



CN9900385

CNIC-01315  
CAEP-0004

# 中国核科技报告

## CHINA NUCLEAR SCIENCE AND TECHNOLOGY REPORT

二维自适应数值网格的构造方法及其实现

A TWO-DIMENSIONAL ADAPTIVE NUMERICAL GRIDS  
GENERATION METHOD AND ITS REALIZATION

*(In Chinese)*



30 - 12

中国核情报中心  
原子能出版社

China Nuclear Information Centre  
Atomic Energy Press

L



徐 涛：中国工程物理研究院助理研究员，1992年毕业于南开大学数学系，1995年毕业于中国工程物理研究院研究生部，获理学硕士学位。

XU Tao: Assistant researcher of the Institute of the China Academy of Engineering Physics. Graduated from Mathematical Department of Nankai University in 1992. Received the bachelor degree. Graduated from Graduate School of the China Academy of Engineering Physics in 1995, received the master degree.

CNIC-01315

CAEP-0004

# 二维自适应数值网格的构造方法及其实现

徐涛 水鸿寿

(中国工程物理研究院, 成都, 610003)

## 摘 要

讨论了一种二维自适应网格的构造方法, 并具体地给出了它的实施过程。指出当控制函数连续给出时, 方法是有效和便于实现的, 给出了一些区域的网格构造图; 实际计算中自适应网格控制量的数值解一般是离散给出的, 这时为了形成连续的控制函数, 需要对离散分布的量做插值, 才能进行网格构造。文中讨论了这个过程中所遇到的具体问题和解决方法, 并在一种二维插值法的基础上做出了自适应网格。最后利用自适应网格技术对一个二维流体力学问题的实例进行了计算。

# A Two-dimensional Adaptive Numerical Grids Generation Method and Its Realization

*(In Chinese)*

XU Tao SHUI Hongshou

(China Academy of Engineering Physics, Chengdu, 610003)

## ABSTRACT

A two-dimensional adaptive numerical grids generation method and its particular realization is discussed. This method is effective and easy to realize if the control functions are given continuously, and the grids for some regions is showed in this case. For Computational Fluid Dynamics, because the control values of adaptive grids-numerical solution is given in dispersed form, it is needed to interpolate these values to get the continuous control functions. These interpolation techniques are discussed, and some efficient adaptive grids are given. A two-dimensional fluid dynamics example was also given.

# 引言

在二维流体力学问题的实际计算中，首先要对计算区域做离散的网格剖分，才能运用已有的数值方法进行计算。当用欧拉方法进行计算时，可能初始的计算区域是非规则的，如空气动力学中对翼形周围区域的计算，这需要在这种非规则的边界限制下，构造合适的网格，使边界线与网格线吻合，边界条件能被精确利用，内部划分也较均匀合理，从而提高计算的精度。许多实际问题的计算区为多物质混合区，为了精确描述出不同时刻的物质界面，常用拉氏方法进行计算，这时初始好的网格，可使得计算时间足够长，能够达到实际问题需要的时间，而不发生扭曲，自交。而不好的网格，则可能由于在以后时刻的自身运动，在未达到实际需求的时间前就产生畸变，自交，使计算不能进行下去。

有时实际要求的计算时间足够长，即使好的网格，用单纯拉氏方法也不能算到终点。这时多采用拉氏方法加上重分网格的策略，即在初始网格上先用拉氏方法计算若干步，在网格变坏前对不同物质区的网格做重分，重分过程中要保持物质界面不动，然后进行新旧网格间的物理量转换，在新网格上再进行计算，重分，一直算到终点。可见，在计算方法选定后，网格的好坏对于计算的影响有时可以说是决定性的，它不仅影响到计算结果的精度，甚至影响到是否能够得到最终的计算结果。

对于网格构造的研究表明，单纯传统意义下的好网格，如大小均匀，长宽适当，正交等，对某些问题的计算可能并不是最佳的。因为网格构造最终是为数值计算实际问题服务的，因此，网格的好坏应该看它是否与物理问题解的空间分布相适应。例如，在物理量变化剧烈区，要用较密的网格，才能刻画出这种变化，而在物理量变化平缓区，只需用较粗的网格就能近似出解的情况。这种思想被加入到网格构造中，就产生了自适应网格的概念(adaptive grid)，现在，对自适应网格的研究是相当多的<sup>[1,3~6]</sup>。

自适应网格的最大优点就在于它能与物理问题的解相适应，网格的密稀随物理量变化的梯度的大小而自动调节。这样有可能用较小数目的网格刻画出在传统意义下较多网格才能给出的较高精度的数值解。如在对双曲型方程中激波的计算，为了较为精确地给出激波所在的位置，用传统的均匀网格就需要加密网格，而自适应网格则可在网格数目不变的情况下，通过使激波附近的网格密集，其它物理量变化平缓的地方网格稀疏，达到精确刻画激波位置。

## 1 一种二维自适应网格的构造方法

### 1.1 网格构造方程

考虑以文献[1]中所讨论的方程为基础，并参考文献[4]中提出的对正交性控制方法，来构造自适应网格。

文献[1]中所讨论的构造自适应网格的方程为

$$\begin{cases} (K_1 \xi_x)_x + (K_1 \xi_y)_y = P(x, y) \\ (K_2 \eta_x)_x + (K_2 \eta_y)_y = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$  为网格变换关系式,  $K_1, K_2, P, Q$  为控制函数。如图 1, 网格构造就是通过这样一组变换把一个参数平面  $(\xi, \eta)$  上的规则方形区域  $D'$  中的矩形网格变换到实际物理平面  $(x, y)$  上的求解区域  $D$  中的计算网格。

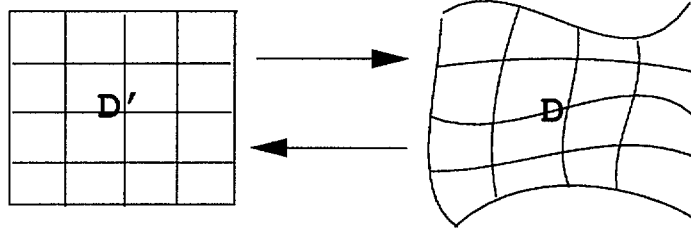


图 1 坐标变换图

$$P = -C_\xi(x, y)K_1 \frac{d\xi}{dl_\xi}, Q = -C_\eta(x, y)K_2 \frac{d\eta}{dl_\eta}$$

其中,  $C_\xi, C_\eta$  分别为  $\xi$  线和  $\eta$  线在  $(x, y)$  处的曲率,  $d\xi/dl_\xi$  为  $\xi$  沿  $\xi$  线的法线方向的导数,  $d\eta/dl_\eta$  为  $\eta$  沿  $\eta$  线的法线方向的导数;  $K_1 = K_1(x, y), K_2 = K_2(x, y)$  分别用来控制  $\xi$  曲线族和  $\eta$  曲线族的疏密。如果假定  $\xi$  线和  $\eta$  线光滑且  $P, Q$  取上面的形式, 则可以证明, 当对  $\xi, \eta$  方向做等距剖分时,  $K_1(x, y)$  的大地方,  $\xi$  线族间距离大, 网格线稀疏,  $K_1(x, y)$  小的地方,  $\xi$  线族间距离小, 网格线密集<sup>[1]</sup>。同样  $K_2(x, y)$  对  $\eta$  线族也有类似控制效果。

由于最终要在  $(\xi, \eta)$  平面上求解方程, 首先通过坐标变换将方程 (1) 化为

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -D_1 x_\xi - D_2 x_\eta \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -D_1 y_\xi - D_2 y_\eta \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$$

$$D_1 = (J^2 P - \alpha K_{1\xi} + \beta K_{1\eta}) / K_1, D_2 = (J^2 Q + \beta K_{2\xi} - \gamma K_{2\eta}) / K_2,$$

$P, Q$  也化为  $(\xi, \eta)$  平面上的微分表达

$$P = K_1 \frac{x_\eta y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta} y_\eta}{J(x_\eta^2 + y_\eta^2)}, Q = K_2 \frac{x_{\xi\xi} y_\xi - x_\xi y_{\xi\xi}}{J(x_\xi^2 + y_\xi^2)}$$

$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$  为变换的 Jacobi 阵的行列式值。

用这组方程构造网格时, 由于对网格的正交性没用加以控制, 得到的有些网格线不够光滑、柔顺, 产生网格线上有尖点及其夹角过小, 影响网格的质量和计算的精度。为了克服这个缺点, 我们利用文献[4]中的思想, 引入控制网格正交性的泛函, 把它对形成网

格的影响加入到上面的网格构造方程(2)中。

控制网格正交性的泛函取为

$$I_0 = \iint_D [(x_\eta, y_\eta)(x_\xi, y_\xi)]^2 d\xi d\eta = \iint_D (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 d\xi d\eta \quad (3)$$

因为 $\xi$ 线,  $\eta$ 线的切向量分别是 $(x_\eta, y_\eta)$ ,  $(x_\xi, y_\xi)$ 其内积的平方是与两向量夹角余弦有关的量, 当两向量夹角越小, 其值越大, 所以可以通过对上述泛函取极小得到正交性好的网格。

由泛函 (3) 极小化导出的欧拉方程为

$$\begin{cases} b_{01}x_{\xi\xi} + b_{02}x_{\xi\eta} + b_{03}x_{\eta\eta} + a_{01}y_{\xi\xi} + a_{02}y_{\xi\eta} + a_{03}y_{\eta\eta} = 0 \\ a_{01}x_{\xi\xi} + a_{02}x_{\xi\eta} + a_{03}x_{\eta\eta} + c_{01}y_{\xi\xi} + c_{02}y_{\xi\eta} + c_{03}y_{\eta\eta} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{01} &= x_\eta y_\eta, b_{01} = x_\eta^2, c_{01} = y_\eta^2 \\ a_{02} &= x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi, b_{02} = 2(2x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta), c_{02} = 2(x_\xi x_\eta + 2y_\xi y_\eta) \\ a_{03} &= x_\xi y_\xi, b_{03} = x_\xi^2, c_{03} = y_\xi^2 \end{aligned} \quad (5)$$

引入控制正交性影响大小的常数 $\lambda$ 。

把 (2)+ $\lambda$  (4) (对应方程相加) 得到本文中用于生成网络的方程:

$$\begin{cases} b_1x_{\xi\xi} + b_2x_{\xi\eta} + b_3x_{\eta\eta} + a_1y_{\xi\xi} + a_2y_{\xi\eta} + a_3y_{\eta\eta} + D_1x_\xi + D_2x_\eta = 0 \\ a_1x_{\xi\xi} + a_2x_{\xi\eta} + a_3x_{\eta\eta} + c_1y_{\xi\xi} + c_2y_{\xi\eta} + c_3y_{\eta\eta} + D_1y_\xi + D_2y_\eta = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中各系数项为

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda a_{01}, b_1 = \lambda b_{01} + \alpha, c_1 = \lambda c_{01} + \alpha \\ a_2 &= \lambda a_{02}, b_2 = \lambda b_{02} - 2\beta, c_2 = \lambda c_{02} - 2\beta \\ a_3 &= \lambda a_{03}, b_3 = \lambda b_{03} + \gamma, c_3 = \lambda c_{03} + \gamma \end{aligned} \quad (7)$$

对(6)式中的各微分项以及对(7)式中的各系数项都采用中心差分离散, 得到一个非线性代数方程组, 记其中的两个方程分别为  $R_x, R_y$ 。采用如下迭代方法进行数值求解, 设

( $l$ ) 为迭代数指标, 则已知当前步的网格坐标值  $x_{i,j}^{(l)}, y_{i,j}^{(l)}$ , ( $l+1$ ) 步的网格坐标值由下式

计算<sup>[14]</sup>

$$\begin{cases} R_x^{(l)} + \frac{\partial R_x^{(l)}}{\partial x_{i,j}}(x_{i,j}^{(l+1)} - x_{i,j}^{(l)}) + \frac{\partial R_x^{(l)}}{\partial y_{i,j}}(y_{i,j}^{(l+1)} - y_{i,j}^{(l)}) = 0 \\ R_y^{(l)} + \frac{\partial R_y^{(l)}}{\partial x_{i,j}}(x_{i,j}^{(l+1)} - x_{i,j}^{(l)}) + \frac{\partial R_y^{(l)}}{\partial y_{i,j}}(y_{i,j}^{(l+1)} - y_{i,j}^{(l)}) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\frac{\partial \mathcal{R}_x^{(l)}}{\partial x_{i,j}} = -2(b_1 + b_3), \frac{\partial \mathcal{R}_x^{(l)}}{\partial y_{i,j}} = -2(a_1 + a_3) = \frac{\partial \mathcal{R}_y^{(l)}}{\partial x_{i,j}}, \frac{\partial \mathcal{R}_y^{(l)}}{\partial y_{i,j}} = -2(c_1 + c_3) \quad (9)$$

迭代收敛的判据为前后两次的网格坐标值之差绝对值的最大值小于事先给定的一个小正数  $qq$ 。

以上是对内部网格点完整的求解过程，这之中需要说明的是对于  $D_1, D_2$  离散时涉及到  $K_1, K_2$  的表达及其偏导数  $K_{1\xi}, K_{1\eta}, K_{2\xi}, K_{2\eta}$  的计算。它们都为  $(x, y)$  的函数，在迭代求解过程中随着  $(x_{i,j}, y_{i,j})$  的变化而改变。要求迭代前应知道  $K_1, K_2$  在整个求解区上连续分布。

$K_1, K_2$  为  $(x, y)$  的函数，而非  $(\xi, \eta)$  的函数，才能使物理区域里网格的疏密与实际需要的位置相一致。

下面讨论边界点的自适应分布。对于边界线上网格点分布，例如  $\eta$  线边界，为了与上面的讨论相一致，采用下方程

$$\frac{d}{ds} \left( K_2 \frac{d\xi}{ds} \right) = 0 \quad (10)$$

其中  $s$  为边界曲线的弧长， $K_2 = K_2(s)$ ，容易看出，它的大小控制着边界上网格点分布的稀密。把它化为对  $\xi$  微商的形式，即

$$K_2 \frac{d^2 s}{d\xi^2} - \frac{dK_2}{d\xi} \frac{ds}{d\xi} = 0 \quad (11)$$

设边界方程为

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \text{ 则 } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

代入上方程中，得到  $t$  对  $\xi$  的微分方程

$$K_2 H(t) \frac{d^2 t}{d\xi^2} + K_2 \frac{dH}{d\xi} \frac{dt}{d\xi} - H(t) \frac{dK_2}{d\xi} \frac{dt}{d\xi} = 0$$

这里， $H(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$ 。

对上式用中心差分离散后迭代求解。注意  $(K_2)_i = (K_2(s(t_i)))$  为弧长的函数，在迭代过程中随  $t_i$  的变化是要变的。

下面是用上述方法构造的一些网格图，其中的控制函数， $K_1, K_2$  事先连续地给出。

## 1.2 一些区域的自适应网格图

先考虑构造网格的物理区域为一个半径为 10 的半圆，它与  $(\xi, \eta)$  平面上的方形区域的边界对应为：上半圆弧对应方形上边界，圆心点对应方形下边界，左半径对应左边界，右半径对应右边界。



我们取  $K_1(x, y) = 1$ , 对  $K_2(x, y)$  先把它自变量化为极坐标  $(r, \theta)$  的形式, 取  $K_2 = K_2(r, \theta) = [1 + AW(r, \theta)]^{-1}$ , 其中  $A$  为常数,  $l$  为与物理区域大小相关的量。而

$$W(r, \theta) = \begin{cases} 1 & r \geq r_1(\theta), r \leq r_2(\theta) \\ [(r - r(\theta)) + 10 * (r_1(\theta) - r)] / (r_1(\theta) - r(\theta)) & r(\theta) < r < r_1(\theta) \\ [10 * (r - r_2(\theta)) + (r(\theta) - r)] / (r(\theta) - r_2(\theta)) & r_2(\theta) < r < r(\theta) \end{cases}$$

其中

$$r(\theta) = 5 - r_0 * \sin(\theta), r_1(\theta) = r(\theta) + 0.35, r_2(\theta) = r(\theta) - 0.35$$

由上面的表达可知,  $W(r, \theta)$  对任意的  $\theta$ ,  $r$  由 0 到  $r_2(\theta)$  取 1, 由  $r_2(\theta)$  到  $r(\theta)$  取线性由 1 增加到 10, 再由  $r(\theta)$  到  $r_1(\theta)$  线性由 10 减小到 1, 最后由  $r_1(\theta)$  到  $r=10$  取 1。

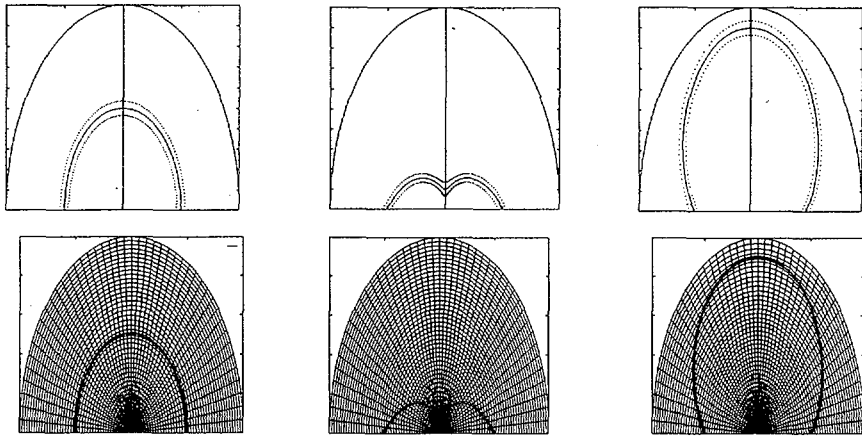


图 2 静态自适应网格图

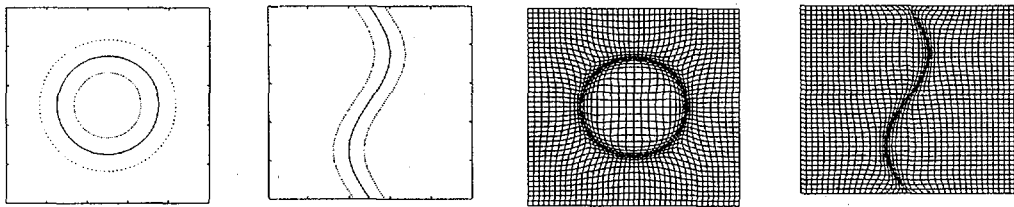


图 3 静态自适应网格图

这样  $K_2$  沿径向( $\theta = \text{常数}$ )是在曲线  $r_2(\theta)$  与  $r_1(\theta)$  之间小于 1, 其它地方为 1 的一种连续分布, 所以按以上的讨论, 在这个区域内的  $\eta$  线族的分布应是密的, 图 2 给出了不同的  $r_0 = 0, 4, -4, r(\theta)$  (中间实线) 和  $r_1(\theta)$  及  $r_2(\theta)$  (两边虚线) 的图像和相应的网格构造图。

在图 3 中也给出了两个自适应网格, 其中第一个图在一个方形区域内部的一个圆环内 (径向宽度为 1.7)  $K_1, K_2$  沿径向都由 1 线性减小到 0.1 再变为 1, 而其余地方取 1; 第二个

图在同样的方形区域内的沿  $y$  方向的两条正弦曲线围成的带状区域中(宽度为 1.7)  $K_1, K_2$  沿  $x$  方向都由 1 线性减小到 0.1 再变为 1, 而其余地方取 1。

## 2 实际流体问题计算中的自适应网格构造

### 2.1 控制函数的给出

从上节的讨论可知, 当  $K_1, K_2$  为预先给出的连续函数时, 本文的方法能给出较为满意的适应性网格。实际计算中, 为了达到网格剖分的稀密与物理现象本身的相适应,  $K_1, K_2$  要根据计算区域内当前物理量的分布来确定, 例如当物理量分布沿某方向梯度大时, 该方向上的网格分布应该密集; 当物理量分布沿某方向梯度小时, 该方向上的网格分布应该稀疏。在对流体问题的计算中, 常取压力  $p$  作为特征物理量, 这时相应的控制函数可取为下面的表达

$$K_1 = 1.0 / (1 + A | p_{\xi} |), K_2 = 1.0 / (1 + A | p_{\eta} |) \quad (12)$$

其中,  $p_{\xi}, p_{\eta}$  分别表示压力  $p$  在  $\xi$  线族和  $\eta$  线族法向方向的梯度,  $A$  为一个正的常数,  $l$  为一个与区域尺寸相关的量。由此根据不同的压力分布, 确定不同的自适应网格。

在数值计算中,  $p$  物理量是离散给出的, 这样由此所确定的自适应函数  $K_1, K_2$  也是在离散点上给出。

如图 4 所示, 设  $p$  定义于网格中心, 则  $K_1, K_2$  分别定义于半点处

$$\begin{aligned} & ((x_{i,j} + x_{i,j+1}) / 2, (y_{i,j} + y_{i,j+1}) / 2), ((x_{i,j} + x_{i+1,j}) / 2, (y_{i,j} + y_{i+1,j}) / 2) \\ (K_1)_{i,j} &= \frac{1}{1 + A | p_{i,j} - p_{i-1,j} | / \text{Max}(\Delta p)} \\ (i = 2, \dots, m-1; j = 1, \dots, n-1) \\ (K_2)_{i,j} &= \frac{1}{1 + A | p_{i,j} - p_{i,j-1} | / \text{Max}(\Delta p)} \\ (i = 1, \dots, m-1; j = 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (13)$$

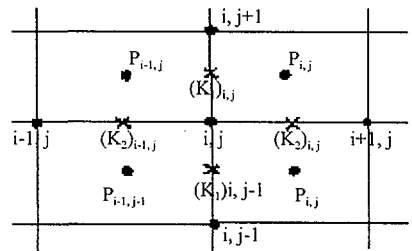


图 4 离散自适应量的给出

其中  $m, n$  分别为  $\xi, \eta$  方向的网格分点数, 把  $K_1, K_2$  的定义扩展到  $\xi$  线和  $\eta$  线的两边界, 令  $(K_1)_{1,j} = (K_1)_{2,j}, (K_1)_{m,j} = (K_1)_{m-1,j}; (K_2)_{i,1} = (K_2)_{i,2}, (K_2)_{i,n} = (K_2)_{i,n-1}; K_1, K_2$  为无量纲常数。

这时给出的自适应函数的分布不是在整个区域上都有值, 而根据 2 中讨论的算法, 需要给出在全区域内部任意一点上  $K_1, K_2$  都有意义的连续分布, 这就需要根据这些离散点上的信息做插值或逼近, 把对  $K_1, K_2$  的定义扩展到整个求解区域中。

### 2.2 插值方法

这里插值或逼近所遇到的困难是, 首先区域不一定是规则的, 因为可能是在非常常的

计算过程中构造网格，区域边界随时会变到不可期待的形状；另外，区域内部的离散点的分布也不是规矩的与  $x$  轴或  $y$  轴平行的网格点，而是比较散乱的。这就造成了传统许多好的二维插值或逼近方法（那些要求区域规则，内部离散点分布规则的）不能被用来解决我们的问题。不过，对于这种非规则区域、非规则离散点分布的插值或逼近，在文献中也有一些讨论<sup>[5,6]</sup>。

限于篇幅，这里只给出本文所采用的一种插值方法，局部 Shepard 插值。

假定在求解区域  $D$  中的离散点  $(x_i, y_i) (i = 1, \dots, N)$  上给出函数值，则由局部 Shepard 插值方法给出的全区域上的函数值为

$$f(x, y) = \begin{cases} (\sum_{i=1}^N f_i / [\psi(r_i)]^\mu) / (\sum_{i=1}^N 1 / [\psi(r_i)]^\mu) & r_i \neq 0 \\ f_i & r_i = 0 \end{cases} \quad (14)$$

其中  $\psi(r)$  的表达如下

$$\psi(r) = \begin{cases} 1/r, & 0 < r \leq R/3 \\ \frac{27}{4R} (\frac{r}{R} - 1)^2, & R/3 < r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (15)$$

$R$  为一个预先给定的正数。局部 Shepard 插值方法相当于以每个待求点为中心划一个半径为  $R$  的圆，只有落在圆中的点，才参与插值，而落在圆外的点，对待求点上的值没有影响。这种局部的方法克服了数值的不稳定性，但由于在做距离的比较时，需计算所有点到给定点的距离，也需要很大的运算量。这在我们这个具体问题中是可以加以改进克服的。注意这种局部插值方法并不能保证整体的连续性。

### 2.3 网格构造图

下面是采用局部 Shepard 方法，根据压力  $p$  分布来构造的网格。这里首先考虑的是一种无过渡区的强间断，对于图 2 和图 3 中以实线为界，取其两侧的压力分别为两个不同的常数 (10 和 1)，根据  $p$  的分布，由公式(13)先给出各离散点上  $K_1, K_2$  的值，插值后得到其在全区域上的连续分布，最后得出的网格图，见图 5。

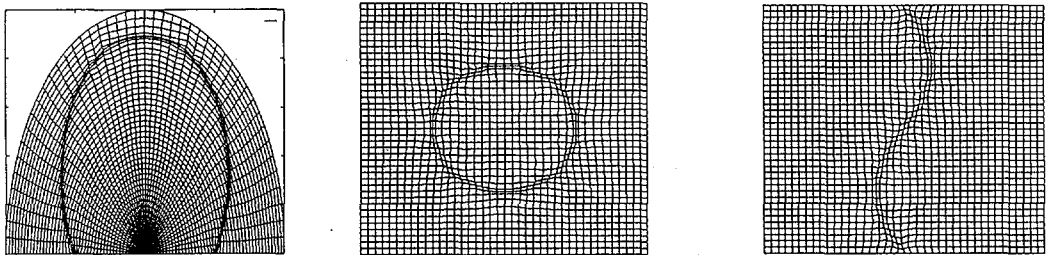


图 5 控制量为强间断时的自适应网格 ( $\lambda=0.1, A1=80$ )

从图中可见，这时网格的自适应性大体给出，但不够好，这主要是由于压力无过渡区

的原因。图 7 分别给出过渡区为  $2 * 0.3$ (第一图,  $\lambda=0.3, Al=5$ ) 和  $2 * 0.35$  (第二图,  $\lambda=0.1, Al=10$ ) 时的网格图, 其中过渡区中的压力分布如图 6 所示, 过渡区左右压力取为常数(10 和 1)。

从图可见, 这时给出了与物理量的分布相一致的网格。

另外我们还对比了加入正交控制( $\lambda \neq 0$ )和不加入正交控制( $\lambda = 0$ )的网格, 知在这种离散的情形下, 加入正交控制的网格线较为光滑柔顺, 并且其迭代收敛速度快于后者。

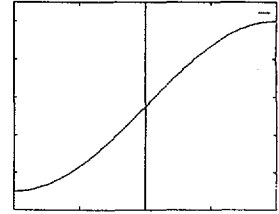


图 6 压力过渡区

### 3 二维流体力学计算实例

#### 3.1 两个例子

我们对一个二维流体力学问题运用上述自适应网格技术进行了数值计算。

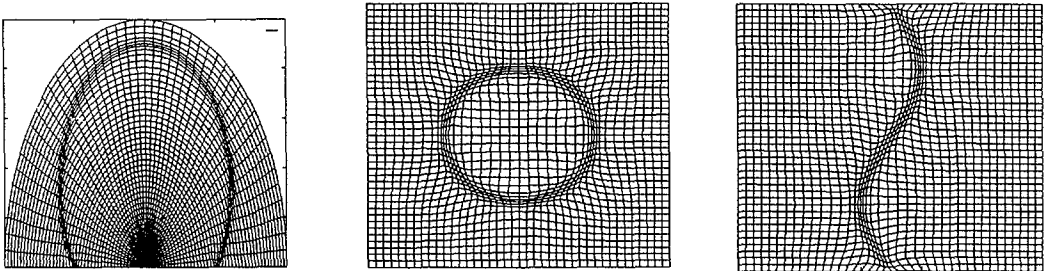


图 7 控制量含过渡区的自适应网格

计算区域为一个半圆型区域, 该区域中有一种均匀可压流体介质, 其初始密度  $\rho_0$ , 速度  $u_0, v_0$  和内能  $e_0$  已知。现在, 在上半圆上加上一个外力  $p \gg p_0$  (内部压力), 在下面直径上给出固壁边界条件, 求物质的运动和其内部物理量的变化过程。

这里描述物质运动的方程为二维无粘流体力学方程组。取物质的状态方程为简单的  $p = (\gamma - 1)\rho e$ , ( $\gamma = 3$ ), 初始条件为  $\rho_0 = 0.05, u_0 = v_0 = 0, e_0 = 1$ , 这时  $p_0 = 0.1$ 。

我们采用体平均多流管方法<sup>[9]</sup>对下面两组压力进行了计算, 即  $p = 20.0$  和  $p = 10 + 15 * (1 - |\sin(\pi/2 + \theta)|)$ , 其中  $\theta$  为边界点与圆心的连线和右半径的夹角。

计算的大致过程为, 由  $n$  时刻开始, 先用一个拉氏步计算给出  $n+1$  时刻区域内部的压力  $p$  的分布, 根据这个压力分布确定  $n+1$  时刻的网格分布, 有了  $n$  时刻和  $n+1$  时刻的网格之后由  $n$  时刻网格中的物理量用体平均格式计算确定  $n+1$  时刻时新网格中的物理量分布, 如此循环, 直到算到给定的时刻。

限于篇幅, 我们只在图 8 中给出了对第一组压力的计算结果。其中左边给出的是不同时间步时的压力  $p$  的分布曲面, 右边给出相应时刻的网格分布图。可见这时构造的网格在压力梯度大的地方(激波波阵面上)密集, 只从网格图上就可以看出激波所在的位置。这时激波过渡区较窄, 做到了网格分布与物理解相适应的目的。

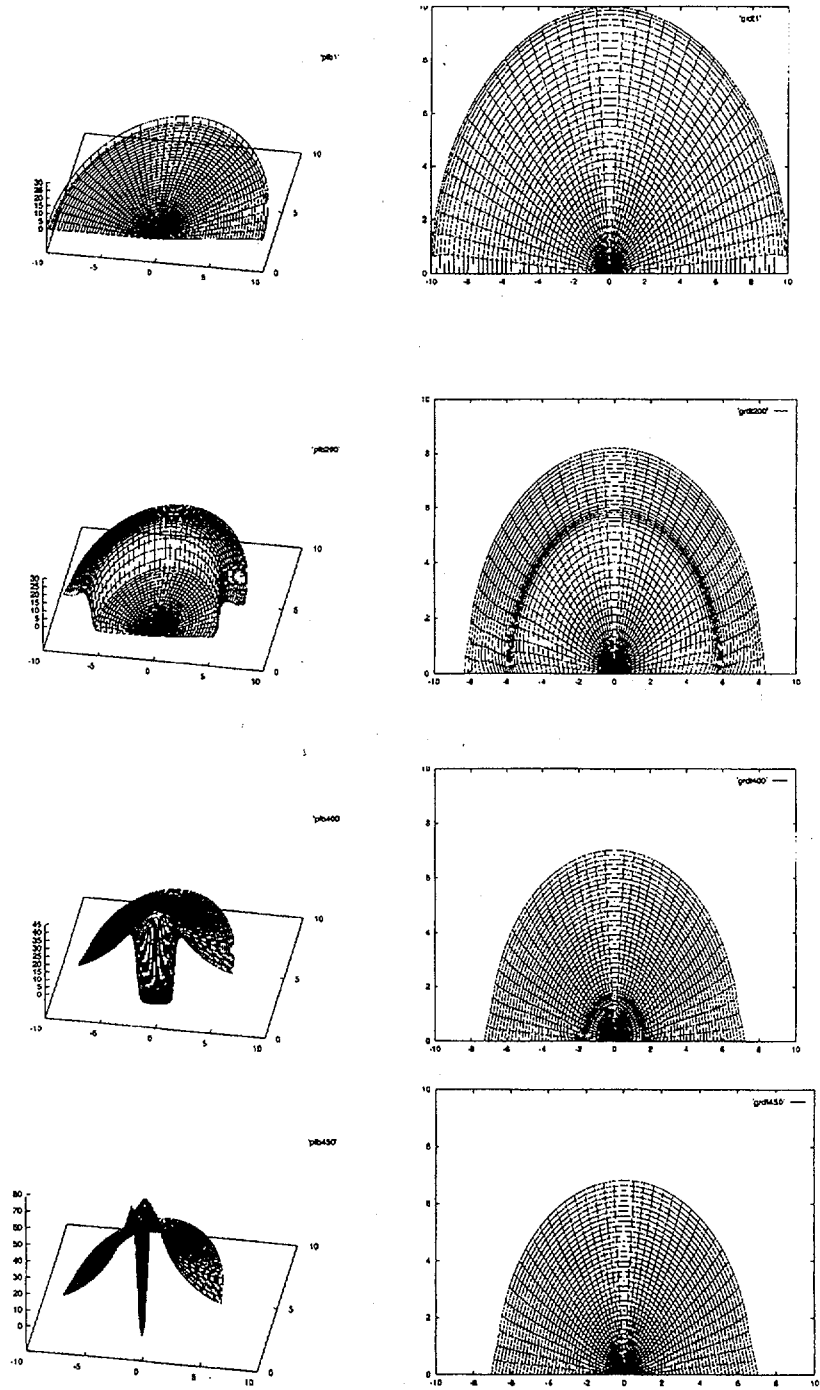


图 8 与压力分布相适应的数值网格

## 4 结论

本文讨论了一种二维网格的构造方法及其在实际计算中的实现。指出,二维插值方法在实际网格构造问题中是一个不可避免的问题。对于自适应网格构造在理论上已有许多漂亮的结果<sup>[4~6]</sup>。但讨论的都是控制函数连续情况下的结果,还不能完全照搬到实际计算中。另外,由于网格分布只是一种定性的概念,所以对控制函数的插值或逼近只要给出大体上与物理量分布相一致的轮廓即可,不一定要如何的精确。但是在真正的流体力学计算中,当网格变化后,其中的物理量也要做相应的输运,这时,要求用高精度的插值方法,才能保持原来的物理信息,而不至于由于网格重构,过分损失了物理量的计算精度。

## 参考文献

- 1 阳述林. 二维自适应计算网格构造, [硕士论文], 北京: 中国工程物理研究院研究生部, 1987年
- 2 水鸿寿. 数值网格构造方法, 理论和应用, 1989, 第四届全国流体力学数值方法讨论会论文集
- 3 徐涛. 二维自适应数值网格的构造, [硕士论文], 北京: 中国工程物理研究院研究生部, 1995年
- 4 Brackbill J U, Saltzman J S. Adaptive zoning for singular problem in two dimensions, *J. Comput. Phys.*, 46(1982), 342~368
- 5 Иваненко, С А. Адаптивные криволинейные сетки в методе конечных элементов, *Ж. вычисл. матем. физ.*, 1995, Т. 35, №9, 1335~1368
- 6 Иваненко, С А. Применение адаптивно-гарманнических сеток для численного решения задач С пограничными и внутреннему слою, *Ж. вычисл. матем. физ.*, 1995, Т. 35, №10, 1495~1517
- 7 Schumaker L L. Fitting surfaces to scattered data. in *Approximation theory I*. Eds. Lorentz G. G., Chui C. k. and Schumaker L. L. , Academic Press, 1976
- 8 周蕴时, 苏志勋, 奚涌江, 程少春. CAGD中的曲线与曲面, 长春: 吉林大学出版社, 1993
- 9 李德元等. 二维非定常流体力学数值方法, 北京, 科学出版社, 1987

图书在版编目 (CIP) 数据

中国核科技报告 CNIC-01315 CAEP-0004: 二维自适应数值网格的构造方法及其实现/徐涛等著. —北京: 原子能出版社, 1998. 12

ISBN 7-5022-1945-5

I. 中... II. 徐... III. 核技术-研究报告-中国 IV. TL-

2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第36632号

二维自适应数值网格的构造方法及其实现

徐涛等著

©原子能出版社, 1998

原子能出版社出版发行

责任编辑: 李曼莉

社址: 北京市海淀区阜成路 43 号 邮政编码: 100037

中国核科技报告编辑部排版

核科学技术情报研究所印刷

开本 787×1029 1/16 · 印张3/4 · 字数18千字

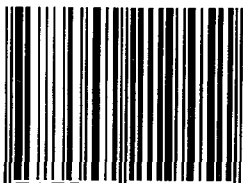
1998年12月北京第一版 · 1998年12月北京第一次印刷

定价: 5.00 元

# CHINA NUCLEAR SCIENCE & TECHNOLOGY REPORT

This report is subject to copyright. All rights are reserved. Submission of a report for publication implies the transfer of the exclusive publication right from the author(s) to the publisher. No part of this publication, except abstract, may be reproduced, stored in data banks or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher, China Nuclear Information Centre, and/or Atomic Energy Press. Violations fall under the prosecution act of the Copyright Law of China. The China Nuclear Information Centre and Atomic Energy Press do not accept any responsibility for loss or damage arising from the use of information contained in any of its reports or in any communication about its test or investigations.

ISBN 7-5022-1945-5



9 787502 219451 >