un elemento. Si la muestra está formada por los elementos A

y B distribuidos homogéneamente, entonces para el elemento A el factor de sección de frenado $[\varepsilon]^A$ está dado por

$$[\varepsilon]^A = \frac{K_A}{\cos \theta_1} \varepsilon_{in}^{AB} + \frac{1}{\cos \theta_2} \varepsilon_{out}^{AB}, \quad (3.18)$$

donde ε_{in}^{AB} y ε_{out}^{AB} se obtienen aplicando la regla de Bragg y K_A es el factor cinemático para el elemento A . Análogamente:

$$[\varepsilon]^B = \frac{K_B}{\cos \theta_1} \varepsilon_{in}^{AB} + \frac{1}{\cos \theta_2} \varepsilon_{out}^{AB}. \quad (3.19)$$

Observación: Se debe tener precaución al calcular los valores de la sección de frenado; para ambos elementos ε_{in}^{AB} tiene el mismo valor a cualquier profundidad, sin embargo ε_{out}^{AB} no tiene los mismos valores ya que la energía de retrodispersión es diferente para cada elemento.

3.2 ALTURA DE UN ESPECTRO

A partir de 2.15 se puede calcular para cada elemento presente en la muestra la altura del espectro para retrodispersión en la capa superficial; para el primer canal correspondiente a cierto elemento se tiene que

$$H_0 = Q\Omega\sigma(E_0)N \frac{t_0}{\cos \theta_1}, \quad (3.20)$$

H_0 es la altura del primer canal correspondiente al elemento, $\sigma(E_0)$ es la sección diferencial evaluada a energía E_0 y t_0 es el espesor de la muestra correspondiente a los eventos de retrodispersión del canal H_0 . t_0 está dividido por $\cos \theta_1$ debido al ángulo de incidencia del haz. Por otro lado, las partículas retrodispersadas por los núcleos que se encuentran al frente de la capa de espesor t_0 serán dispersados con una diferencia de energía \mathcal{E} con respecto a los últimos núcleos de esta capa, este intervalo de energía \mathcal{E} corresponde al

ancho de energía por canal, el cual se puede escribir como

$$\mathcal{E} = [\varepsilon_0] N t_0 \quad (3.21)$$

Sustituyendo esta ecuación en 3.20 llegamos a

$$H_0 = Q\Omega\sigma(E_0) \frac{\mathcal{E}}{[\varepsilon_0] \cos \theta_1}. \quad (3.22)$$

Si se tiene una muestra compuesta por dos elementos A y B entonces para cada elemento la altura superficial está dada por:

$$\begin{aligned} H_{0A} &= Q\Omega\sigma_A(E_0) N_A \frac{t_{0A}}{\cos \theta_1}, \\ H_{0B} &= Q\Omega\sigma_B(E_0) N_B \frac{t_{0B}}{\cos \theta_1}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} N_{AB} t_{0A} &= \frac{\mathcal{E}}{[\varepsilon_0]^A}, \\ N_{AB} t_{0B} &= \frac{\mathcal{E}}{[\varepsilon_0]^B}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

pero $N_A = m N_{AB}$ y $N_B = n N_{AB}$, entonces

$$\begin{aligned} H_{0A} &= Q\Omega\sigma_A(E_0) \frac{m\mathcal{E}}{[\varepsilon_0]^A \cos \theta_1}, \\ H_{0B} &= Q\Omega\sigma_B(E_0) \frac{n\mathcal{E}}{[\varepsilon_0]^B \cos \theta_1}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si se realiza el cociente de ambas alturas obtenemos:

$$\frac{H_{0A}}{H_{0B}} = \frac{m \sigma_A(E_0) [\varepsilon_0]^B}{n \sigma_B(E_0) [\varepsilon_0]^A}. \quad (3.26)$$

Considerando $[\varepsilon_0]^B / [\varepsilon_0]^A \simeq 1$ se puede obtener una primera aproximación para m/n y posteriormente realizar varias iteraciones para mejorar este valor.

3.3 INTEGRACION DE PICOS

El número de cuentas para retrodispersión a profundidad x_i está dado por

$$H_i = Q\Omega\sigma(E_i) N \frac{t_i}{\cos \theta_1}, \quad (3.27)$$

donde E_i es la energía del proyectil a profundidad x_i , y t_i es el espesor de la región de la muestra cuyos eventos de retrodispersión van a dar al canal i . El número A de cuentas pertenecientes al pico de un elemento está dado por

$$A = \sum_i H_i, \quad (3.28)$$

y H_i se obtiene de 3.27. Considerando magnitudes continuas, en lugar de la suma se realiza una integral:

$$A = \frac{Q\Omega N}{\cos \theta_1} \int_0^t \sigma(E) dx. \quad (3.29)$$

Si se tiene un pico lo suficientemente delgado como para que la pérdida de energía sea despreciable, es posible considerar a la energía como constante, entonces a partir de 3.29 se tiene que

$$A = \sigma(E_0) \Omega Q \frac{Nt}{\cos \theta_1}. \quad (3.30)$$

En el caso de una película más gruesa se puede emplear una aproximación a la energía promedio y realizar varias iteraciones para obtener valores cada vez mas precisos, empleando el método expuesto en 3.1.1.

4. CAPITULO 4

4.1 ANALISIS DE UNA PELICULA ORO-MYLAR-ORO

El espectro de la película de oro y mylar fue obtenido con el acelerador Tandem Van de Graaff del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares empleando un haz de protones de 3.5 MeV. El ángulo haz-normal a la muestra fue de $\theta_1 = 0^\circ$ y el ángulo normal a la muestra-detector de $\theta_2 = 15^\circ$. El espectro se muestra en la figura 4.2.

A partir del espectro se obtuvieron las alturas y las posiciones de los picos, también se calculó el factor cinemático para cada uno de los elementos presentes en la muestra. En la tabla 4.1 se muestran la altura máxima de los picos y el canal cuya altura es la mas cercana a la mitad de la altura máxima (esto debido a que no siempre existe un canal cuya altura es la mitad de la altura máxima); este canal se tomó como el frente del pico elemental. El mismo criterio fue usado para determinar el extremo posterior de cada pico. En la figura 4.1 se introduce la notación empleada en el análisis.

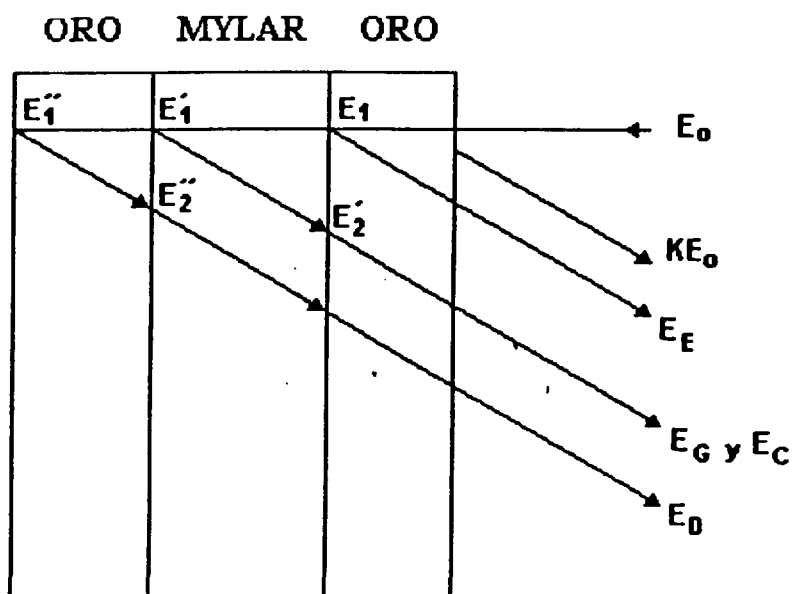


Figura 4.1 Notación empleada en el análisis de la película de oro-mylar-oro.

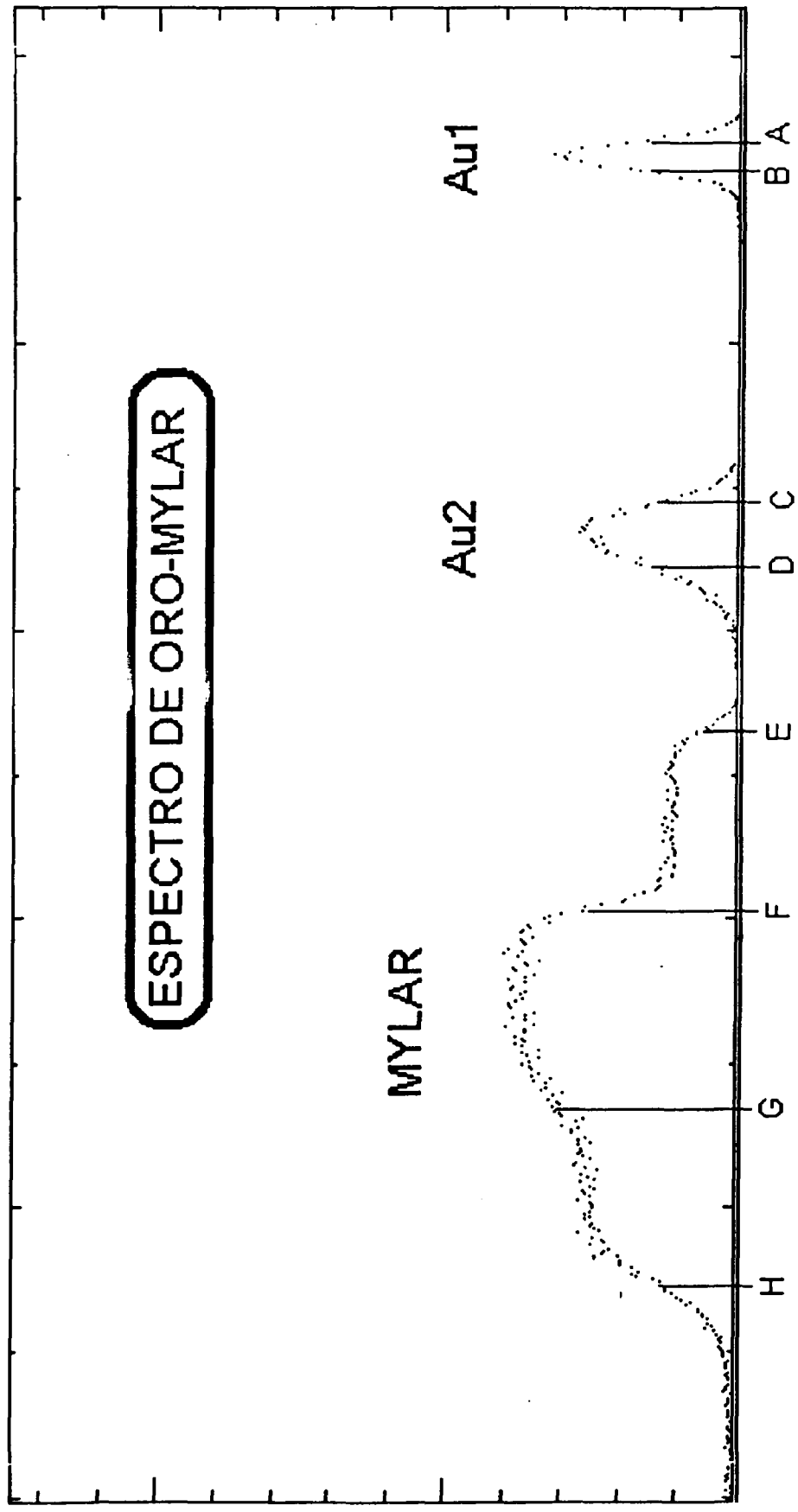


Figura 4.2

Debido a que no se tiene retrodispersión superficial para dos elementos distintos, no se puede obtener una calibración directa del espectro. Para salvar este obstáculo se calculó una aproximación para la densidad areal de la primera capa de oro. La calibración con la cual se realizó este cálculo se obtuvo suponiendo retrodispersión superficial en la película de mylar, dando un valor de

$$\frac{E_A - E_E}{Canal_A - Canal_E} = 2.448KeV/Canal, \quad (4.1)$$

para el ancho de energía por canal y 75.98KeV para la energía del canal cero.

DATOS DEL ESPECTRO

ENERGIA(MeV)=	2,5
PROYECTIL=	PROTON
ANGULO(GR)=	165

	A	B	C	D	E	F	G	H
Hmax	639	639	547	547	223	514	226	508
Hmax/2	319	319	273	273	111	257	113	254
Hmax/2(REAL)	393	346	270	262	100	(471)	(635)	253
CANAL	970	960	845	821	766	705	635	573

ELEMENTO	K
C	0,71842
O	0,78035
Au1	0,98008

Tabla 4.1 Datos del espectro de la película oro-mylar-oro.

La densidad areal de la película de oro resultó ser de $893 \times 10^{15} \text{ atomos/cm}^2$. Con este ultimo valor se calculó la energía de salida (después de cruzar la película de oro) de los proyectiles retrodispersados en la parte frontal del mylar. Ya que este valor corresponde a una mejor aproximación a la energía del frente E del pico de oxígeno, entonces se puede emplear para obtener una mejor calibración. Este proceso fue repetido cinco veces, siendo el valor final de la calibración $2.569KeV/Canal$ y $42.1KeV$ la energía del

canal 0. Simultáneamente fue obtenido el valor final de la densidad areal de la primera capa de oro: $N_{Au1}x = 937 \times 10^{15} \text{átomos/cm}^2$. Los valores del intervalo de energía por canal, energía del canal cero y de la densidad areal obtenidos en cada iteración fueron los siguientes:

Aproximación	energía/canal(KeV)	E(canal 0)(KeV)	$N_{Au1}x(10^{15} \text{átomos/cm}^2)$
1	0.002448	0.07598	893.481
2	0.002563	0.03630	935.627
3	0.002569	0.04183	937.702
4	0.002569	0.04210	937.804
5	0.002569	0.04212	937.804

Para la película de mylar se empleó nuevamente el método iterativo con el pico de oxígeno. Considerando la diferencia de energía $\Delta E = KE_1 - E_G$, entonces la primera aproximación para el valor de la densidad areal del mylar es

$$Nx = \frac{\Delta E}{[\bar{\epsilon}]^{my}}, \quad (4.2)$$

con $\bar{E}_{in} = E_1$ y $\bar{E}_{out} = E_G$.

Con este valor se calculó una aproximación para E'_1 , y después se obtuvo E'_2 restando a $K_{my}E'_1$ la energía perdida en el camino de salida. Se calculó un nuevo valor para E'_2 sumando a E_G la energía perdida al atravesar la capa de oro

$$E'_2 = E_G + \frac{N_{Au1}x}{\cos \theta_2} \epsilon \left(\frac{1}{2} (E_G + E'_2) \right) \quad (4.3)$$

La diferencia entre la energía de entrada y la energía de salida está dada ahora por

$$\Delta E = KE_1 - E'_2 \quad (4.4)$$

El resultado final se obtuvo después de tres iteraciones, ya que una tercera no muestra un cambio importante (menor al 1%), siendo el valor final para la densidad superficial del mylar $N_{Oxi}x = 8.2 \times 10^{19} \text{átomos/cm}^2$. En este caso los resultados obtenidos en cada

aproximación fueron los siguientes:

Aproximación	$N_{Ox}x(10^{15}\text{átomos}/\text{cm}^2)$
1	80246
2	82173
3	82070

El cálculo de la densidad superficial de la segunda película de oro fue algo más complicada debido a que esta se encuentra bajo las capas de mylar y oro, lo cual implica una mayor imprecisión en la determinación de la energía E_2'' . Para la primera aproximación tenemos que

$$\Delta E = K_{Au}E_1' - E_D, \quad (4.5)$$

entonces

$$N_{Au2}x = \frac{\Delta E}{[\bar{\epsilon}]^{Au}} = 7379 \times 10^{15} \text{átomos}/\text{cm}^2, \quad (4.6)$$

con $\bar{E}_{in} = E_1'$ y $\bar{E}_{out} = E_D$. Con este valor de $N_{Au2}x$ se calculó

$$E_1'' = E_1' - N_{Au2}x \epsilon(\bar{E}_{in}), \quad (4.7)$$

y de aquí se obtuvo

$$E_2'' = E_D + \frac{N_{Au1}x}{\cos \theta_2} \epsilon_{Au}(\bar{E}_{out}) + \frac{N_{my}x}{\cos \theta_2} \epsilon_{my}(\bar{E}_{out}), \quad (4.8)$$

donde $\bar{E}_{out} = K_{Au}E_1''$, entonces se tiene un nuevo intervalo de energía

$$\Delta E = K_{Au}E_1' - E_2'', \quad (4.9)$$

con el cual se calculó la segunda aproximación para $N_{Au2}x$, resultando $838 \times 10^{15} \text{átomos}/\text{cm}^2$.

Este valor de $N_{Au2}x$ se empleó para mejorar los valores de E_1'' y E_2'' . Finalmente se obtuvo un nuevo intervalo de energía

$$\Delta E = K_{Au}E_1' - E_2'', \quad (4.10)$$

con éste se obtuvo el valor definitivo para la densidad superficial de la segunda película de oro: $N_{Au2}x = 804 \times 10^{15} \text{átomos}/\text{cm}^2$.

Los valores de la densidad superficial de cada capa se dividieron entre la densidad atómica de cada material, dando como resultado el espesor de cada capa. Estos valores son:

$$x_{Au1} = 0.16\mu m \pm 0.03\mu m.$$

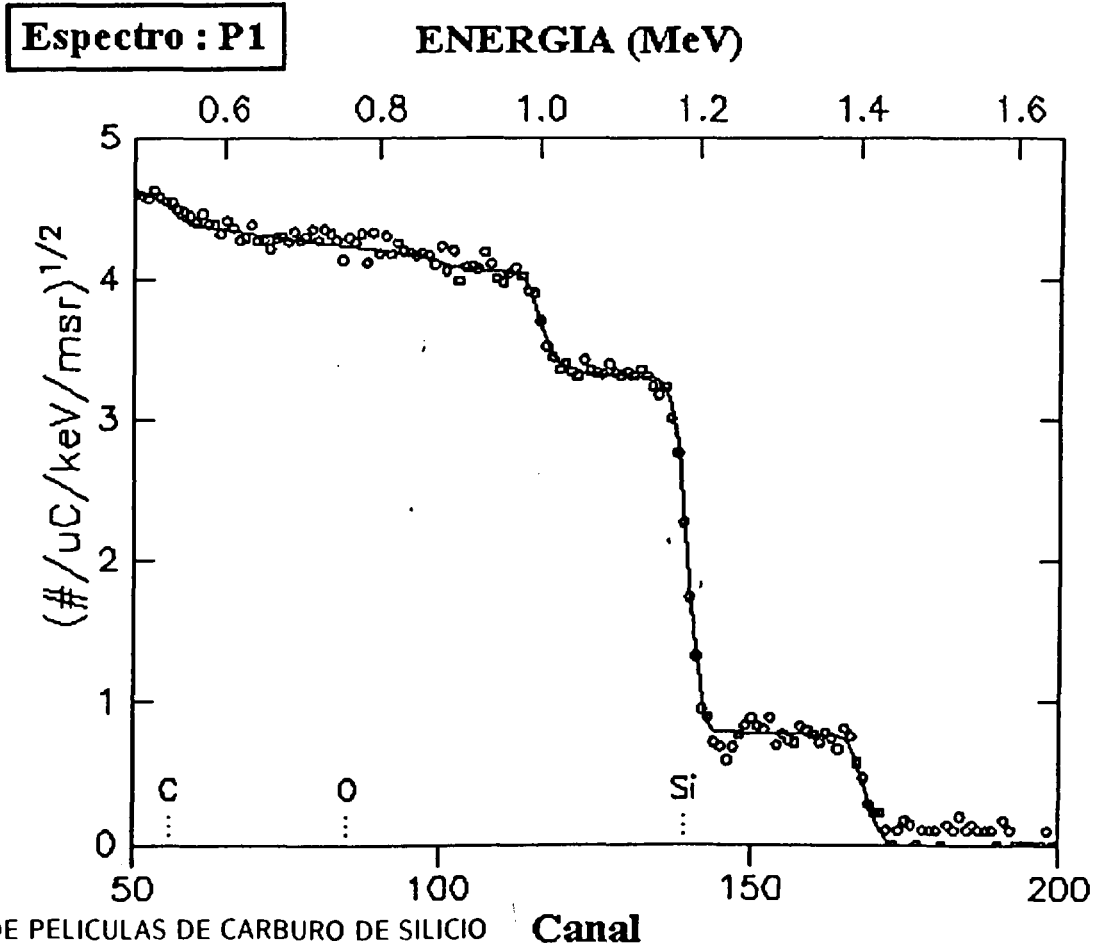
$$x_{my} = 8.5\mu m \pm 1.65\mu m.$$

$$x_{Au2} = 0.13\mu m \pm 0.03\mu m.$$

4.2 ANALISIS DE PELICULAS DE CARBURO DE SILICIO

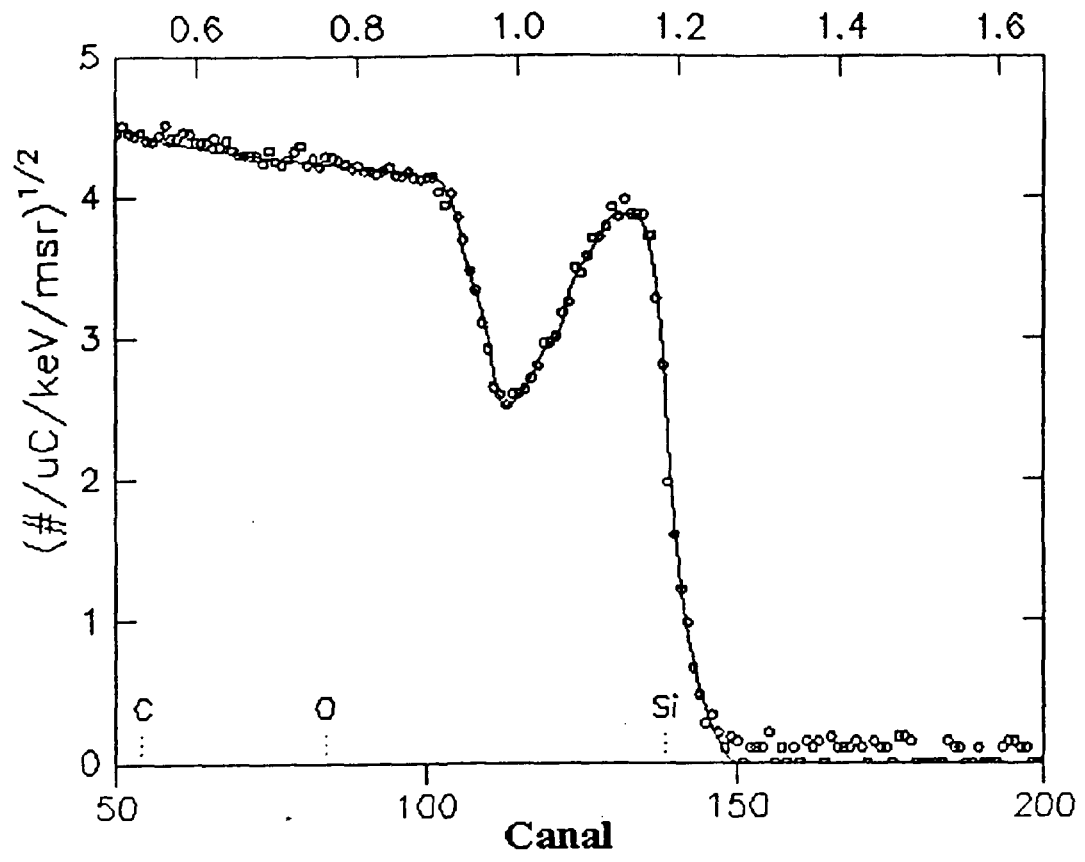
El carburo de silicio es un semiconductor de gran importancia por ser único en sus propiedades ópticas (luminiscencia en azul), físicas (resistencia a temperaturas entre 300 y 400 °C, alta dureza mecánica), y químicas (resistencia a la corrosión química muy por encima de los demás semiconductores).

Los espectros de las películas de carburo de silicio fueron tomados con el acelerador CN Van de Graaff del Instituto de Física de la UNAM, con un haz de partículas alfa a una energía de 2.0 MeV, un ángulo de incidencia de 0° y el detector fue colocado a un ángulo de 15° con respecto a la normal a la superficie de la muestra. En seguida se muestran los espectros de algunas de las películas de carburo de silicio.



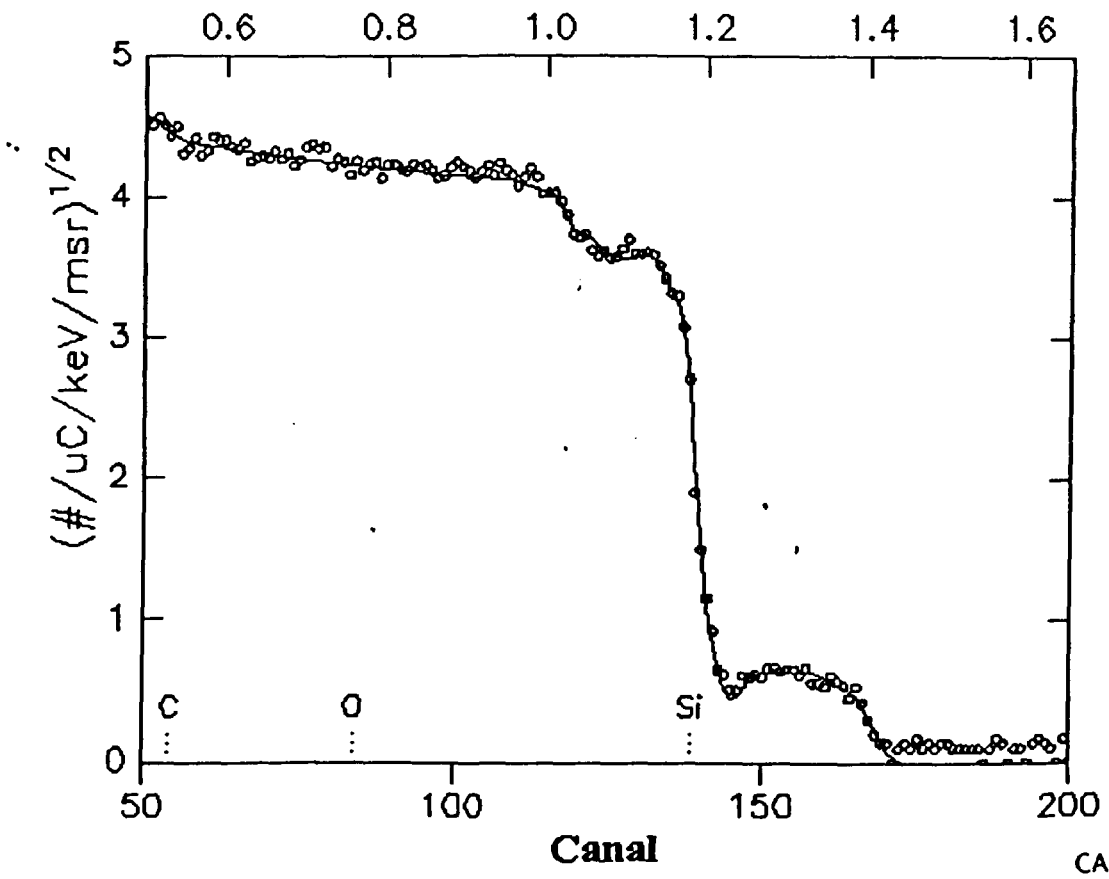
Espectro: P4

ENERGIA (MeV)

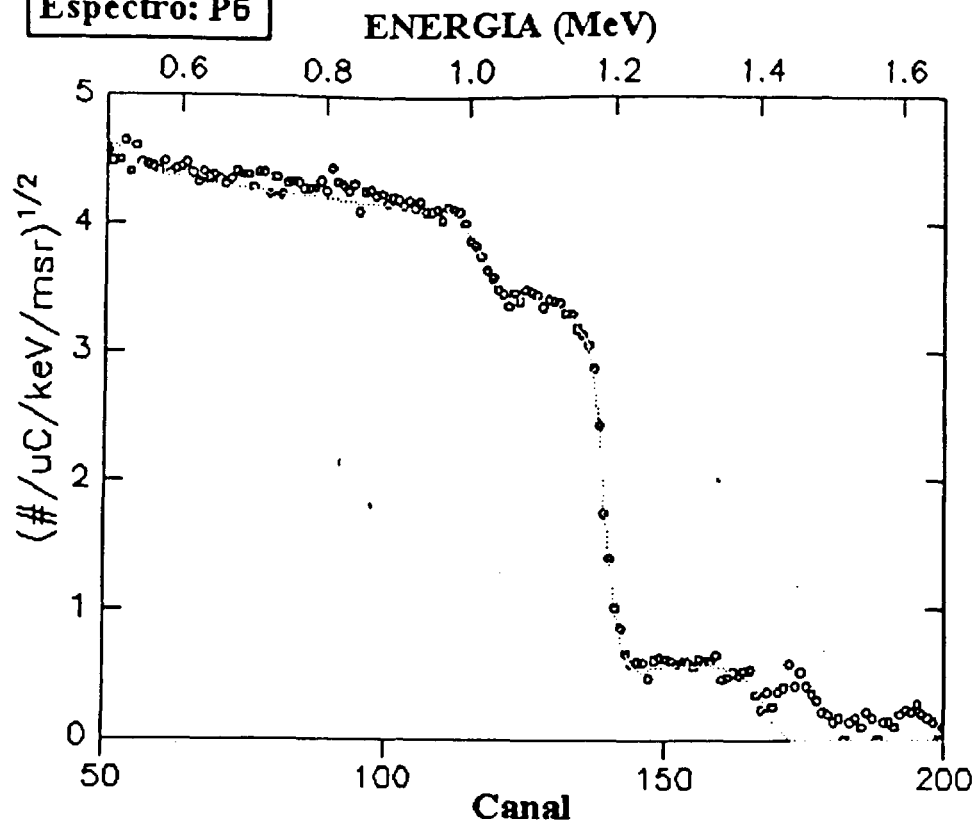


Espectro: P5

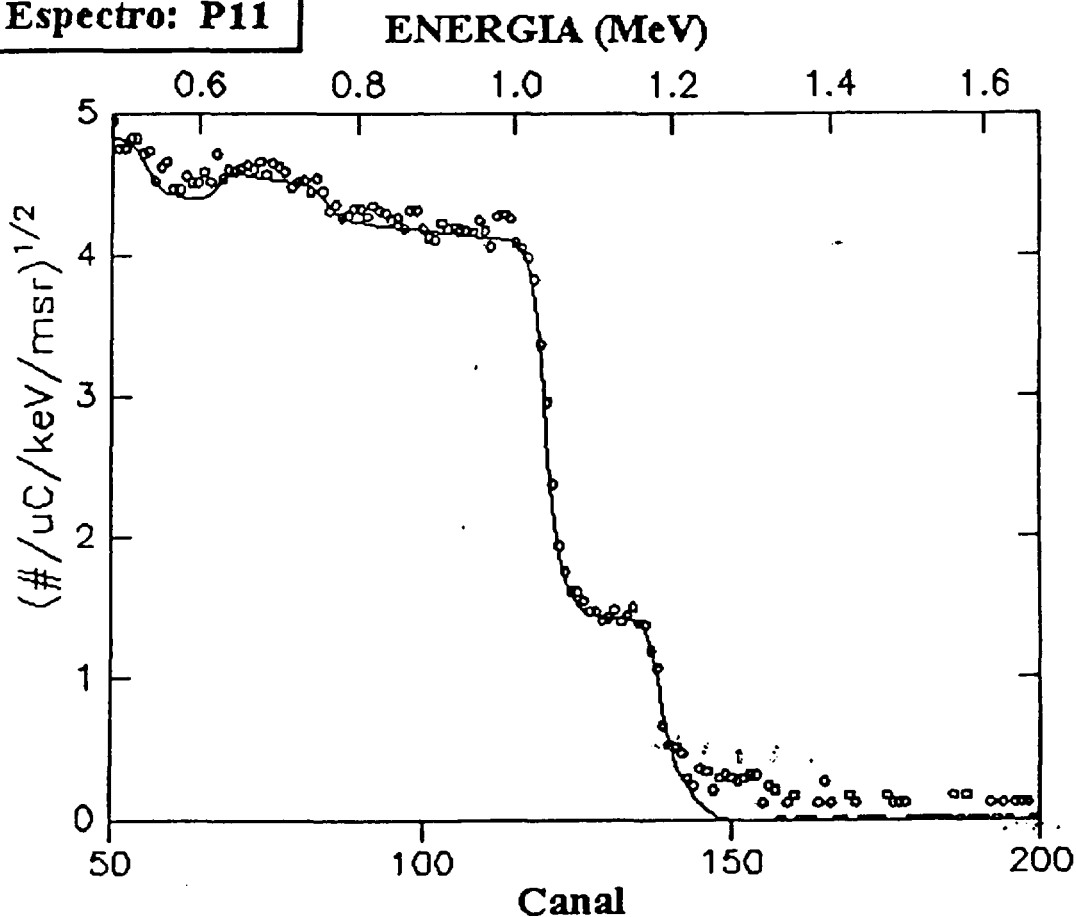
ENERGIA (MeV)



Espectro: P6



Espectro: P11



Los espectros analizados en este trabajo, corresponden a películas porosas luminescentes obtenidas a partir de películas delgadas de SiC amorfo epitaxial, depositado en un sustrato de silicio y tratadas usando una anodización electroquímica en una solución HF/etilen glicol con altos voltajes anódicos, Las películas de SiC poroso poseen casi la misma composición química que las de SiC sin el tratamiento electroquímico, salvo por un pequeño decremento de carbono.[7]

En la siguiente tabla se muestran los resultados del análisis de las películas de carburo de silicio.

P1		ESPESOR(ANGSTROMS)
CAPA 1		3100
COMPOSICION		
Si 0,56		
C 0,44		
Ar 1,80E-02		
CAPA 2		2600
COMPOSICION		
Si 0,95		
C 5,00E-02		
CAPA 3		100000
COMPOSICION		
Si 1		

P3		ESPESOR(ANGSTROMS)
CAPA 1		900
COMPOSICION		
Si 0,98		
C 2,00E-02		
CAPA 2		1200
COMPOSICION		
Si 0,91		
C 9,00E-02		
CAPA 3		800
COMPOSICION		
Si 0,61		
C 0,39		
CAPA 4		270
COMPOSICION		
Si 0,25		
C 0,75		
CAPA 5		140
COMPOSICION		
Si 0,66		
C 0,34		
CAPA 6		340
COMPOSICION		
Si 0,18		
C 0,82		
CAPA 7		630
COMPOSICION		
Si 0,3		
C 0,7		
CAPA 8		750
COMPOSICION		
Si 0,73		
C 0,27		
CAPA 9		100000
COMPOSICION		
Si 0,91		
C 9,00E-02		

P4		ESPEJOR(ANGSTROMS)
CAPA 1		1830
COMPOSICION		
SI 0,88		
C 0,12		
CAPA 2		170
COMPOSICION		
SI 0,35		
C 0,65		
CAPA 3		410
COMPOSICION		
SI 0,9		
C 0,1		
CAPA 4		190
COMPOSICION		
SI 0,12		
C 0,88		
CAPA 5		370
COMPOSICION		
SI 0,52		
C 0,48		
CAPA 6		380
COMPOSICION		
SI 0,23		
C 0,77		
CAPA 7		190
COMPOSICION		
SI 0,45		
C 0,55		
CAPA 8		200
COMPOSICION		
SI 7,00E-02		
C 0,93		
CAPA 9		720
COMPOSICION		
SI 0,5		
C 0,5		
CAPA 10		100000
COMPOSICION		
SI 1		

P5		ESPEJOR(ANGSTROMS)
CAPA 1		470
COMPOSICION		
SI 0,75		
C 0,25		
AR 8,00E-03		
CAPA 2		130
COMPOSICION		
SI 0,1		
C 0,9		
AR 8,00E-03		
CAPA 3		300
COMPOSICION		
SI 0,94		
C 6,00E-02		
AR 9,00E-03		
CAPA 4		1400
COMPOSICION		
SI 0,68		
C 0,32		
AR 1,30E-02		
CAPA 5		30
COMPOSICION		
SI 0,88		
C 0,12		
AR 1,40E-02		
CAPA 6		380
COMPOSICION		
SI 0,92		
C 8,00E-02		
AR 1,40E-02		
CAPA 7		90
COMPOSICION		
SI 0,2		
C 0,8		
AR 1,50E-02		
CAPA 8		800
COMPOSICION		
SI 1		
CAPA 9		15
COMPOSICION		
SI 5,00E-02		
C 0,95		
CAPA 10		100000
COMPOSICION		
SI 1		

P6		ESPEJOR(ANGSTROMS)
CAPA 1		2.900.000
COMPOSICION		
SI 0.5800000		
C 0.4200000		
AR 0.1700000E-01		
CAPA 2		500
COMPOSICION		
SI 0,75		
C 0,25		
AR 7,00E-03		
CAPA 3		100000
COMPOSICION		
SI 1		

P9		ESPEJOR(ANGSTROMS)
CAPA 1		850
COMPOSICION		
SI 0,67		
C 0,33		
AR 8,00E-03		
CAPA 2		2000
COMPOSICION		
SI 0,78		
C 0,22		
AR 1,00E-02		
CAPA 3		1130
COMPOSICION		
SI 0,7		
C 0,3		
AR 7,00E-03		
CAPA 4		100000
COMPOSICION		
SI 1		

P10		ESPEJOR(ANGSTROMS)
CAPA 1		1920
COMPOSICION		
SI 0,11		
C 0,764		
O 0,32		
AR 4,00E-04		
CAPA 2		100000
COMPOSICION		
SI 1		

P11		ESPEJOR(ANGSTROMS)
CAPA 1		2740
COMPOSICION		
SI 8,00E-02		
C 0,67		
O 0,25		
CAPA 2		100000
COMPOSICION		
SI 1		

P12		ESPEJOR(ANGSTROMS)
CAPA 1		840
COMPOSICION		
SI 0,29		
C 0,65		
O 6,00E-02		
CAPA 2		1350
COMPOSICION		
SI 0,38		
C 0,6		
O 2,00E-02		
CAPA 3		4150
COMPOSICION		
SI 0,46		
C 0,54		
CAPA 4		3400
COMPOSICION		
SI 0,88		
C 0,12		
CAPA 5		100000
COMPOSICION		
SI 1		

P13		ESPEJOR(ANGSTROMS)
CAPA 1		400
COMPOSICION		
SI 0,2		
C 0,65		
O 0,15		
CAPA 2		650
COMPOSICION		
SI 0,4		
C 0,45		
O 0,15		
CAPA 3		2050
COMPOSICION		
SI 0,48		
C 0,42		
O 0,1		
CAPA 4		3800
COMPOSICION		
SI 0,64		
C 0,4		
O 6,00E-02		
CAPA 5		2900
COMPOSICION		
SI 0,85		
C 0,15		
O 1,00E-02		
CAPA 6		100000
COMPOSICION		
SI 1		

P14		ESPEJOR(ANGSTROMS)
CAPA 1		400
COMPOSICION		
SI 0,2		
C 0,65		
O 0,15		
CAPA 2		900
COMPOSICION		
SI 0,4		
C 0,45		
O 0,15		
CAPA 3		2050
COMPOSICION		
SI 0,48		
C 0,42		
O 0,1		
CAPA 4		3800
COMPOSICION		
SI 0,64		
C 0,4		
O 6,00E-02		
CAPA 5		2900
COMPOSICION		
SI 0,85		
C 0,15		
O 1,00E-02		
CAPA 6		100000
COMPOSICION		
SI 1		

4.3 ANALISIS DE OBSIDIANAS

Una obsidiana tiene la composición química promedio del granito, pero debido a que se enfría rápidamente en el proceso de formación, no es posible que se formen cuarzos, feldspatos y otros materiales que le dan estructura heterogénea al granito, dando como resultado un material vítreo homogéneo. Entre los minerales que componen a la obsidiana se encuentran los siguientes: SiO_2 , TiO_2 , Al_2O_3 , Fe_2O_3 , FeO , MnO , MgO , CaO , Na_2O , K_2O , H_2O , y P_2O_5 .

Al igual que los espectros de las películas de carburo de silicio, los espectros de las obsidianas se obtuvieron con el acelerador del IFUNAM con partículas alfa con una energía de 2.0 MeV y ángulos de incidencia y dispersión de 0° y 15° respectivamente.

Las características principales que se pueden observar en un espectro típico de obsidiana (figs. 4.3 y 4.4) son los siguientes:

- En primer lugar se aprecia un escalón perteneciente al oxígeno.
- En seguida se observa un pequeño escalón generado por sodio, el cual en ocasiones es difícil resolver debido al ruido.
- El aluminio y el silicio generan conjuntamente un escalón, el cual es generalmente el más alto del espectro de obsidiana, debido a la cercanía de estos dos elementos es casi imposible separarlos.
- Finalmente se tienen otros dos escalones, uno perteneciente a la señal del potasio y el calcio, y el otro al magnesio y al hierro. Nuevamente hay dificultad para resolver a los dos elementos que forman a cada uno de estos escalones.

Los otros elementos que conforman a la obsidiana se encuentran en cantidades tan pequeñas que difícilmente se pueden apreciar en el espectro, por lo cual la técnica RBS es inadecuada para caracterizar estas trazas. En las figuras 4.3 y 4.4 se muestran dos espectros de obsidiana.

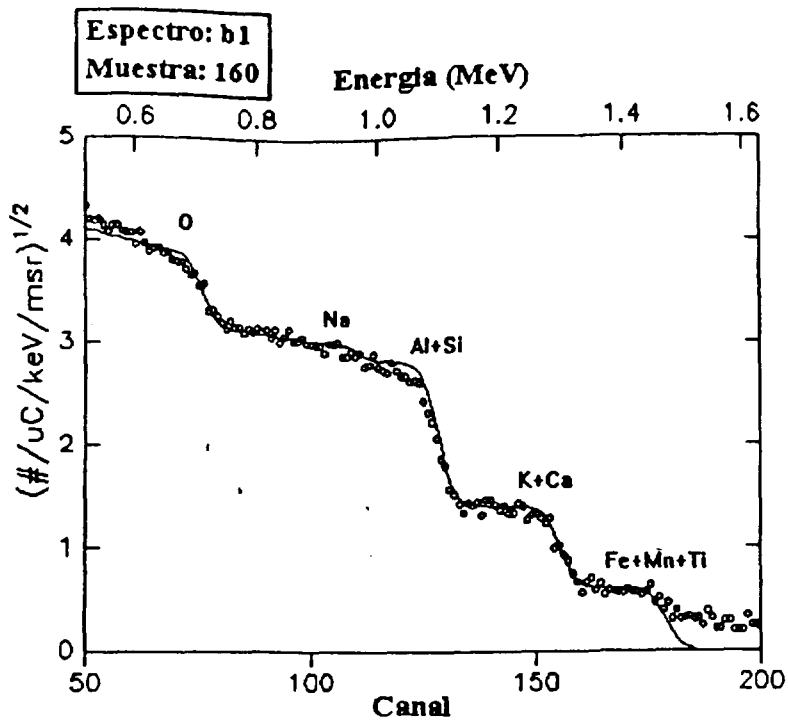


Fig 4.3

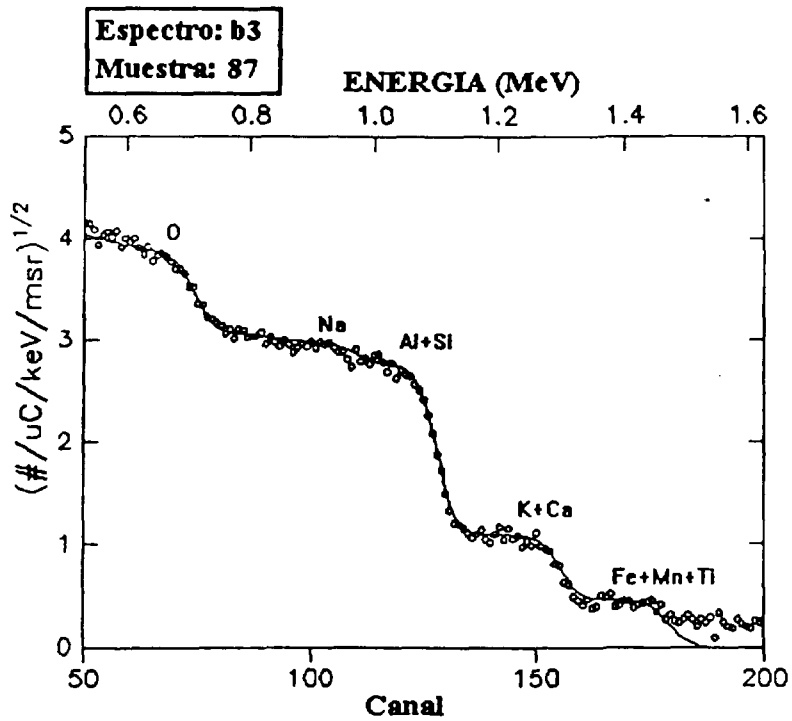


Fig 4.4

A continuación se muestran los resultados del análisis de las obsidianas. en el caso en el que no se pueden resolver los elementos de algún pico, en lugar de aparecer la concentración de cada elemento, se tiene la suma de ambos elementos.

ESPECTRO	MUESTRA
a1	200
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,454
Fe+Mn+Ti	0,008
K+Ca	0,048
O	0,491
a2	213
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,458
Fe+Mn+Ti	0,007
K+Ca	0,042
O	0,493
a3	238
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,424
Fe+Mn+Ti	0,011
K+Ca	0,045
O	0,520
a4	252
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,465
Fe+Mn+Ti	0,010
K+Ca	0,042
O	0,482
a5	254
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,457
Fe+Mn+Ti	0,009
K+Ca	0,046
O	0,488
a6	256
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,458
Fe+Mn+Ti	0,009
K+Ca	0,044
O	0,489
a7	265
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,467
Fe+Mn+Ti	0,013
K+Ca	0,043
O	0,477
a8	266
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,453
Fe+Mn+Ti	0,011
K+Ca	0,051
O	0,485

ESPECTRO	MUESTRA
a9	268
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,459
Fe+Mn+Ti	0,012
K+Ca	0,048
O	0,482
a10	269
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,458
Fe+Mn+Ti	0,012
K+Ca	0,043
O	0,487
a11	273
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,461
Fe+Mn+Ti	0,010
K+Ca	0,043
O	0,486

ESPECTRO	MUESTRA
b1	160
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,432
Fe+Mn+Ti	0,012
K+Ca	0,072
O	0,484
b2	65
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,450
Fe+Mn+Ti	0,005
K+Ca	0,036
O	0,509
b3	87
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,454
Fe+Mn+Ti	0,007
K+Ca	0,042
O	0,497
b4	208
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,448
Fe+Mn+Ti	0,008
K+Ca	0,045
O	0,500
b5	348
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,449
Fe+Mn+Ti	0,016
K+Ca	0,049
O	0,486
b6	62
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,452
Fe+Mn+Ti	0,008
K+Ca	0,046
O	0,493
b7	113
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,467
Fe+Mn+Ti	0,007
K+Ca	0,037
O	0,488
b8	46
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,461
Fe+Mn+Ti	0,009
K+Ca	0,037
O	0,493
b9	467
COMPOSICION	FRACC. DE LA MASA TOTAL
Si+Al+Na	0,439
Fe+Mn+Ti	0,013
K+Ca	0,052
O	0,497

5. CONCLUSIONES

En el caso de las películas de SiC, las diferencias observadas entre los espectros se deben al tratamiento al que habían sido sometidas las películas. Los resultados obtenidos muestran que el silicio y el carbono se encuentran en proporciones aproximadamente iguales; y esto es lo que se buscaba al elaborar estas películas. Aquí ponemos atención especial a los espectros P1 y P6. El espectro P1 corresponde a una película sin el tratamiento electroquímico descrito en la sección 4.2. El resultado obtenido en este trabajo para la composición es: $\text{Si}_{0.56}\text{C}_{0.44}$ para la capa superficial cuyo espesor es 300nm. Por otro lado, para la película correspondiente al espectro P6 (SiC tratado), la composición que se obtiene en este trabajo es: $\text{Si}_{0.58}\text{C}_{0.42}$, es decir, la cantidad de carbono disminuye en las películas que han sido sometidas al tratamiento electroquímico. Para construir la simulación del espectro de algunas películas fue necesario emplear varias capas con diferentes concentraciones, lo cual podría deberse al proceso de difusión al elaborar la película.

Al llevar a cabo el análisis de los espectros de obsidiana surge la dificultad de separar ciertos grupos de elementos; por este motivo no se muestran las cantidades en las que se encuentra presente cada elemento por separado. En estos casos se da la suma de las cantidades. Los picos que no se pueden resolver son: el pico que contiene Si, Al, y Na; el de K y Ca y el de Fe, Mn y Ti.

Por otro lado, los otros elementos que se encuentran presentes en la muestra se encuentran en cantidades tan pequeñas que difícilmente se pueden apreciar en el espectro. Por estos motivos la técnica RBS no es la más adecuada para obtener la estequiometría de las obsidianas. Sin embargo, permite ver elementos ligeros como el oxígeno y hasta cierto punto silicio y sodio, los cuales no se pueden detectar por medio de la técnica PIXE. Para el oxígeno se obtuvo una concentración promedio de $0.492 \pm .010$. Estas dos técnicas (RBS y PIXE) son las más adecuadas para el análisis de piezas arqueológicas debido a que no es necesario destruir la muestra.

APENDICE A

FACTOR CINEMATICO

Consideremos un proyectil con masa m_1 que colisiona elásticamente con una partícula con masa m_2 en el sistema de laboratorio. La velocidad del proyectil es v_0 y la partícula blanco se encuentra en reposo. Después de la colisión el proyectil es dispersado con velocidad v_1 a un ángulo θ y el blanco tendrá una velocidad v_2 a un ángulo ϕ (ver fig. A.1).

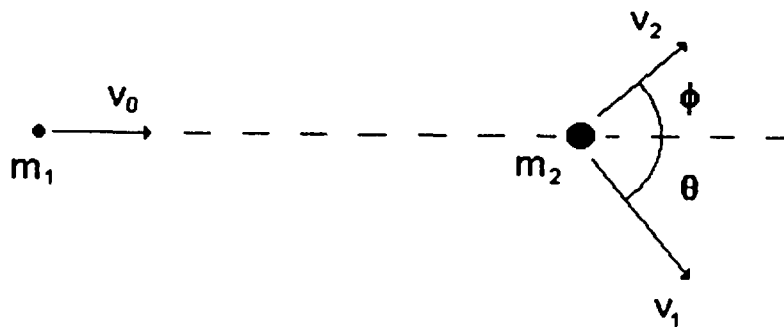


Fig A.1

Por conservación de energía tenemos:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad (\text{A.1})$$

Aplicando la ley de conservación del momento se tiene que:

$$m_1 \vec{v}_0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (\text{A.2})$$

separando en componentes:

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos \theta + m_2 v_2 \cos \phi \quad (\text{A.3})$$

$$0 = m_1 v_1 \sin \theta + m_2 v_2 \sin \phi \quad (\text{A.4})$$

elevando A.3 y A.4 al cuadrado

$$m_1^2 v_0^2 - 2m_1^2 v_0 v_1 \cos \theta + m_1^2 v_1^2 \cos^2 \theta = m_2^2 v_2^2 \cos^2 \phi \quad (\text{A.5})$$

$$m_1^2 v_1^2 \sin^2 \theta = m_2^2 v_2^2 \sin^2 \phi \quad (\text{A.6})$$

sustituyendo A.6 en A.5

$$m_1^2 v_0^2 - 2m_1^2 v_0 v_1 \cos \theta + m_1^2 v_1^2 = m_2^2 v_2^2 \quad (\text{A.7})$$

Sea

$$x = \frac{m_1}{m_2} \quad (\text{A.8})$$

de A.1 obtenemos:

$$v_2^2 = x(v_0^2 - v_1^2) \quad (\text{A.9})$$

sustituyendo en A.7 y simplificando

$$v_0^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) - 2v_0v_1 \cos \theta + v_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \quad (\text{A.10})$$

dividiendo entre v_0^2 y haciendo $K = \frac{v_1^2}{v_0^2}$

$$K \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2\sqrt{K} \cos \theta + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Esta es una ecuación cuadrática en \sqrt{K} cuya solución es:

$$\sqrt{K} = \frac{2 \cos \theta + \sqrt{4 \cos^2 \theta - 4 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}}{2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \quad (\text{A.12})$$

por lo tanto

$$K = \left[\frac{x \cos \theta + \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}}{1 + x} \right]^2 \quad (\text{A.13})$$

Esta es la expresión final para el factor cinemático en función de la razón de masas y el ángulo de dispersión.

APENDICE B

SECCION DE RETRODISPERSION DE RUTHERFORD

En primer lugar se obtendrá la sección diferencial de Rutherford en el sistema de centro de masa y posteriormente se hará la transformación al sistema de laboratorio. Debido a que la fuerza de interacción entre las dos partículas es la de Coulomb, entonces la trayectoria del proyectil será una hipérbola ya que se trata de una fuerza central donde el potencial está dado por:

$$V = -\frac{\alpha}{r}, \quad (\text{B.1})$$

con $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Z_1 Z_2 e^2$.

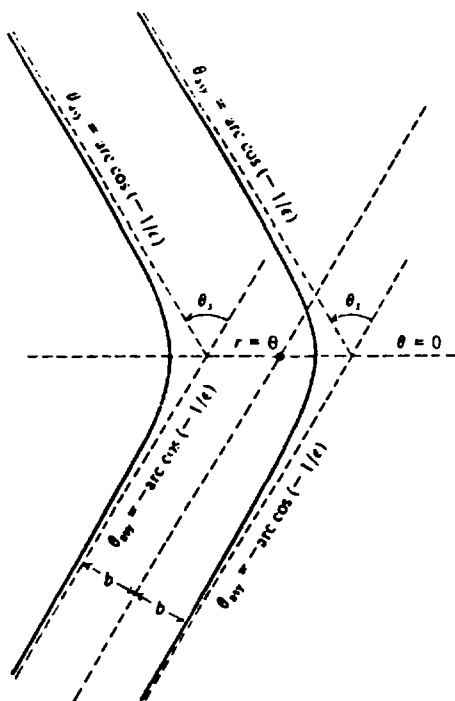


Fig B.1

En la figura B.1 se observa la relación entre el ángulo de dispersión θ_s y el ángulo θ_{asy} que forman las asíntotas de la hipérbola con el eje focal, entonces $\theta_s = \theta_{asy} - \alpha$, si $\alpha = \pi - \theta_{asy}$ implica $\theta_s = \theta_{asy} - (\pi - \theta_{asy})$ y finalmente

$$\theta_{asy} = \frac{\theta_s + \pi}{2}. \quad (B.2)$$

Por otro lado, para este sistema el ángulo θ_{asy} está dado por:

$$\theta_{asy} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right), \quad (B.3)$$

donde

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_c |L|^2}{m\alpha^2}}. \quad (B.4)$$

La energía cinética del proyectil en el sistema centro de masa es $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ y $L = mbv$ es el momento angular del sistema. Sustituyendo B.2 en B.3 tenemos que:

$$\frac{\theta_s}{2} = \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) - \frac{\pi}{2}, \quad (B.5)$$

pero

$$\cos\left(\frac{\theta_s}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\theta_s}{2} = -\frac{1}{\epsilon}; \quad (B.6)$$

sustituyendo B.4 en B.6, y sustituyendo L y E_c llegamos a

$$\sin \frac{\theta_s}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mvb}{\alpha}\right)^2}}, \quad (\text{B.7})$$

despejando b obtenemos

$$b = \frac{|\alpha|}{mv^2} \cot \frac{\theta_s}{2}, \quad (\text{B.8})$$

diferenciando esta última expresión con respecto a θ_s :

$$\frac{db}{d\theta_s} = \frac{|\alpha|}{2mv^2} \csc^2 \frac{\theta_s}{2}. \quad (\text{B.9})$$

Entonces

$$db = \frac{|\alpha|}{2mv^2} \csc^2 \frac{\theta_s}{2} d\theta_s; \quad (\text{B.10})$$

sustituyendo en 2.5

$$d\sigma = \pi \left(\frac{|\alpha|}{mv^2}\right)^2 \frac{\cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\theta_s}{2}\right)} d\theta_s. \quad (\text{B.11})$$

El elemento de ángulo sólido $d\Omega$ está dado por:

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta_s d\theta_s. \quad (\text{B.12})$$

sustituyendo $d\theta_s$ en B.11 llegamos a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha|}{mv^2}\right)^2 \frac{\cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\theta_s}{2}\right) \sin \theta_s}. \quad (\text{B.13})$$

Simplificando y sustituyendo α llegamos finalmente a la expresión para la sección diferencial de Rutherford en el sistema centro de masa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_c \sin^2\left(\frac{\theta_c}{2}\right)} \right)^2 \quad (\text{B.14})$$

La relación entre el ángulo de dispersión en el sistema centro de masa y en el sistema de laboratorio está dada por

$$\cot \theta = \cot \theta_c + x \csc \theta_c. \quad (\text{B.15})$$

$$\text{con } x = \frac{m_1}{m_2}.$$

El número de partículas dispersadas en un ángulo sólido $\Omega_c = 2\pi \sin \theta_c d\theta_c$ corresponderá al número de partículas dispersadas en un ángulo sólido $\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$; de 2.12 se tiene que

$$Q N t \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_c d\Omega_c = Q N t \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega, \quad (\text{B.16})$$

donde $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_c$ es la sección de dispersión de Rutherford en el sistema centro de masa y $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)$ es la sección de dispersión de Rutherford en el sistema de laboratorio, de aquí que

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_c \sin \theta_c d\theta_c = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \sin \theta d\theta. \quad (\text{B.17})$$

Por otro lado B.15 se puede escribir como

$$\sin \Delta = x \sin \theta, \quad (\text{B.18})$$

con $\Delta = \theta_c - \theta$. Derivando ambos lados tenemos que

$$\cos \Delta \left(\frac{d\theta_c}{d\theta} - 1 \right) = x \cos \theta, \quad (\text{B.19})$$

de aquí que

$$\frac{d\theta_c}{d\theta} = \frac{\sin \theta \cos \Delta + x \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \Delta} = \frac{\sin \theta_c}{\sin \theta \cos \Delta}. \quad (\text{B.20})$$

Empleando la expresión anterior en B.17 tenemos que

$$\frac{d\sigma/d\Omega}{(d\sigma/d\Omega)_c} = \left(\frac{\sin \theta_c}{\sin \theta} \right)^2 \frac{1}{\cos \Delta}; \quad (\text{B.21})$$

sustituyendo B.14 en la expresión anterior

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E} \right)^2 \left[\frac{(1+x) \sin \theta_c}{2 \sin \theta \sin^2(\theta_c/2)} \right]^2 / \cos \Delta. \quad (\text{B.22})$$

La energía E en el sistema de laboratorio es

$$E = E_c (1 + x). \quad (\text{B.23})$$

Por otro lado, de B.18 se tiene que

$$1 + x = \frac{\sin \Delta + \sin \theta}{\sin \theta}, \quad (\text{B.24})$$

y también

$$\frac{\sin \theta_c}{2 \sin^2(\theta_c/2)} = \frac{2 \sin(\theta_c/2) \cos(\theta_c/2)}{2 \sin^2(\theta_c/2)} = \cot(\theta_c/2). \quad (\text{B.25})$$

Empleando la relación

$$\frac{\sin \theta + \sin \Delta}{\cos \theta + \cos \Delta} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\theta + \Delta) \cos \frac{1}{2}(\theta - \Delta)}{2 \cos \frac{1}{2}(\theta + \Delta) \cos \frac{1}{2}(\theta - \Delta)} = \tan \frac{1}{2}\theta_c \quad (\text{B.26})$$

junto con B.24 y B.25 obtenemos

$$\frac{(1+x)\sin\theta_c}{2\sin\frac{1}{2}\theta_c} = \frac{\cos\theta + \cos\Delta}{\sin\theta}; \quad (\text{B.27})$$

sustituyendo en B.22 llegamos a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E}\right)^2 \frac{(\cos\theta + \cos\Delta)^2}{\sin^4\theta \cos\Delta}. \quad (\text{B.28})$$

Pero $\cos\Delta$ se puede escribir como

$$\cos\Delta = (1 - \sin^2\Delta)^{1/2} = (1 - x^2 \sin^2\theta)^{1/2}, \quad (\text{B.29})$$

lo cual nos lleva a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}\right)^2 \frac{[\cos\theta + (1 - x^2 \sin^2\theta)^{1/2}]^2}{\sin^4\theta (1 - x^2 \sin^2\theta)^{1/2}}, \quad (\text{B.30})$$

que es la expresión para la sección de dispersión de Rutherford en el sistema de laboratorio.

BIBLIOGRAFIA

1. Handbook of modern Ion Beam Analysis, Joseph R. Tesmer y Michael Nastasi (editores), Materials Research Society, 1995.
2. Richard M. Pearl, Rocks and Minerals., Barnes & Noble, 1963.
3. Walter T. Huang, Petrología, UTHEA, 1968.
4. Wei-Kan Chu et. al., Backscattering Spectrometry, Academic Press Inc., 1978.
5. H. Goldstein, Mecánica Clásica, Reverté, 1988.
6. R. DOOLITTLE, Algorithms for the Rapid Simulation of Rutherford Backscattering Spectra., Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, B9(1985)344-351.
7. V.P. Parkhutik, F. Namavar, E. Andrade, Photoluminescence from Thin Porous Films of Silicon Carbide., Thin Solid Films, 279(1997)229-232.