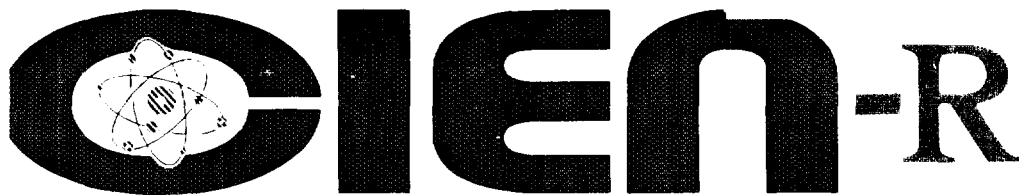


3-98



CU9900037



FRECUENCIA NATURAL TEORICA DEL ACELEROMETRO CTN-10-3/92

THEORETICAL NATURAL FREQUENCY OF THE CTN-10-3/92
ACCELEROMETER

Armas Cardona, R.

Instituto Superior de Ciencias y Tecnologias Nucleares

Calderon Pinar, F.

Instituto de Materiales y Reactivos para la Electronica

La Habana, Cuba
1998

30 - 22

1

DISCLAIMER

Portions of this document may be illegible in electronic image products. Images are produced from the best available original document.

FRECUENCIA NATURAL TEÓRICA DEL ACELERÓMETRO CTN-10-3 /92

THEORETICAL NATURAL FREQUENCY OF THE CTN-10-3 /92 ACCELEROMETER

AUTORES

Ing. Raúl Armas Cardona *

Lic. Francisco Calderón Pinar **

* Profesor Auxiliar, Departamento de Ingeniería Nuclear, Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares, Ave. Salvador Allende esq. a Luaces, (Quinta de los Molinos), Plaza, Ciudad de La Habana, Cuba. E-mail. rarmas@isctn.edu.cu

** Profesor Titular, Departamento de Cerámicas, Instituto de Materiales y Reactivos para la Electrónica, Zapata y G, Vedado, Plaza, Ciudad de La Habana, Cuba

Categoría de Materiales: E 40,00

Palabras claves: Accelerometers; calculations methods; design; elasticity evaluation; mechanical vibrations.

FRECUENCIA NATURAL TEÓRICA DEL ACCELERÓMETRO CTN-10-3 /92

Ing. Raúl Armas Cardona *
Lic. Francisco Calderón Pinar **

- * Profesor Auxiliar, Departamento de Ingeniería Nuclear, Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares.
- ** Profesor Titular, Departamento de Cerámicas, Instituto de Materiales y Reactivos para la Electrónica.

RESUMEN

El acelerómetro de compresión modelo CTN-10-3/92 del ISCTN fue diseñado en el año 1992 y construido en el 1994. Sus características electromecánicas fueron determinadas experimentalmente y presentadas en eventos y publicaciones de los años 1995-1996. La respuesta del acelerómetro ha sido comparada con modelos industriales de la firma danesa B & K con resultados de validación satisfactorios y utilizado en múltiples trabajos prácticos ejecutados por el Grupo de Diagnóstico por Vibraciones Mecánicas (GDVM) del ISCTN.

El cálculo de la frecuencia natural del acelerómetro CTN-10-3/92 se ejecuta, esencialmente, para satisfacer requerimientos de los usuarios, consistente en precisar la zona de trabajo en la característica de frecuencias del sensor. Esta modelación teórica es una herramienta de trabajo útil para rectificar y mejorar el diseño. El trabajo consta del desarrollo del sistema elástico general del sensor y la determinación de su frecuencia de resonancia.

THEORETICAL NATURAL FREQUENCY OF THE CTN-10-3 /92 ACCELEROMETER

SUMMARY

The compression CTN-10-3/92 accelerometer model from ISCTN was design in 1992 and constructed in 1994. Its electromechanical characteristics was defined experimentally and reported in 1995-96 publications. The accelerometer answer has been compare with industrial models of the B & K Danish firm, with succesfull results, and has been used in measuring practices, also with succesfull results on validation, by the GDVM working group of the ISCTN.

The natural frequency of the CTN-10-3/92 accelerometer model calculations are essentially executed for users requirements satisfaction, consistent in specifying the working zone in the transducer frequencies characteristic. This theoretical model is a useful working tool to rectify and improve the design. The work involve a discussion of the transducer general elastic system and the determination of it resonance frequency.

Key words: Accelerometers, calculations methods; design, elasticity evaluation, mechanical vibrations

Introducción

Las máquinas rotatorias existen en prácticamente todas las empresas industriales. Hay empresas o fábricas que se caracterizan porque una notable proporción de sus máquinas rotatorias tienen un costo relativamente bajo. Sin embargo, en la industria energética, incluyendo las Centrales Elnucleares, predominan las máquinas de elevado costo, cuyos fallos pueden motivar altos riesgos de contaminación de diferente naturaleza, por lo que resulta necesario monitorear su estado técnico vibracional ya sea periódica, como permanentemente, según aconsejen los análisis del costo, el riesgo y el resultado de la producción final.

El instrumento más conveniente para medir la vibración en las maquinas rotatorias y despues procesar su valor es aquel que convierte la energia del movimiento en electricidad. No todos los elementos sensibles son convenientes para la medición de vibraciones. Esto se debe a problemas como: no linealidad, muy pequeña respuesta a la excitación mecánica y otros. Existen categorías de elementos sensibles pasivos y de generación propia. En la segunda, los más utilizados son los

de principio piezoeléctrico, electrodinámico y electromagnético, y entre ellos el piezoeléctrico por las múltiples cualidades positivas del instrumento [1-3].

El acelerómetro piezoeléctrico es un sensor sísmico inercial que posee elementos ferroeléctricos para la producción de cargas electrostáticas, las que a su vez responden al movimiento relativo entre la masa y la base del instrumento. Una de las características principales de este tipo de sensor son las curvas de nivel de salida vs frecuencias, obtenidas cuando están sometidos a aceleración constante [3]. Estas gráficas muestran el valor de frecuencia natural para el primer modo de vibración, correspondiente a su región de diseño.

Descripción del sistema elástico.

El cálculo y evaluación del sistema elástico montado en el instrumento es uno de los procesos que forman parte del diseño de acelerómetros. El tipo de sensor se define a partir de la región básica de diseño dividida por la frecuencia natural, ya sea: antes, en el entorno o posterior a dicha frecuencia. Es por esto, que los cálculos destinados a evaluar la frecuencia natural del sistema elástico concebido son de suma importancia, y además, porque también interviene en la definición de la zona útil de trabajo del instrumento, que deberá corresponderse con las frecuencias de diagnóstico de la maquinaria. De igual manera el estudio del sistema elástico montado permite precisar el intervalo de trabajo del instrumento evitando las distorsiones de amplitud y fase en la transformación del movimiento mecánico en electricidad.

El sistema elástico del acelerómetro CTN-10-3/92 aparece descrito en [4] a través de las características constructivas del instrumento, por lo que en lo adelante el trabajo se referirá a la evaluación de la frecuencia natural del sistema, principalmente.

El componente del sistema que permite el mayor movimiento oscilatorio es el elemento de carga en su desplazamiento transversal. Los restantes elementos están sometidos a tracción-compresión y sus desplazamientos son comparablemente despreciables. El elemento de carga (ver Fig.1) se encuentra solicitado mediante una fuerza distribuida superficial en la región central y se apoya en sus extremos, como se muestra en la Fig.2. La rigidez del elemento de carga es elevada en comparación con otros tipos de muelles.

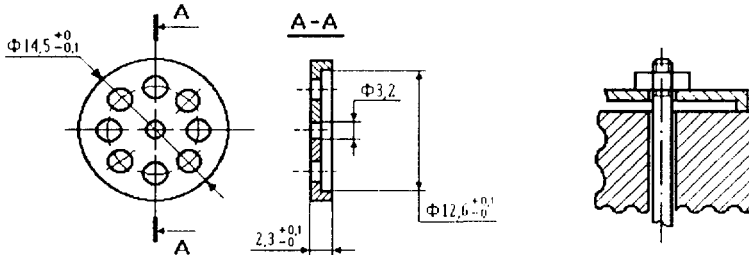


Fig.1 Dimensiones y forma del muelle de precarga.

Fig.2 Detalles de la sollicitación real.

Debido a que la altura del apoyo es menor que 10 veces su diámetro, es posible asumir que su superficie elástica está definida solo por las condiciones de una placa circular. Es decir la flexión del apoyo en forma de anillo es despreciable en comparación con la flexión transversal en la región

de placa. Esto permite tomar en cuenta que el apoyo anular realiza función de empotramiento en el perímetro de la superficie interior (Φ 12,6) del muelle de precarga. La densidad de carga superficial queda definida por el área de contacto entre la tuerca (M3 x 0,5) y el elemento de carga. El área de apoyo de la tuerca está limitada por los diámetros $d_1 = 3,1$ mm, diámetro central y $d_2 = 5,3$ mm correspondiente a la circunferencia tangente a las caras del hexágono.

De esta manera el caso particular del elemento de carga del sensor se encuentra solicitado como se muestra en la Fig. 3. El cálculo analítico del desplazamiento transversal de la placa con la sollicitación mostrada y la discontinuidad central es una tarea sumamente engorrosa [5]. Feodosiev, V.I. [6], presenta una metodología de cálculo de placas a partir de la teoría aplicada de la elasticidad para sollicitaciones simples. Tomando en cuenta la sollicitación particular de la Fig. 3 es posible evaluar el coeficiente de rigidez k de la placa circular dividiendo la región en dos tramos interdependientes con frontera para la dimensión intermedia

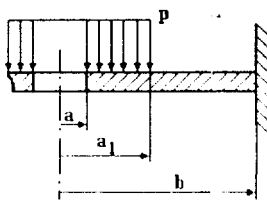


Fig. 3 Sollicitación particular del elemento de carga

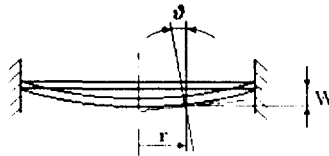


Fig. 4 Representación de la flecha del elemento de carga

Cálculo de la frecuencia de resonancia del sensor.

De hecho la flecha W (ver Fig 4) del elemento de carga del sensor es considerablemente menor que su espesor. Además como las tensiones normales en las secciones paralelas a la superficie neutra son despreciablemente pequeñas en comparación con las originadas por la flexión, el ángulo de giro ϕ y la flecha W son funciones del radio r solamente y están relacionados entre si por la expresión,

$$\phi = \frac{dW}{dr} \quad (1)$$

Las condiciones de equilibrio de un elemento diferencial de volumen del muelle de carga, representado como un prisma separado se muestra en la Fig. 5. Las tensiones tangenciales originan las fuerzas resultantes cortantes (5 y 6) dirigidas según el eje z . Las tensiones en las capas horizontales superiores e inferiores son iguales y de signos contrarios, por lo que son nulas las fuerzas normales sobre las caras paralelas del elemento y no aparecen representadas. Las tensiones normales en las caras paralelas al eje z se reducen a momentos resultantes. La magnitud de estos momentos están referidas a la unidad de longitud de la sección y se designan por M_t y M_r , Q es la fuerza cortante por unidad de longitud. En el elemento se incluye la fuerza exterior $p \cdot r \cdot d\phi \cdot dr$, siendo p la presión

Tomando en cuenta la condición de equilibrio al proyectar todas las fuerzas que actúan sobre el elemento respecto al eje de simetría, se obtiene,

$$p \cdot r = \frac{d}{dr}(Q \cdot r) \quad (2)$$

y la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto al eje y, tangente al plano medio,

$$M_I - \frac{d}{dr}(M_r \cdot r) = Q \cdot r \quad (3)$$

donde:

$$M_I = D \left(\frac{\theta}{r} + \mu \frac{d\theta}{dr} \right) ; M_r = D \left(\frac{d\theta}{dr} + \mu \frac{\theta}{r} \right) ; D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad (4)$$

obtenidas a partir de la ley de Hooke e integrando las tensiones normales σ_r y σ_t para todo el espesor h del elemento de carga. D es la rigidez de la placa circular, siendo E , el módulo de Young y μ el coeficiente de Poisson del material.

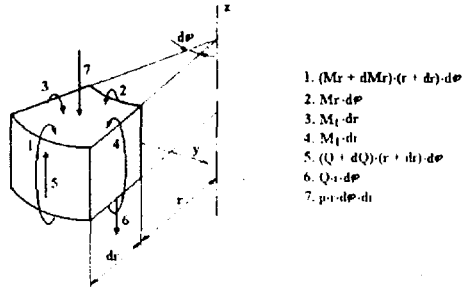


Fig. 5 Condiciones de equilibrio del elemento de volumen separado.

Sustituyendo las Ecs (4) en (3), bajo la certeza que la rigidez D es constante, e integrando dos veces queda,

$$\theta = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{D \cdot r} \int [r] Q dr \quad (5)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias de integración que se precisaran de las condiciones de frontera. La solución del problema para el elemento de carga del sensor es posible solo dividiendo la placa en dos tramos.

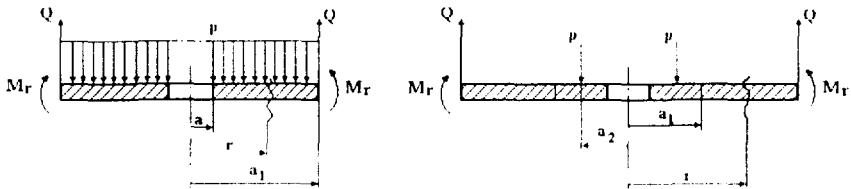


Fig. 6 Equilibrio de la fuerza cortante en el primer (izq.) y segundo (der.) tramos.

Solución para el primer tramo:

Definido para $a \leq r \leq a_1$ (ver Fig. 6 izq.), donde actúa p de tal manera que, independientemente del tipo de apoyo en el contorno exterior la Ec (2) de equilibrio, resuelve la fuerza cortante Q . En este caso:

$$Q = \frac{1}{2 \cdot r} \cdot p \cdot (r^2 - a^2) \quad (6)$$

Sustituyendo la Ec. (6) en la (5) e integrando por partes, se obtiene,

$$\vartheta = C_3 \cdot r + \frac{C_2}{r} - \frac{p}{16 \cdot D} r^3 + \frac{p \cdot a^2}{4 \cdot D} r \cdot \ln \frac{r}{a} \quad (7)$$

con la condición de frontera obtenida de la Ec. (4),

$$M_{r1} \Big|_{r=a} = D \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (8)$$

Solución para el segundo tramo

Definido para $a_1 \leq r \leq b$. Aquí actúa $P = p \cdot \pi(a_1^2 - a^2)$, como se muestra en Fig.6 (der), aplicada en la distancia radial a_1 y equivalente a la fuerza distribuida p . En este caso,

$$Q = \frac{1}{2r} \cdot p \cdot (a_1^2 - a^2) \quad (9)$$

Sustituyendo la Ec. (9) en (5) e integrando por partes, se obtiene,

$$\vartheta_2 = C_3 \cdot r + \frac{C_4}{r} - \frac{p \cdot (a_1^2 - a^2)}{4D} r \cdot \ln \frac{r}{a_1} \quad (10)$$

para las condiciones de frontera siguientes

$$\vartheta_1 \Big|_{r=a_1} = \vartheta_2 \Big|_{r=a_1} \quad (11); \quad M_{r1} \Big|_{r=a_1} = M_{r2} \Big|_{r=a_1} \quad (12); \quad \vartheta_2 \Big|_{r=b} = 0 \quad (13)$$

La condición de contorno dada por la Ec. (13) se infiere de la magnitud que toma el ángulo de giro en casos de empotramiento (ver Figs. 3 y 4). Aplicando las condiciones de contorno, expresadas por las Ecs. (8), (11), (12) y (13), a las Ecs. (7) y (10), se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} (1+\mu) C_3 - \frac{1}{a^2} C_2 - \frac{p \cdot a^2}{16 \cdot D} &= C_3 + \frac{1}{b^2} C_4 - \frac{p \cdot (a_1^2 - a^2)}{4 \cdot D} \ln \frac{b}{a} \\ (1-\mu) C_3 - \frac{1}{a^2} C_2 - \frac{p \cdot a^2}{16 \cdot D} &= C_3 + \frac{1}{b^2} C_4 - \frac{p \cdot (a_1^2 - a^2)}{4 \cdot D} \ln \frac{b}{a} \\ a_1^2 \cdot C_3 + C_2 - a_1^2 \cdot C_4 - C_4 &= \frac{p \cdot a_1^2}{16 \cdot D} (a_1^2 - 4 \cdot a^2 \cdot \ln \frac{a_1}{a}) \\ a_1^2 \cdot C_3 - C_2 - a_1^2 \cdot C_4 + C_4 &= \frac{p \cdot a_1^2}{16 \cdot D} [3a_1^2 - 4 \cdot a^2 \cdot (\ln \frac{a_1}{a} + 1)] \end{aligned} \quad (14)$$

Con combinaciones adecuadas puede ser resuelto el sistema de ecuaciones mostrado, de tal manera que

$$C_1 = \frac{p \cdot \beta}{16 \cdot D}; \quad C_2 = \frac{p \cdot \gamma}{16 \cdot D}; \quad C_3 = \frac{p \cdot \alpha}{16 \cdot D}; \quad C_4 = \frac{p \cdot \Omega}{16 \cdot D} \quad (15)$$

donde;

$$\alpha = \frac{4f(a_1^2 - a^2) \cdot b^2 \cdot \ln \frac{b}{a_1} - a_1^2 \cdot a^2 \cdot \mu \cdot \frac{1}{(1-\mu)} \left[1 - a^4 / 1 - 2 \frac{(1+\mu)}{(1-\mu)} (1 + 2 \cdot \ln \frac{a_1}{a}) \right] - a_1^4}{b^2 + a^2 \cdot \frac{(1+\mu)}{(1-\mu)}}$$

$$\beta = \alpha + 2f a_1^2 \cdot a^2 (2 \cdot \ln \frac{a_1}{a} + 1) f ; \quad \gamma = a^4 + a^2 \cdot \beta \cdot \frac{(1+\mu)}{(1-\mu)} ; \quad \Omega = b^2 / 4 \cdot (a_1^2 - a^2) \ln \frac{b}{a} - \alpha f \quad (16)$$

La verificación de las constantes dadas por las Ecs. (15) y (16) fue ejecutada numéricamente en computadora a través del sistema de ecuaciones (14). La flecha del elemento de carga se calcula a partir de la Ec. (1) al integrar de la forma,

$$\int dW = -\int \vartheta \cdot dr \quad (17)$$

Sustituyendo ϑ_1 y ϑ_2 de las Ecs. (7) y (11) en la Ec. (17) e integrando indefinidamente ambos casos, resulta,

$$W_1(r) = W^I(r) + C_5 \quad \text{para } a \leq r \leq a_1 \\ W_2(r) = W^{II}(r) + C_6 \quad \text{para } a_1 \leq r \leq b$$

Las constantes C_5 y C_6 se calculan de las condiciones de frontera,

$$W_2(r) \Big|_{r=b} = 0 \quad \text{y} \quad W_1(r) \Big|_{r=a_1} = W_2(r) \Big|_{r=a_1},$$

finalmente,

$$W_2(r) = \frac{1}{2} C_3 (b^2 - r^2) + C_4 \ln \frac{b}{r} + \frac{p \cdot (a_1^2 - a^2)}{8 \cdot D} (r^2 \ln \frac{r}{a_1} - b^2 \ln \frac{b}{a_1}) + \frac{p \cdot (a_1^2 - a^2)}{16 \cdot D} (b^2 - r^2); \quad \text{para } a_1 \leq r \leq b \quad (18)$$

$$W_1(r) = \frac{1}{2} (a_1^2 - r^2) (C_1 + C_2 \ln \frac{a_1}{r} + (\ln \frac{a_1}{a} - \frac{1}{2}) \frac{p \cdot a^2 \cdot a_1^2}{8 \cdot D}) + \frac{(b^2 - a_1^2)}{2} (C_3 + C_4 \ln \frac{b}{a_1}) + (b^2 - a_1^2 - 2b^2 \ln \frac{b}{a_1}) \frac{p(a_1^2 - a^2)}{16 \cdot D} + \frac{1}{4} (r^4 - a_1^4) \frac{p}{16 \cdot D} (\ln \frac{r}{a} - \frac{1}{2}) \frac{p a^2 r^2}{8 \cdot D}; \quad \text{para } a \leq r \leq a_1 \quad (19)$$

La flecha del elemento de carga para la sollicitación presentada en la Fig 2 es evaluada como el desplazamiento transversal W_1 para $r = a$. Tomando en cuenta las constantes C_1 , C_2 , C_3 y C_4 de las Ecs. (15) y (16) y evaluando $r = a$ en la Ec. (19), entonces,

$$W_1 \Big|_{r=a} = \frac{p}{16 \cdot D} \left\{ (a_1^2 - a^2) \left[\frac{\beta}{2} + b^2 \left(1 - 2 \ln \frac{b}{a_1} \right) \right] + (\gamma + 2a^2 a_1^2) \ln \frac{a_1}{a} \right\} + \frac{p}{16 \cdot D} \left\{ \frac{\alpha}{2} (b^2 - a_1^2) + \Omega \ln \frac{b}{a_1} - \frac{5}{4} (a_1^4 - a^4) \right\} \quad (20)$$

El coeficiente de rigidez k para el primer modo de vibración del elemento de carga podrá calcularse como:

$$k = \frac{16 \cdot \pi \cdot D \cdot (a_1^2 - a^2)}{(a_1^2 - a^2) \left[\frac{\beta}{2} + b^2 (1 - 2 \ln \frac{b}{a_1}) \right] + (\gamma + 2a^2 a_1^2) \ln \frac{a_1}{a} + \frac{\alpha}{2} (b^2 - a_1^2) + \Omega \ln \frac{b}{a_1} - \frac{5}{4} (a_1^4 - a^4)} \quad (21)$$

Conocido, entonces, el coeficiente de rigidez para el sistema elástico del sensor, es posible calcular su frecuencia natural instalada en el único modo de vibración de interés, tomando la raíz del cociente del coeficiente de rigidez dividido por la masa correspondiente

En las Fig. 7 y 8 se muestra el ploteo de la frecuencia natural vs la masa instalada para diferentes valores de los parámetros b y h . La masa ha sido variada desde 2 hasta 13 gramos, aproximadamente, pues responde a la capacidad de volumen del sensor especificado, así como también para la dimensión b en lo que respecta al diámetro del cilindro. Como se observa la frecuencia natural es capaz de cambiar, según diseño, desde 7 hasta 23 kHz, aproximadamente, según los parámetros geométricos de la Fig. 7 y desde 3 hasta 45 kHz, según los parámetros geométricos de la Fig. 8. Combinaciones de ellos es posible desarrollar

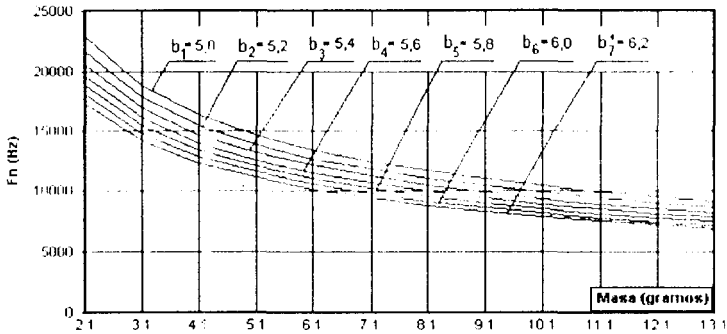


Fig. 7 F_n del sensor en función de la masa y el radio b , para $h=1,05$ mm

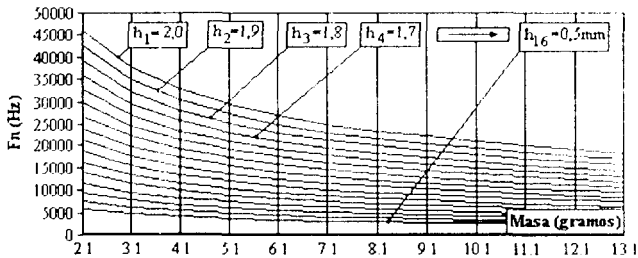


Fig.8 F_n del sensor en función de la masa y el espesor h , para $b=6,13$ mm

En la Fig.9 se presenta el carácter de la distribución de la flecha en función del radio, evaluado desde $r = a$ hasta $r = b$. Para mejor comprensión de la forma de $W_{1,2}$ se ha incorporado la función lineal F.L., que une los extremos de la curva de interés Panovko, Ya. [7] presenta dos funciones empíricas W_{E1} y W_{E2} para evaluar la flecha en placas:

$$W_{E1} = (r-r_1)^{1,35}$$

$$W_{E2} = (r-r_1)^2 [1-0,463(r+r_1)],$$

con error del 7,6 % al calcular la frecuencia natural en comparación con la solución analítica para el caso de W_{E1} y del 6 % para el caso de W_{E2} . Estas no consideran el tipo, posición y valor de la fuerza aplicada y se aproxima a empotramiento. Para comparación de todas las funciones las ordenadas se presentan de forma adimensional ($W(r)/W_{max}$). En la Fig.10 se muestra la principal deficiencia de la función $W_{1,2}$ obtenida, la que está relacionada con la imprecisa aproximación en la región del empotramiento ($r \rightarrow b$).

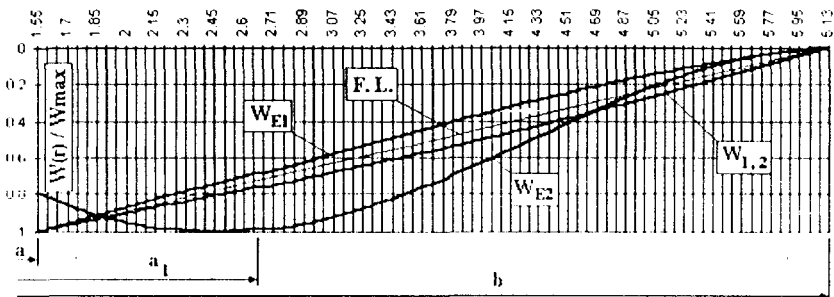


Fig. 9 Carácter de la distribución de la flecha (adimensional) en el elemento de carga

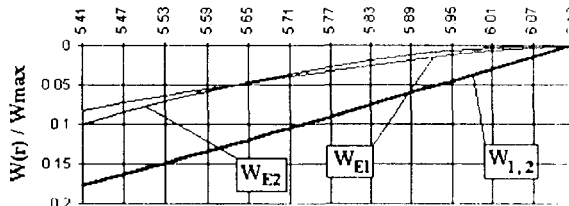


Fig.10 Sector ampliado de las funciones en la región del empotramiento

Conclusiones.

La utilización del método planteado en [6] para evaluar la flecha en placas, más la solución buscada para la sollicitación particular del elemento de carga simplifica los cálculos a ejecutar en comparación con las soluciones analíticas exactas, siendo los resultados satisfactorios, sin tener

que optar por la selección de funciones empíricas que representan solo la forma de variación. La expresión para evaluar la frecuencia natural del elemento de carga, aunque es relativamente extensa, hoy en día, con las facilidades de los software de procesamiento de datos la tarea de cálculo se traduce a una labor elemental. Puede considerarse que la función final propuesta es analítica aproximada.

Aunque el carácter de la distribución radial de la flecha tiene un valor relativo para el cálculo de la frecuencia natural, es de interés introducir las correcciones pertinentes.

Si se toman en cuenta las discontinuidades mostradas en el elemento de carga (con excepción de la central) de la Fig.1, la modelación aquí presentada requiere de mayor análisis para considerar elementos más complejos. El paso a la solución por elementos finitos de semejantes geometrías podrá ser una opción aceptable.

Referencias

1. BOLAÑOS, F.: Transductores para la medida de vibraciones en maquinaria. *Mantenimiento*, No 47, Abril 1991, p.17 (España)
2. ARGULLO, J. y Otros: Criterios de selección de sensores de vibración. *Automatica e Instrumentación*, Octubre 1986, (España)
3. SERRIDGE, M. y T.R. LICHT: *Piezoelectric accelerometer and vibration preamplifier handbook*. K. Larsen & Son, Denmark, 1987
4. ARMAS CARDONA, R., R. GARCIA y F. CALDERON: Características constructivas y pruebas de calibración del acelerómetro modelo CTN-10-3/92. *Nucleus*, No 21, 1996, p.26
5. TIJONOV, A.N. y A.A. SAMARSKY: *Ecuaciones de la física matemática*. MIR 3ra Edición Moscú, 1983
6. FEODOSIEV, V.I.: *Resistencia de materiales*. MIR 3ra Edición, Moscú, 1985
7. PANOVKO, Ya.: *Elements of the applied theory of elastic vibration*. MIR, Moscú, 1973



CIE

**CENTRO DE INFORMACION
DE LA ENERGIA NUCLEAR**

Calle 20 No. 4113 e/ 18A y 47, Playa

Telf.: 22-7527. Fax: 331188.

E mail: cien@ceniai.cu