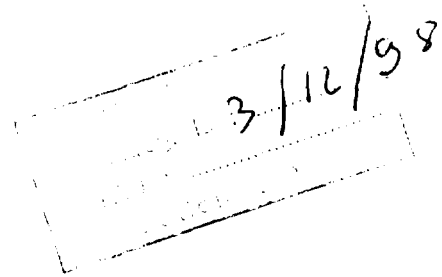


DIRECTION DES ÉTUDES ET
RECHERCHES

SERVICE RÉACTEURS NUCLÉAIRES ET ECHANGEURS
DÉPARTEMENT MÉCANIQUE ET TECHNOLOGIE DES
COMPOSANTS



FR9903106



Novembre 1997

GERARD B.
ULM F.

GENIE CIVIL : CALCUL DES OUVRAGES EN
BETON PRECONTRAIT AVEC LE
CODE_ASTER.

*CIVIL ENGINEERING : CALCULATIONS OF
PRESTRESSED CONCRETE STRUCTURES
USING CODE_ASTER*

Pages : 40

98NB00053

Diffusion : J.-M. Lecœuvre
EDF-DER
Service IPN. Département PROVAL
1, avenue du Général-de-Gaulle
92141 Clamart Cedex

© EDF 1998

ISSN 1161-0611

3 0 - 3 6

SYNTHÈSE :

Ce document présente une analyse des différentes méthodes de calcul des ouvrages en béton précontraint par l'emploi des éléments finis. On distingue deux méthodes pour le calcul de la précontrainte d'ouvrages en béton par éléments finis.

La méthode des forces équivalentes consiste à remplacer l'action de la précontrainte sur le béton par des forces équivalentes. Elle est privilégiée pour le dimensionnement, l'étude de la stabilité globale d'un ouvrage. La prise en compte de phénomènes couplés et variables dans le temps n'est pas aisée. L'approche néglige l'évolution de l'interaction entre la précontrainte et le béton.

La méthode explicite consiste à inclure la résolution mécanique des câbles de précontrainte dans celle de la structure en béton. Celle-ci permet d'une part l'étude locale de la précontrainte et, d'autre part, de réaliser des couplages évolutifs dans le temps : glissement, déformations différées et couplage entre les comportements des aciers et du béton. Cette méthode permet la description de phénomènes non-linéaires plus ou moins complexes (rupture ou plastification des aciers, séchage du béton, fluage, etc.).

Ces deux méthodes sont complémentaires. Le document présente les développements mathématiques et numériques pour chacune des méthodes. Pour la méthode explicite, plusieurs fonctionnalités Code_Aster permettent déjà de répondre à plusieurs applications EDF. Plusieurs couplages peuvent être pris en compte : thermo-mécanique, retrait de séchage, fluage, relaxation des câbles, injection des câbles.

A l'issue de cette analyse sur les méthodes éléments finis pour le calcul des ouvrages précontraints, nous proposons trois développements immédiats dans le Code_Aster, la méthode explicite étant retenue pour les applications :

- créer une procédure de calcul des pertes de précontrainte le long de câbles de précontrainte ;
- créer la commande d'affectation de ces efforts sous forme d'un champ de force initiale dans les éléments barres associées aux câbles ;
- créer une procédure de liaisons des éléments dont les noeuds ne coïncident pas entre eux, assemblage du maillage Câblage avec le maillage structure Béton.

Bruno GERARD

Franz ULM : Attaché de recherche au LCPC

EXECUTIVE SUMMARY :

This document presents an analysis of the different calculation methods for pre-stressed concrete structures which can be performed by using finite elements. Two methods of calculating the pre-stressing of concrete structures with finite elements have been determined.

The equivalent forces method which consists of replacing the action of pre-stressing the concrete with equivalent forces. This method is well suited to dimensioning and studying the overall stability of a structure. It is not an easy matter to take into account coupled phenomena or phenomena which change over time. This approach ignores the evolution of the interaction between the pre-stressing and the concrete.

The explicit method which consists of including the mechanical resolution of the pre-stress cables in that of the concrete structure. Not only does this allow a local study of the pre-stressing to be made, it also allows the couplings which develop over time to be determined, e.g. slip, deferred deformations and coupling between the steel and concrete behaviours. This method enables non-linear phenomena with varying degrees of complexity such as breakage or yielding of the steels, drying out of the concrete, creep, etc. to be described.

The two methods are complementary. This document presents the mathematical and computer developments relating to each of these methods. In the case of the explicit method, certain of the Code_Aster functions already make it possible to meet several EDF application requirements. Several couplings can be taken into account, such as thermomechanical, shrinkage in drying, creep, relaxation of the cables and injection of the cables.

At the end of this analysis into finite element methods of calculating pre-stressed structures, we propose three immediate developments to Code_Aster using the explicit method for the following applications :

- create a procedure for calculating the pre-stress losses along the pre-stressing cables ;
- create a command to allocate these forces in the form of an initial force field in the bar elements associated with the cables ;
- create a procedure for linking elements whose nodes do not coincide with each other and for connecting the cabling meshing with the concrete structure meshing.

SOMMAIRE

1 - INTRODUCTION	4
2 - LA METHODE DES FORCES EQUIVALENTES	6
2.1 - PRINCIPE	6
2.2 - METHODOLOGIE	6
2.3 - L'OPERATEUR CABLAGE	7
2.3.1 - <i>Tracé du câble</i>	7
2.3.2. <i>Caractéristiques des câbles de précontrainte et du béton</i>	7
2.3.3. <i>Calcul de la tension dans les câbles</i>	8
2.3.3.1 Polynômes d'interpolation du tracé	8
2.3.3.2 Calcul de l'abscisse curviligne et de la déviation angulaire	9
2.3.3.3 Calcul réglementaire de la tension du câble	10
2.4 - LOGICIEL STRUCTURE : GENERATION DES CHARGES NODALES EQUIVALENTES	13
2.5 - DEVELOPPEMENTS SPECIFIQUES A REALISER DANS LE CODE_ASTER	14
3 - LA METHODE EXPLICITE	14
3.1 - PRINCIPE	14
3.2 - CAS 1 : DESCRIPTION DU DEPLACEMENT RELATIF CABLE-BETON	15
3.2.1. <i>Disponibilités actuelles et développements dans le Code_Aster</i>	15
3.2.1.1 Formulation de liaison de contact-frottement	15
3.2.1.2 Application de la précontrainte	17
3.2.2. <i>Une autre méthode proposée par F. Ulm au LCPC</i>	17
3.2.2.1 Principe	18
3.2.2.2 Développement d'un élément fini de câble	18
3.2.2.3 Application à un câble rectiligne dans un élément massif	20
3.2.2.4 Cas de la précontrainte intérieure et extérieure	24
3.3 - CAS 2 : ABSENCE DE GLISSEMENT ENTRE LE CABLE ET LE BETON, CODE_ASTER	25
3.3.1. <i>L'analogie thermique pour appliquer la précontrainte</i>	25
3.3.2. <i>Approche discrète avec éléments incompatibles : assemblage de maillage</i>	25
3.3.3. <i>Éléments disponibles dans le Code_Aster, approches discrète et équivalente</i>	26
3.3.3.1 Approches discrètes (éléments barres)	26
3.3.3.2 Approches équivalentes (coques ou membranes)	26
3.4 - LOIS DE COMPORTEMENT POUR DECRIRE LES COMPORTEMENTS DE L'ACIER ET DU BETON DANS LE CODE_ASTER	27
3.4.1 <i>Le béton</i>	27
3.4.2 <i>L'acier</i>	27
3.5 - LE CALCUL ELEMENTS FINIS AVEC DES ELEMENTS MULTI-COUCHES OU MULTI-FIBRES	28
4 - SYNTHESE : DEVELOPPEMENTS DANS ASTER	28
5 - REFERENCES	33
ANNEXE 1	35
ANNEXE 2	37

GENIE CIVIL : CALCUL DES OUVRAGES PRECONTRAINTS DANS LE CODE_ASTER

Etat actuel et développements

1 - Introduction

L'emploi des éléments finis pour le calcul des ouvrages de génie civil se généralise depuis plusieurs années. La méthode est utilisée aussi bien pour le dimensionnement des ouvrages que pour la vérification (états-limites de service et de résistance). Son application aux ouvrages précontraints a largement été démontrée et fait encore l'objet de recherches scientifiques pour améliorer leur utilisation et leur niveau de prédiction [Ulm, 1994 ; Prat et col., 1997 ; Takeda et col., 1997, etc.].

EDF est confrontée depuis de nombreuses années et de façon croissante, à différents problèmes, plus ou moins complexes, relatifs au comportement mécanique des ouvrages de génie civil. Face à ces problèmes, le SEPTEN s'est appuyé sur ses propres analyses et sur des études confiées à des laboratoires extérieurs à EDF. Plusieurs modèles de comportement existent, d'autres restent à développer et à évaluer, mais il apparaît intéressant de pouvoir les utiliser dans le cadre d'un outil intégré répondant aux exigences d'assurance qualité. Dans ce contexte, le Code_Aster, développé par EDF-DER, répond à cette exigence. Ce document a été rédigé dans le cadre de l'AID T2B15A, conjointe à l'action AID I4701A.

Cette note se limite au cas des structures en béton précontraint. Les applications industrielles principales concernent plusieurs éléments de structures des centrales nucléaires. Ces structures sont rarement massives et de géométries diverses : enceintes, dômes, longrines, ... Les tracés de câbles peuvent être complexes. Tous les types de chargement susceptibles d'influencer le comportement doivent pouvoir être pris en compte. Prioritairement, on s'intéressera à l'effet de la température et d'une pression (cas du bâtiment réacteur). Dans le futur, on pourra envisager de traiter les sollicitations de séisme, la fatigue (cyclage thermique), agressions physico-chimiques... Plusieurs modèles de comportement des matériaux devront pouvoir être utilisés : élasticité, plasticité, endommagement (au sens de la création de fissures), glissement, déformations différées. Prioritairement, on privilégiera l'implantation de lois de comportement matériau

réglementaires. Les opérateurs permettront une facilité de mise en oeuvre des fonctionnalités.

On distingue **deux problématiques** en terme de modélisation éléments finis de la précontrainte :

- modéliser le tracé des câbles de précontrainte et les efforts exercés sur le béton ;
- modéliser le comportement des matériaux, notamment les déformations différées.

Il y a un couplage entre l'équilibre mécanique du béton et de l'acier des câbles.

Sachant que le comportement du béton est commun à d'autres applications et n'est pas spécifique à la précontrainte, cette note se limitera à la modélisation par éléments finis des câbles, du transfert des efforts au béton ainsi que du couplage entre les comportements des aciers et du béton.

On distingue **deux méthodes** pour le calcul de la précontrainte par éléments finis :

- la **méthode des forces équivalentes**¹ qui consiste à remplacer l'action de la précontrainte sur le béton par des forces équivalentes. Cette méthode est privilégiée pour le dimensionnement, l'étude la stabilité globale d'un ouvrage. La prise en compte de phénomènes couplés et variables dans le temps n'est pas aisée. L'approche néglige l'évolution de l'interaction entre la précontrainte et le béton. Le comportement des matériaux est généralement limité à l'élasticité ;

- la **méthode explicite** qui consiste à inclure la résolution de l'équilibre mécanique des câbles de précontrainte dans celle de la structure béton. Celle-ci permet l'étude locale de la précontrainte et permet de réaliser des couplages évolutifs dans le temps : glissement, déformations différées et couplage entre les comportements des aciers et du béton. Cette méthode permet la description de phénomènes non-linéaires plus ou moins complexes (rupture ou plastification des aciers, séchage du béton, fluage, etc.). Celle-ci est nécessaire pour les analyses de durée de vie des ouvrages existants.

Ces deux méthodes sont complémentaires. Toutes les deux peuvent être disponibles dans le Code_Aster. La suite du document présente les développements mathématiques et

¹ Dans [Prat et col., 1997] on trouve la méthode externe et la méthode interne. Nous avons remplacé ces définitions par *méthode des forces équivalentes* et *méthode explicite* (respectivement) pour éviter une confusion avec les techniques de précontrainte externe (les câbles sont à l'extérieur de l'élément béton) et interne (les câbles sont à l'intérieur de l'élément béton).

numériques pour chacune des méthodes. Pour la méthode explicite, on verra que plusieurs fonctionnalités Code_Aster permettent déjà de répondre à plusieurs applications EDF. Enfin, nous proposons un programme de développement permettant de répondre mieux aux besoins prioritaires d'EDF².

2 - La méthode des forces équivalentes

2.1 - Principe

Le principe consiste à déterminer les efforts le long des câbles de précontrainte, tenant compte de la géométrie et des pertes. Ces efforts sont ensuite transférés aux noeuds du maillage éléments finis de la structure en béton sous la forme de forces équivalentes ponctuelles. Seuls les noeuds des éléments béton qui contiennent les câbles sont concernés.

Remarque : cette méthode est la plus utilisée par les bureaux d'études pour la conception et la vérification des ouvrages.

2.2 - Méthodologie

On distingue le calcul des efforts le long des câbles du calcul par éléments finis. Généralement, les bureaux d'études disposent de deux logiciels : un logiciel CABLAGE et un logiciel STRUCTURE (éléments finis). La Figure 1 présente une illustration de la démarche à suivre.

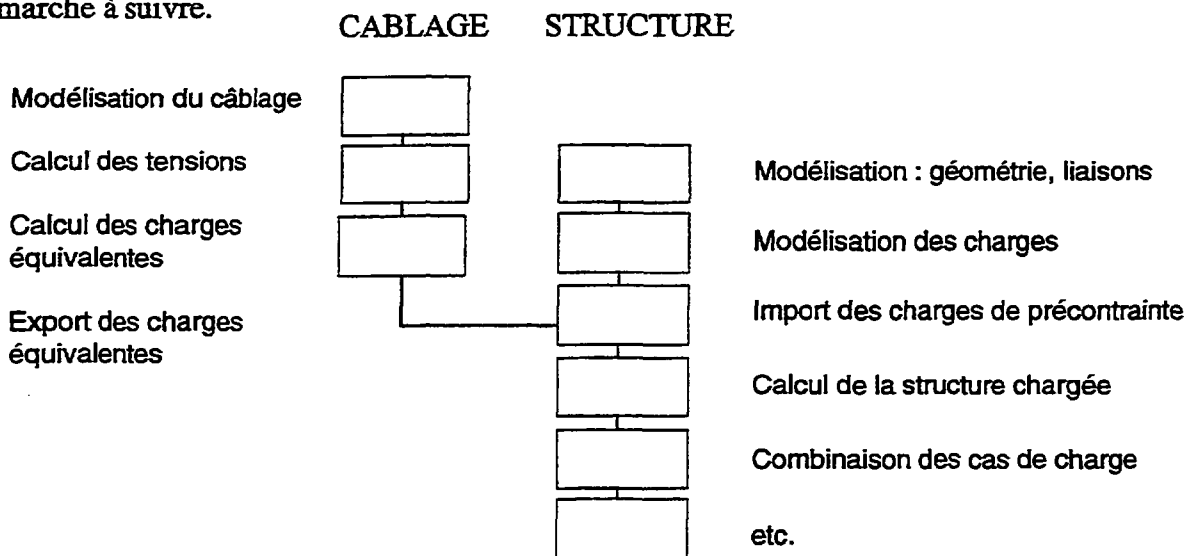


Figure 1 - Démarche logiciel utilisée pour la méthode externe, d'après [Tenaud, 1996].

² F. Fleury, Priorités de développements pour une modélisation de la précontrainte avec le Code_Aster, ENT MS/97/095

Remarque : le logiciel CABLAGE pourra être un opérateur de pré-traitement des données, le logiciel STRUCTURE correspondant au Code_Aster.

2.3 - L'opérateur CABLAGE

Cet opérateur permet, à partir de la géométrie et des caractéristiques des câbles, de déterminer les efforts de précontrainte en des points des câbles prédéfinis. Il génère aussi la longueur du câble, la déviation cumulée ainsi que l'allongement total. Comme pour la méthode explicite que l'on verra plus tard, on doit pouvoir envisager que la géométrie des câbles puisse être introduite sous forme d'un fichier externe au code (fourni par exemple par un bureau d'études).

2.3.1 - Tracé du câble

L'utilisateur définit en plan puis en élévation, le tracé de chaque câble par une suite de points de passage dont les coordonnées sont données ³.

Le fichier des tracés doit contenir les données suivantes :

N : nombre de câbles
NXM : le nombre maximum de noeuds par câble
Ni : le numéro du câble i
Xi,j ; Yi,j ; Zi,j : les coordonnées du point j du câble i (m)

Un opérateur permettant une introduction plus simple des données pourra être envisagé. Notons que cet opérateur sera commun pour les deux méthodes de calcul de la précontrainte.

2.3.2. Caractéristiques des câbles de précontrainte et du béton

Les caractéristiques suivantes doivent être fournies par l'utilisateur :

Câble :

Fo : tension initiale appliquée à l'origine d'un câble
f : le coefficient de frottement en courbe (rd^{-1})
 φ : le coefficient de perte de tension par unité de longueur (m^{-1})
 Δ : recul à l'ancrage (m)

³ Ce fichier devra être compatible avec les outils GIBI et IDEAS.

- E_a : module d'Young de l'acier (Pa)
 S_a : section d'acier d'un câble (m²)
 ρ_{1000} : relaxation à 1000 heures en %
 f_{prg} : contrainte limite de l'acier (Pa)
 μ_0 : coefficient de relaxation de l'acier de précontrainte

Certaines de ces valeurs seront proposées par défaut pour simplifier l'introduction des données (module de l'acier, coefficients de frottement).

Béton

- E_b : module d'Young du béton (Pa)
 ΔF_d : perte d'effort forfaitaire due au fluage et au retrait du béton
 Les pertes par fluage ne peuvent résulter que d'une approximation.

Structure

e : excentricité du câble/plan médian des éléments 2D ou coque.

2.3.3. Calcul de la tension dans les câbles

2.3.3.1 Polynômes d'interpolation du tracé

Afin d'obtenir des résultats précis, il est nécessaire de réaliser une interpolation entre les points. Certains logiciels utilisent une interpolation de type droite ou courbe entre deux noeuds, d'autres recherchent un polynôme d'interpolation de degré n , $P_n(x)$ tel que celui-ci passe par tous les points du tracé du câble (n est le nombre de noeuds du câble). On cherche avec précision à calculer :

- la dérivée première d'un tracé (calcul de la déviation angulaire du câble) ;
- la dérivée seconde (calcul des poussées au vide).

Une méthode consiste à utiliser la formule de Lagrange :

$$P_n(x) = y(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

avec pour un tracé dans le plan Oxy et $y = y(x)$, $f(x_i) = y_i$ pour le noeud i . $L_i(x)$ est défini selon l'équation suivante (toujours pour un tracé dans le plan Oxy) :

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

L'interpolation peut être traitée de différentes manières, surtout si les noeuds sont équidistants dans la direction x. Alors plusieurs relations existent : Newton 1 et 2, Stirling, Bessel ...

Les travaux de Andrieux et Voltaire (1995) ont toutefois montré que ce type d'identification présentait de fortes sources d'erreur potentielles notamment pour le calcul de la dérivée première et surtout seconde du tracé. Une petite erreur potentielle sur la position d'un point provoque une grande erreur sur ces dérivées. Lorsque que le tracé n'est pas parfaitement connu, on préconise alors de traiter le tracé des câbles comme une succession de fonctions de faible degré. On pourra aussi envisager de rentrer l'angle du câble comme donnée supplémentaire.

Un problème tridimensionnel dans le repère Oxyz est réductible à un problème plan en projetant le tracé 3D du câble selon les plans Oxy et Oxz. Alors deux polynômes d'interpolation doivent être déterminés pour chaque projection : $P_{1,n}(x) = y(x)$ et $P_{2,n}(x) = z(x)$.

2.3.3.2 Calcul de l'abscisse curviligne et de la déviation angulaire

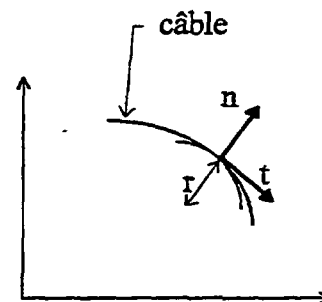
Pour un tracé plan $y = f(x)$ en coordonnées cartésiennes, on définit les caractéristiques géométriques suivantes :

- Différentielle d'un arc : $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$ avec $y' = \frac{df}{dx}$
- Pente de la tangente : $\operatorname{tg}\beta = y'$
- Courbure : $\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ avec $y'' = \frac{d^2f}{dx^2}$

L'abscisse curviligne $s(x)$ et la déviation angulaire cumulée $\alpha(x)$ se calculent ainsi pour un tracé tridimensionnel :

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+y'^2(x) + z'^2(x)} dx$$

$$\alpha(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{y'^2 + z'^2 + (y''z' + y'z'')^2}}{1+y'^2+z'^2} dx$$



2.3.3.3 Calcul réglementaire de la tension du câble

En chaque point, la force le long du câble dans le repère Oxyz est établie à partir des angles β_y et β_z des pentes des tangentes aux tracés projetés dans les plans Oxy et Oxz :

$$\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} F(s) \cos \beta_y \cos \beta_z \\ F(s) \cos \beta_y \sin \beta_z \\ F(s) \sin \beta_y \end{pmatrix}$$

$F(s)$ est la tension du câble de long de l'abscisse curviligne s . Celle-ci est déterminée à partir des règles du BPEL 91⁴. Il s'agit de soustraire à la force appliquée aux ancrages du câble les pertes de tension due au frottement, au recul à l'ancrage, à la relaxation des câbles, au fluage et au retrait du béton :

Perte par frottement : [B.P.E.L. 91]

$$F(s) = F_0 \exp(-f\alpha - \varphi s)$$

s : abscisse curviligne par rapport à l'ancrage d'application de la force

α : la déviation angulaire totale du câble sur la distance s

f : le coefficient de frottement en courbe (rd^{-1})

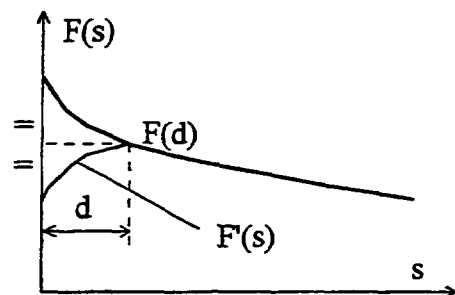
φ : le coefficient de perte de tension par unité de longueur (m^{-1})

Perte à l'ancrage [B.P.E.L. 91]:

L'action du recul de l'ancrage Δ sur la perte de précontrainte est limitée à une distance d (perte perturbée par le frottement). d est évaluée à partir de la relation suivante :

$$\Delta = \frac{1}{EaSa_0} \int_0^d (F(s) - F'(s)) ds$$

avec : $F(s) - F(d) = F(d) - F'(s)$



Cette perte est donc localisée dans la zone de l'ancrage si le câble est courbe et la longueur du câble suffisamment grande. Il peut arriver que d soit plus grand que la longueur du câble, dans ce cas la perte de précontrainte due au recul de l'ancrage s'applique partout.

⁴ Précisons que d'autres lois peuvent être utilisées. Le changement d'une loi pour une autre ne posera pas de difficulté particulière.

D'autres relations un peu plus complexes existent pour décrire $F(s)$ proche de l'ancrage. Pour Δ connu, le résultat est une nouvelle force $F'(s)$ entre 0 et d .

Déformations instantanées du béton [B.P.E.L. 91]:

La perte de tension moyenne instantanée après les phases de précontrainte est évaluée :

$$\Delta F_i = \frac{n-1}{2n} \frac{\sigma_b}{E_b} E_a S_a$$

ΔF_i : perte de tension instantanée dans les câbles

n : nombre de câbles identiques

σ_b : contrainte dans le béton au niveau du centre de gravité des câbles au jour j de la mise en tension (approximative ou affinée par calculs itératifs),

E_b : module d'élasticité instantané du béton au jour j ,

E_a : module d'élasticité des armatures de précontrainte.

Lorsque la précontrainte est réalisée en plusieurs phases espacées dans le temps, on somme les pertes instantanées de chaque journée de mise en précontrainte.

Note : cette formule est surtout utilisée pour un calcul à main levée des ouvrages précontraints. Pour les applications éléments finis cette perte doit être posée égale à zéro car elle est une résultante de l'application de la précontrainte. Toutefois, si il s'agit de reprendre un calcul sur un ouvrage ayant déjà vieilli l'ingénieur peut intervenir sur ce type de perte pour ce câbler à des données d'auscultation

Déformations différées [B.P.E.L. 91]:

• *retrait et fluage du béton :*

Une valeur forfaitaire est introduite comme donnée ΔF_d . Celle-ci peut être évaluée à partir des relations du BPEL.

• **retrait du béton** : $\Delta F_r = \varepsilon_r [1 - r(j)] E_a S_a$ $r(j) = \frac{j}{j + 9 r_m}$

ε_r : retrait total du béton à l'infini (valeur asymptotique),

$r(j)$: une fonction traduisant l'évolution du retrait dans le temps, r_m = aire section de béton/périmètre,

E_a : module d'élasticité des armatures de précontrainte.

• **fluage du béton** : $\Delta F_{\phi\lambda} = (\sigma_b + \sigma_M) \frac{E_a}{E_b} S_a$ (calcul simplifié)

σ_b : contrainte finale dans le béton au niveau du centre de gravité des câbles,

σ_M : contrainte maximale dans le béton au niveau du centre de gravité des câbles.

• **relaxation de l'acier** [B.P.E.L. 91]:

La perte par relaxation suit la loi du BPEL suivante :

$$\Delta F_p = \frac{6}{100} \rho_{1000} \left(\frac{F(s)}{S_a f_{p\sigma}} - \mu_0 \right) F(s)$$

$F(s)$ est ici la tension initiale (en l'absence de retrait et de fluage) dans le câble.

ρ_{1000} : relaxation à 1000 heures en %

$f_{p\sigma}$: contrainte limite de l'acier

μ_0 : coefficient pris à 0,43 pour les aciers TBR (très basse relaxation), 0,3 pour les aciers RN et 0,3 pour les autres armatures.

Evaluation de la tension le long du câble :

Le BPEL propose cette relation :

$$F(s) = F_0 \exp(-f\alpha - \phi s) - (\Delta F_i + \Delta F_d + 5/6 \Delta F_p(s))$$

En terme d'algorithme informatique, on trouvera quelques détails dans la note de Souron [Souron, 1981].

2.4 - Logiciel STRUCTURE : génération des charges nodales équivalentes

On a déterminé la tension exercée dans l'acier en tout point du câble. On distingue deux efforts qui agissent sur le béton :

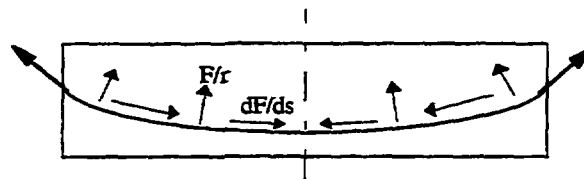
- un effort tangent réparti dû aux frottements acier-gaine-béton : $\bar{F}_t = \frac{dF(s)}{ds} \bar{t}$

Le vecteur unitaire tangent \bar{t} est calculé à partir de la dérivée première du tracé.

- un effort réparti dû à la courbure du câble : $\bar{F}_n = \frac{F(s)}{r} \bar{n}$

Le vecteur unitaire normal \bar{n} est calculé à partir de la dérivée seconde du tracé pour un problème 2D (pour le 3D il s'agit d'écrire la décomposition vectorielle des normales dans deux plans perpendiculaires). r est défini en 2.3.3.2.

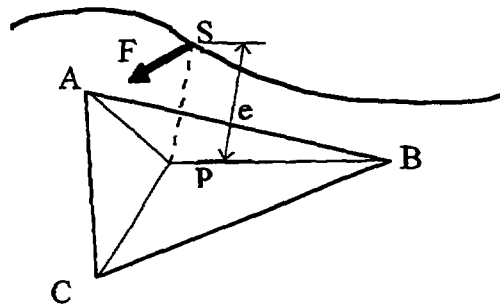
- aux extrémités de la structure, l'effort des platines d'ancrages est appliquée.



Action d'un câble sur la structure en béton

La méthode des forces équivalentes consiste à générer des charges nodales externes à certains noeuds du maillage béton. Le vecteur force résultant des deux efforts agissant sur le béton est rapporté aux éléments finis du béton de la façon suivante pour des calculs 2D ou coque 3D :

soit un point S du câble, sa projection P perpendiculaire à l'élément plan sur le maillage béton se trouve à l'intérieur d'un élément fini :



Projection du câble sur le maillage "béton"

La force F est imposée aux noeuds A, B et C au prorata des aires PAB, PBC et PCA. Le bras de levier SP est appliqué aux noeuds A, B et C en appliquant des charges perpendiculaires au plan du triangle. Cette méthode est identique pour tout type d'élément. Cela revient en finale à écrire une relation d'interpolation du type :

$$\{F_P\} = (N_i)\{F_i\}$$

avec F_p les forces de cablage au point P, N_i une fonction d'interpolation et F_i les forces nodales.

Cette procédure peut être réalisée en utilisant une technique de fenêtre⁵. Celle-ci ne pose pas de problèmes informatiques particuliers. Elle est utilisable pour d'autres applications comme la régularisation des déformations par un modèle Non-Local nécessaire lors de l'emploi de modèles de comportement adoucissant pour décrire le béton [Pijaudier-Cabot et Bázant, 1987]. Elle est utilisée dans le Code_Aster pour le post-traitement des résultats par extraction sur des lignes dans un maillage (Doc Aster : POST_RELEVE_T [U4.74.04] et INTE_MAIL_2D [U4.74.01]).

2.5 - Développements spécifiques à réaliser dans le Code_Aster

Il faut développer l'opérateur CABLAGE et la procédure de génération des forces équivalentes à l'aide d'une technique de type POST_RELEVE (ou de type fenêtrage). Celle-ci consiste à créer un lien entre les éléments qui ont servi à la définition du tracé des câbles et les éléments STRUCTURE qui se superposent. Ce fichier est ensuite traité pour l'interpolation des efforts.

3 - La méthode explicite

3.1 - Principe

Le câble est maillé au même titre que le béton, une loi de comportement fonction du glissement entre les câbles et la gaine enchassée dans le béton décrit la liaison entre les deux matériaux. Les efforts de précontrainte en tous points des câbles sont alors pris en compte de manière explicite.

⁵ il s'agit de superposer une grille mobile virtuelle sur le maillage de référence (béton) et de regarder si le noeud du câble considéré est à l'intérieur de celle-ci après projection. Si c'est le cas, la taille de la grille est réduite et l'opération est renouvelée jusqu'à atteindre l'élément de béton qui est superposé au noeud du câble. Cette opération est réalisée une seule fois avant le calcul de structure. Un fichier d'éléments communs est alors créé avec les coordonnées du noeud du câble par rapport au repère local de l'élément béton juxtaposé.

Dans la pratique, on distingue deux cas d'études pour modéliser la précontrainte :

- **Cas 1 : le câble n'est pas injecté**, il y a une liaison de type **glissement** avec la gaine de précontrainte. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser une modélisation du frottement éléments entre les éléments béton et les éléments décrivant les câbles. La précontrainte est réalisée en imposant un déplacement relatif acier-béton dans les câbles. Cette méthode est utile lorsqu'on cherche à décrire les processus de mise en précontrainte ou lorsqu'on s'intéresse à décrire la dégradation de l'interface au cours du temps (solicitation de fatigue par exemple) ou lorsque l'on cherche à évaluer les marges en cas d'accident (des phases de fissuration intensive de l'interface existent avant la ruine de la structure) ;
- **Cas 2 : le câble est injecté**, il n'y a pas de glissement ⁶ entre les câbles et les gaines de précontrainte. Soit on modifie la loi de contact du Cas 1 en imposant un déplacement relatif nul après injection ; la précontrainte a été créée par un déplacement relatif acier-béton. Soit on ignore la description des phases de précontrainte, tous les déplacements relatifs acier-béton sont supposés nuls, la mise en précontrainte est alors modélisée en imposant une déformation thermique aux câbles ($\epsilon_{th} = \alpha [T-T_{ref}]$) ou un effort initial (méthode que nous retiendrons dans les développements d'Aster). Cette technique sera par exemple utilisée pour suivre le comportement de bâtiment réacteur. En effet, un calage de la mise en précontrainte est difficile faute de disposer de mesures in-situ dès les premiers instants de mise en précontrainte (fluage aux jeunes âges non enregistré, etc.).

La prise en compte d'une dégradation de l'interface câble-gaine suite à des sollicitations de fatigue, par exemple, nécessite d'introduire une loi de comportement de liaison dont l'application est similaire au Cas 1.

Dans la suite de cette section, on s'intéresse à présenter les deux cas avec pour objectif la recherche de procédures spécifiques au développement du Code_Aster pour le calcul de structures précontraintes en béton.

3.2 - Cas 1 : Description du déplacement relatif câble-béton

3.2.1. Disponibilités actuelles et développements dans le Code_Aster

3.2.1.1 Formulation de liaison de contact-frottement

Le Code_Aster version 4 dispose d'une modélisation de câble en SEG3, et d'une modélisation des liaisons avec contact maintenu et glissement possible.

⁶ il est généralement supposé que le glissement entre les câbles et leur gaine est rendu négligeable par l'injection.

Cette liaison existe en version 3 noeuds sur une maille SEG3. Elle peut donc être de type "courbe" ce qui améliore l'approximation du tracé des câbles. Le comportement bilatéral impose un déplacement relatif nul entre le câble et le béton dans la direction normale \bar{n} (voir Figure 2). Un comportement de frottement peut être décrit dans la direction tangentielle \bar{t} . Un critère de type Coulomb peut être utilisé ⁷.

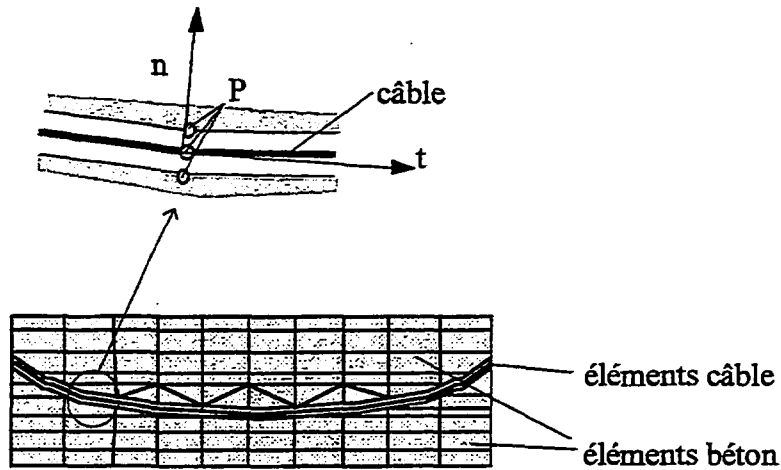


Figure 2 - Formulation de type liaison de contact bilatéral implanté dans le Code_Aster, version 4

Cet élément est actuellement disponible pour des applications 2D. Son extension à des problèmes 3D nécessite quelques développements qui sont programmés pour 1997 (hors AID T2B15A). Le critère de glissement entre le câble et la gaine s'exprime selon la relation de Coulomb (sans cohésion actuellement):

$$|f_t| - |f_n| \tan \phi \leq 0$$

avec f_t la force tangentielle, f_n la force normale, et ϕ l'angle de frottement. Par ailleurs, l'équilibre plan du câble conduit à :

$$f_n = \frac{N}{r}$$

r étant le rayon de courbure local du câble et N la force dans le câble.

En termes de développement, le passage en 3D nécessite le calcul du rayon de courbure minimal r pour la détermination de la normale n . L'équilibre mécanique donne f_n intervenant dans le critère de glissement.

⁷ Il s'agit du critère généralement utilisé pour décrire le frottement entre les câbles et leur gaine.

L'orientation de la courbure minimale est déterminée analytiquement selon les relations déjà énoncées en 2.2.3.2, que l'on retrouve aussi en 3.3.2.3. Cette direction donne aussi la direction de la force normale due à la courbure du câble qui s'applique au béton.

3.2.1.2 Application de la précontrainte

L'application de la précontrainte s'effectue en réalisant un déplacement différentiel du câble dans la zone de l'ancrage (figure 3.a), relatif aux points A1, A2 de la structure en béton.

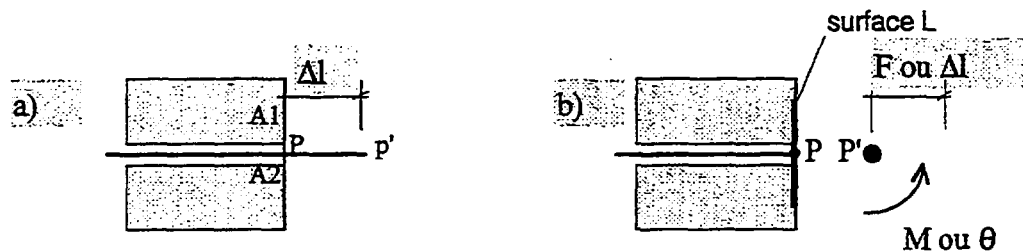


Figure 3 - Application de la précontrainte ; a) C.L. "classique", b) liaison `_Elem` du Code_Aster

Afin de correctement décrire l'influence d'une platine d'ancrage sur l'application de la précontrainte au béton, il existe une condition limite de type `Liaison_Elem` (option '3D_POU') dans le Code_Aster, vers. 3.6 (Figure 3.b). Celle-ci permet d'appliquer à des relations de type corps rigide. Par exemple, le point P et la surface L aura la même cinématique que celle appliquée au point P', en déplacements et rotations (ou en effort et en moment).

Remarque : ces modélisations du Code_Aster permettent donc de simuler la mise en précontrainte en 3D_POU seulement, l'injection pouvant être traitée en modifiant le critère de glissement (angle de frottement ϕ proche de 90°). Le développement de l'option "2D_POU" est à faire, ainsi que le "3D_COQUE".

3.2.2. Une autre méthode proposée par F. Ulm au LCPC

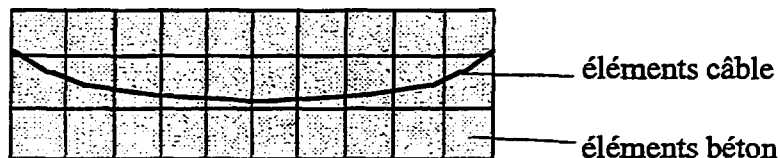
Ce paragraphe synthétise les travaux publiés par le LCPC [Ulm, 1994 ; Désir, 1997 ; Pratt, 1997]. La principale originalité de cette modélisation est d'intégrer le comportement de la liaison câble-structure. L'intérêt de la méthode est aussi de développer un élément fini particulier de câble et de s'affranchir de la nécessité de la coïncidence géométrique des

noeuds du béton avec les noeuds du câble de précontrainte. On verra qu'il y a alors nécessité de développer des procédures d'interpolation entre les noeuds du béton et les noeuds des câbles discrétisés.

3.2.2.1 Principe

Le démarche éléments finis retenue est alors la suivante :

- mailler l'élément en béton ;
 - mailler les câbles de précontrainte indépendamment du maillage béton (pas de coïncidence nécessaire entre les noeuds des câbles et du béton) ;
 - les déplacements du béton sont interpolés aux noeuds les plus proches des câbles.
- Le comportement du câble est déterminé, des déplacements relatifs et des efforts intérieurs et équivalents sont calculés et interpolés aux noeuds du béton.



Le maillage du câble de précontrainte peut ne pas coïncider
avec le maillage du béton

Cette démarche utilise un ingrédient commun à la méthode des efforts équivalents décrite au § 2. Par rapport aux disponibilités "classiques" d'un code aux éléments finis, il est nécessaire de développer un élément spécifique CABLE_GLISSANT à deux degrés de liberté en 2D (2 de déplacement et 1 de glissement), ou quatre degrés de liberté en 3D (3 de déplacement et 1 de glissement). Une procédure d'interpolation doit aussi être développée; celle-ci offre l'avantage d'avoir des éléments finis "béton" indépendants des éléments finis "câble". On note que cette procédure est similaire à celle qui est nécessaire à la génération des forces équivalentes dans la méthode des forces équivalentes (§2).

3.2.2.2 Développement d'un élément fini de câble

Soit un point M_b et M_a de position \bar{X} . Celui-ci est, avant mise en précontrainte, identique pour le béton (indice b) et le câble (indice a). Après déformation, leurs positions sont données par les vecteurs $\bar{x}_{\text{béton}}$ et $\bar{x}_{\text{câble}}$ avec :

$$\begin{cases} \bar{U}_{\text{béton}} = \bar{x}_{\text{béton}} - \bar{X} \\ \bar{U}_{\text{câble}} = \bar{x}_{\text{câble}} - \bar{X} \end{cases}$$

En notant $\bar{U}_{\text{relatif}} = \bar{x}_{\text{câble}} - \bar{x}_{\text{béton}}$ le vecteur des déplacements relatifs entre le câble et le béton :

$$\bar{U}_{\text{câble}} = \bar{U}_{\text{béton}} + \bar{U}_{\text{relatif}}$$

\bar{U}_{relatif} est mesurable par exemple au niveau des têtes d'ancrages.

Le tenseur des déformations dans le câble s'écrit sous la même forme :

$$\varepsilon_{\text{câble}} = \varepsilon_{\text{béton}} + \varepsilon_{\text{relatif}}$$

Dans le cas d'une adhérence parfaite entre les deux matériaux (après injection), le déplacement relatif \bar{U}_{relatif} est nul et le tenseur de déformations relatives $\varepsilon_{\text{relatif}}$ l'est également.

Il est nécessaire d'introduire cette notion de déplacements relatifs pour décrire la perte par frottement le long du câble.

En utilisant le formalisme éléments finis on a :

$$\{\varepsilon_{\text{câble}}\} = \{\varepsilon_{\text{béton}}\} + \{\varepsilon_{\text{relatif}}\}$$

avec :

$$\begin{cases} \{\varepsilon_{\text{béton}}\} = [B^c] \{U_{\text{béton}}\} \\ \{\varepsilon_{\text{relatif}}\} = [B^r] \{U_{\text{relatif}}\} \end{cases}$$

$[B^c]$ est la matrice issue directement de l'hypothèse de continuité (exposant c), qui relie le vecteur déformations $\{\varepsilon_{\text{béton}}\}$ au vecteur des déplacements nodaux $\{U_{\text{béton}}\}$. Ce vecteur contient les composantes habituelles des déplacements nodaux de l'élément.

$[B^r]$ relie le vecteur de déformations $\{\varepsilon_{\text{relatif}}\}$ au vecteur de glissements nodaux $\{U_{\text{relatif}}\}$. Ce vecteur pourra en particulier contenir comme condition aux limites le déplacement relatif imposé entre le câble et le béton à un ancrage, pour introduire la précontrainte à un élément de structure.

Dans le cas général, la matrice de rigidité d'un élément fini de câble intégrant le glissement est de la forme :

$$[K] = \underbrace{[K_{cc}]}_{\text{matrice de rigidité}} + \underbrace{[K_{cr}] + [K_{rc}] + [K_{rr}]}_{\text{termes de couplage}} = \begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cr} \\ K_{rc} & K_{rr} \end{bmatrix}$$

avec les notations $[K_{ij}] = \int_V [B^i][C][B^j] dV$.

Seul le premier terme est la matrice de rigidité des éléments finis habituels, les autres termes sont différents termes de couplage qui intègrent le glissement relatif à l'interface câble/béton.

$[C]$ est la matrice de rigidité tangente, reliant les incréments de contraintes $\{d\sigma\}$ aux incréments de déformations $\{d\varepsilon\}$.

De la même manière, on peut alors déterminer l'expression des forces internes sous la forme :

$$\{F\} = \{F_c^{int}\} + \{F_r^{int}\}$$

avec :

$$\begin{cases} \{F_c^{int}\} = \int_V [B^c] \{\sigma\} dV \\ \{F_r^{int}\} = \int_V [B^r] \{\sigma\} dV \end{cases}$$

$\{\sigma\}$ est le vecteur des contraintes dans le câble en chaque point d'intégration.

Le vecteur $\{F_r^{int}\}$ est le vecteur des forces explicites de précontrainte, mesurables par exemple à l'extrémité des câbles ou issus du comportement de l'interface glissante. Le vecteur $\{F_c^{int}\}$ est celui des forces équivalentes, de même nature que celles imposées dans la méthode des forces exercées par le câble sur le béton. Elle sont de même nature que celles imposées dans la méthode des forces équivalentes.

3.2.2.3 Application à un câble rectiligne dans un élément massif

L'objectif de ce paragraphe est de mettre en place le formalisme nécessaire pour intégrer un câble de précontrainte dans un élément de massif quelconque. Traitons le cas d'un câble modélisé par un élément de barre et le béton par des éléments de massifs. Le câble pouvant traverser les éléments ou rester à l'extérieur.

Le vecteur $\vec{r}(\lambda)$ qui décrit la géométrie de l'élément dans un repère orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est de la forme :

$$\vec{r}(\lambda) = x_i N_i(\lambda) \vec{e}_x + y_i N_i(\lambda) \vec{e}_y + z_i N_i(\lambda) \vec{e}_z \quad i = 1 \text{ nbre de noeuds}$$

et est orienté par le vecteur unitaire tangent \vec{t} défini par :

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|} = t_\alpha \vec{e}_\alpha \quad \alpha = x, y, z \quad \text{et} \quad \vec{r}' = x_i \frac{dN_i}{d\lambda} \vec{e}_x + y_i \frac{dN_i}{d\lambda} \vec{e}_y + z_i \frac{dN_i}{d\lambda} \vec{e}_z$$

Dans ces deux expressions, les fonctions d'interpolation de l'élément sont notées $N_i(\lambda)$. La notation $(\cdot)' = d(\cdot)/d\lambda$ représente la dérivation par rapport aux coordonnées naturelles $\lambda \in [-1, 1]$. (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées du noeud i de l'élément barre.

La courbure $\kappa(\lambda) = 1/\rho(\lambda)$ orientée par le vecteur normal \vec{n} s'exprime par :

$$\kappa(\lambda) = \frac{\sqrt{(\vec{r}' \cdot \vec{r}')(\vec{r}'' \cdot \vec{r}'') - (\vec{r}' \cdot \vec{r}'')^2}}{(\vec{r}' \cdot \vec{r}')^{3/2}} \quad \text{avec} \quad (\cdot)'' = d^2(\cdot)/d\lambda^2$$

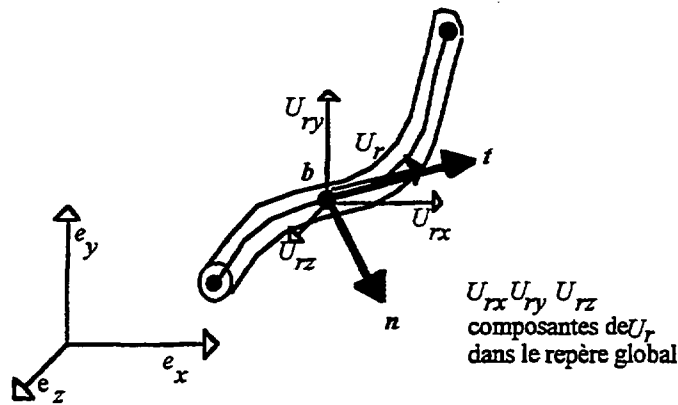
$$\vec{n} = \rho \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\rho}{\vec{r}' \cdot \vec{r}'} \left(\vec{r}'' - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}''}{\vec{r}' \cdot \vec{r}'} \vec{r}' \right)$$

Il existe dans le Code_Aster un élément fini courbe à 3 noeuds isoparamétrique [R3.07.02]. Cet élément permet de réaliser le tracé du câble.

Pour des éléments unidimensionnels de type barre ou poutre, le vecteur de glissement \vec{U}_{relatif} est orienté par la tangente à l'élément câble \vec{t} . Ce vecteur appartient au repère mobile $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{b})$ variable en fonction du noeud :

$$\vec{U}_{\text{relatif}} = U_{\text{relatif}}(s) \vec{t}$$

Les composantes de \vec{U}_{relatif} dans le repère global $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont notées U_{rx}, U_{ry}, U_{rz} .



Définition des déplacements nodaux d'un élément avec degré de liberté de glissement

On aboutit ici à un élément de barre à 4 degrés de liberté par noeud :

$$\begin{cases} \{U_{\text{béton}}\} = \langle U_{bx}^i, U_{by}^i, U_{bz}^i, 0 \rangle \\ \{U_{\text{relatif}}\} = \langle 0, 0, 0, U_{\text{relatif}}^i \rangle \end{cases} \quad i = 1, \text{nbre de noeuds}$$

Les composantes du vecteur $\{U_{\text{béton}}\}$ au noeud i sont attachées aux éléments de massif et sont définies dans le repère orthonormé global (e_x, e_y, e_z) . Les composantes du vecteur glissement $\{U_{\text{relatif}}\}$ le sont sur s orienté par le vecteur tangent t .

Le vecteur déplacements du câble $\{U_{\text{câble}}\}$ fait intervenir à la fois les composantes des vecteurs $\{U_{\text{béton}}\}$ et celles de $\{U_{\text{relatif}}\}$. Il y a donc un **couplage** entre les déplacements du béton de l'élément massif et le déplacement relatif câble/béton.

La relation incrémentale d'équilibre de la barre à résoudre est de la forme :

$$\frac{d(\Delta F_p)}{ds} \bar{t} + \Delta \bar{f}(s) = \bar{0} \quad (\text{équilibre longitudinal du câble})$$

$\Delta F_p \bar{t}$ est le vecteur incrément de force de précontrainte (effort normal de la barre) de composantes $\Delta F_p = \Delta \sigma_{tt} S_{\text{câble}}$ et orienté suivant \bar{t} . $\Delta \sigma_{tt}$ est l'incrément de contraintes de répartition supposée constante sur la section du câble $S_{\text{câble}}$. $\Delta \bar{f}(s)$ est le vecteur des forces de frottement sur le câble, de composantes :

$$\Delta \bar{f}(s) = \Delta f_t \bar{t}$$

avec $\Delta f_t = \Delta f_t^t + \Delta f_t^{\text{frottement}}$ où $|\Delta f_t^{\text{frottement}}| = |\tan \varphi \Delta f_n|$ en utilisant un modèle de frottement de Coulomb. $\tan \varphi$ est le coefficient de frottement câble/béton, et Δf_n l'incrément de densité de forces normales au câble.

Le terme Δf_t est dF_p/ds , et Δf_n est F_p/r (cf. méthode forces équivalentes). Le coefficient de frottement est le même que celui qui intervient dans les pertes par frottement réglementaire.

L'équation d'équilibre et la relation d'écoulement de la loi de frottement conduisent à :

$$\Delta f_t^{\text{frottement}} = -(\text{sgn}(\Delta U_r)) \tan \varphi \frac{\Delta F_p}{\rho}$$

$\Delta f_t^{\text{frottement}}$ dépend de la solution du problème en ΔU_r , ΔF_p . Le problème est non linéaire. Sa résolution doit être itérative comme le reste de la résolution de l'équilibre de la structure (il ne s'agit pas d'un handicap).

L'équation précédente à une itération k de l'incrément de charge n s'écrit :

$$\Delta f_{t_{n,k}}^{\text{frottement}} = -(\text{sgn}(\Delta U_{r_{n,k-1}})) \tan \varphi \frac{\Delta F_{p_{n,k-1}}}{\rho} \quad (1)$$

L'équation d'équilibre du câble est :

$$\Delta F_{p_{n,k}} = E_c \text{ ble } S_c \text{ ble } \Delta \varepsilon_{t_{n,k}} - \Delta F_{n,k-1}^{nl} \quad (2)$$

Le premier terme représente l'effort axial du câble calculé à partir de l'incrément de déformation $\Delta \varepsilon_{t_{n,k}}$ mesuré le long de la tangente \vec{t} du câble et le second terme est l'incrément de forces non linéaires qui prend par exemple en compte la plastification du câble ou sa relaxation, qui peuvent être de nature réglementaire.

Le problème à résoudre s'exprime sous la forme du système d'équations linéarisées suivant :

$$\begin{aligned}
[K]\{\Delta U_{n,k}\} = & \underbrace{F_{\text{ancr}} \{N\}_{\text{ancr}}}_{\text{force imposée à l'ancrage}} + \underbrace{\{\Delta F_n^{\text{ext}}\} \int_{-1}^1 \text{sgn}(\Delta U_r) \tan \varphi \frac{\Delta F_{p_{n,k-1}}}{\rho} (\{N_t\} + \{N\}) \|r\| d\lambda}_{\text{terme de frottement câble / béton}} \\
& + \underbrace{\int_{-1}^1 \Delta F_{n,k-1}^{\text{nl}} (\{B_c\} + \{B_r\}) \|r\| d\lambda}_{\text{comportement non linéaire du câble}} \quad (3)
\end{aligned}$$

N_t est la projection du vecteur d'interpolation selon la direction tangente. Le système d'équations linéaires $[K]\{\Delta U_{n,k}\} = \{\Delta F_n^{\text{ext}}\}$ est le système habituel.

Par rapport à ce système, le premier terme supplémentaire de l'équation (3) $F_{\text{ancr}} \{N\}_{\text{ancr}}$ représente la force imposée à l'ancrage, le troisième prend en compte le frottement câble/béton et le quatrième concerne le comportement non linéaire du câble.

$[K]$ est la matrice de rigidité de l'élément, de composantes :

$$[K_{mn}] = \int_{-1}^1 E_{\text{câble}} S_{\text{câble}} \{B_m\} \{B_n\} \|r\| d\lambda \quad \text{pour } m = c, r \quad (4)$$

et :

$$\begin{cases}
\{B_c\} = \frac{1}{\|r\|} \left(\frac{dN_1}{d\lambda}(t_x, t_y, t_z, 0); \frac{dN_2}{d\lambda}(t_x, t_y, t_z, 0); \frac{dN_3}{d\lambda}(t_x, t_y, t_z, 0) \right) \\
\{B_r\} = \frac{1}{\|r\|} \left(\frac{dN_1}{d\lambda}(0, 0, 0, 1); \frac{dN_2}{d\lambda}(0, 0, 0, 1); \frac{dN_3}{d\lambda}(0, 0, 0, 1) \right) \\
\{N_t\} = (N_1(t_x, t_y, t_z, 0); N_2(t_x, t_y, t_z, 0); \dots; N_{nn}(t_x, t_y, t_z, 0)) \\
\{N\} = (N_1(0, 0, 0, 1); N_2(0, 0, 0, 1); \dots; N_{nn}(0, 0, 0, 1))
\end{cases} \quad (5)$$

La précontrainte est imposée au câble en imposant une force de précontrainte au niveau de l'ancrage du câble, ou en imposant un allongement relatif à une extrémité du câble, comme en 3.2.1.2.

3.2.2.4 Cas de la précontrainte intérieure et extérieure

D'une manière générale, l'équation de partition du tenseur des déformations du câble $\epsilon_{\text{câble}}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\epsilon_{\text{câble}} = \epsilon_{\text{béton}} + \alpha \epsilon_{\text{relatif}}$$

avec cette fois l'introduction du facteur α , appelé facteur de glissement, qui peut prendre les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \text{ adhérence parfaite} \\ \alpha = 1 \text{ glissement libre} \end{array} \right.$$

Ce facteur est introduit pour rendre compte de la condition aux limites d'un câble : dans le cas d'une mise en tension d'un câble ou d'une précontrainte externe, on impose alors $\alpha=1$. Dans le cas d'une précontrainte intérieure, l'injection de mortier correspond à un changement de conditions aux limites à l'interface câble/béton, le coefficient α varie alors de $\alpha=1$ à $\alpha=0$.

3.3 - Cas 2 : Absence de glissement entre le câble et le béton, Code_Aster

3.3.1. L'analogie thermique pour appliquer la précontrainte

Lorsque la prise en compte du glissement n'est pas demandée, le plus simple consiste à appliquer l'effort de précontrainte à partir d'une analogie thermique. Le Code_Aster permet de coupler, pour plusieurs modèles de comportement, la température avec un comportement mécanique. Une décomposition des déformations est généralement admise :

$$\varepsilon(u) = \varepsilon_{th} + \varepsilon_{mécanique}$$

avec $\varepsilon_{th} = \alpha \Delta T$, T la température de l'objet considéré. $\varepsilon_{mécanique}$ est la déformation mécanique.

Ainsi, la technique consiste à mailler le câblage en acier de précontrainte, à lui affecter une température de référence T_{ref}^a , puis à lui affecter la température T_{ref}^b du béton. La force de précontrainte est alors établie à partir de la relation (après rééquilibrage de l'ensemble Structure+Câbles) :

$$F_p = S_a \cdot E_a \cdot \varepsilon_e$$

avec S_a la section du câble en acier, E_a le module de l'acier et ε_e , la déformation élastique dans le câble.

3.3.2. Approche discrète avec éléments incompatibles : assemblage de maillage

Afin de faciliter le maillage d'une structure précontrainte, une technique consiste à créer l'assemblage de sous-structures : structure câble (s) et structure béton. Ceci permet de mailler indépendamment les uns des autres les composants "câbles" et la structure en béton seule sans qu'il y ait superposition des noeuds. Pratiquement cela revient à :

- créer un maillage des éléments "béton" ;

- créer le maillage des câbles avec des éléments barres ;
- assembler les deux maillages avec la création de relations linéaires tel que :

$U(P) = \text{somme } \{N_i(P) U_i\}$ (pour des éléments massifs)

$U(P) = \text{somme } \{N_i(P) U_i\} + \text{rotation des barres}$ (pour des éléments coques)

où $U(P)$: DDL de la barre au point P situé au sein d'un élément "béton" (déplacement du béton au point P ; $N_i(P)$: valeur des fonctions d'interpolation du noeud i au point P (connu a priori) ; U_i : DDL de l'élément "béton" au sein duquel se trouve le point P.

3.3.3. Eléments disponibles dans le Code_Aster, approches discrète et équivalente

3.3.3.1 Approches discrètes (éléments barres)

De nombreuses applications peuvent être traitées à l'aide du Code_Aster en discrétisant les câbles à l'aide d'éléments barres à trois noeuds linéaires ou courbes. Ces éléments peuvent être placés dans des maillages 2D ou 3D coque ou massif. Cette technique a déjà fait l'objet d'une application dans le Code_Aster pour la modélisation de la maquette MAEVA [Fleury, 1997 a-b].

Dans l'état actuel du code, il est nécessaire que les noeuds des câbles coïncident avec les noeuds du maillage "béton". De plus, il n'existe pas de commande permettant de générer une tension initiale de précontrainte le long du câble. Seule une tension uniforme peut aujourd'hui être imposée au câble (ce qui n'est pas la réalité sauf pour des câbles rectilignes - c'est le cas de la maquette MAEVA du SEPTEN).

3.3.3.2 Approches équivalentes (coques ou membranes)

L'approche équivalente consiste à remplacer le maillage discret des câbles de précontrainte par une couche équivalente d'épaisseur e déterminée en fonction de la section de câblage de précontrainte. e est égale à la section de câble par mètre de parement ou largeur de poutre.

Cette technique est utile en 3D seulement. Nous pouvons réutiliser les éléments coques uniaxiaux développés dans le Code_Aster version 4 pour les applications béton armé (AID

MMN I7401A). Le comportement mécanique de l'acier est décrit dans deux directions à définir. Les raideurs dans les deux directions peuvent être différentes.

Pour traiter la précontrainte, il suffit d'appliquer un refroidissement thermique à ces éléments.

Ces coques peuvent être excentrées par rapport à la fibre moyenne du béton.

3.4 - Lois de comportement pour décrire les comportements de l'acier et du béton dans le Code_Aster

3.4.1 Le béton

Pour le béton plusieurs types de comportements instantanés peuvent être décrits : élastique, élasto-plastique, fissurable (AID MMN I47401A).

Pour les comportements différés, on distingue les mécanismes de retrait et de fluage. Actuellement, le retrait de type endogène ne peut être décrit que si on néglige la composante thermique de l'hydratation (le cas des structures minces). Le retrait est alors généré par analogie thermo-mécanique isotrope avec une température homogène dans la structure. Une perte de précontrainte forfaitaire doit être fixée par l'utilisateur. Le retrait de dessiccation peut être évalué par analogie thermique :

- la diffusion de l'humidité relative (ou la teneur en eau) est décrite par une équation de thermique transitoire non-linéaire [Didry et col., 1997] ;
- la déformation due au retrait de dessiccation est obtenue en établissant une loi de dilatation thermique α non-linéaire en fonction de la température.

Le fluage du béton peut être approximé dans un premier temps par une loi viscoélastique implantée dans le Code_Aster. Les coefficients de cette loi peuvent être déterminés à partir d'essais sur éprouvettes ou de la loi réglementaire du B.P.E.L.

Une loi viscoélastoplastique est disponible pour d'autres applications.

3.4.2 L'acier

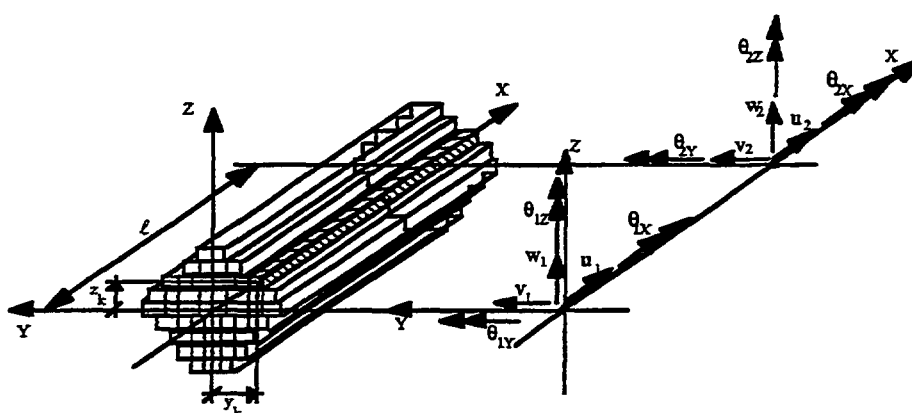
Il existe plusieurs lois disponibles dans le Code_Aster pour décrire le comportement des aciers. Les plus simples sont l'élasticité linéaire ou non-linéaire et l'élasto-plasticité.

La relaxation des aciers peut être aussi décrit à partir du modèle de Lemaitre (viscoélasticité). Les paramètres peuvent être câlés à partir de la loi réglementaire.

Une identification des paramètres de modélisation proposée dans cette approche simplifiée est présentée en Annexe 1.

3.5 - Le calcul éléments finis avec des éléments multi-couches ou multi-fibres

Afin de réduire le nombre de degrés de liberté et les temps de calcul, plusieurs auteurs préconisent l'emploi d'éléments multicouches ou multi-fibres. Les applications EDF ne nécessitent pas aujourd'hui ce type de développement pour la précontrainte. Toutefois, nous présentons en Annexe 2 une spécification technique pour les applications précontraintes en méthode explicite.

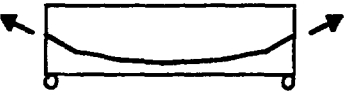
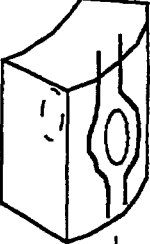
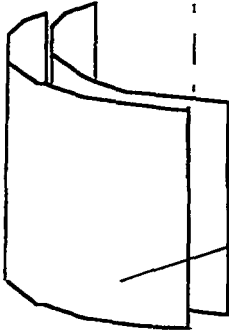


élément fini multifibres

4 - Synthèse : développements dans ASTER

La description de la précontrainte dans le Code_Aster est déjà possible en ce qui concerne la méthode dite explicite. Plusieurs couplages peuvent être pris en compte : thermo-mécanique, retrait de séchage, fluage, relaxation des câbles, injection des câbles. Toutefois, précisons que pour le fluage, il s'agit d'une approximation au même titre que la loi du B.P.E.L. Le développement de lois spécifiques au comportement des bétons doit être étudiée [Didry et col., 1997].

Le tableau suivant synthétise les disponibilités du Code_Aster avec les applications actuelles potentielles ainsi que les alternatives de développements.

Applications	Calculs actuels Code_Aster	Développements possibles
<p data-bbox="437 300 480 333">2D</p>  <p data-bbox="437 555 480 589">3D</p>   <p data-bbox="512 981 662 1061">- éléments béton, coque, massif, etc.</p> <p data-bbox="512 1099 662 1180">- éléments câbles équivalents</p>	<p data-bbox="676 327 1066 539">- prise en compte ou non du glissement, comportement platine d'ancrage, couplages thermo-mécanique, retrait séchage, fluage, relaxation <u>Inconvénient</u> : superposer noeuds des câbles avec noeuds du béton.</p> <p data-bbox="676 600 1066 680">- pas de prise en compte du glissement. idem 2D pour les modèles et inconvénient.</p> <p data-bbox="676 808 1066 949">- calculs globaux sans glissement avec couplages physiques, excentrement, etc. (utilisation d'une analogie thermique). <u>Inconvénient</u> : idem cas précédents.</p>	<p data-bbox="1098 327 1487 385">- passage des éléments de glissement Aster 2D au 3D.</p> <p data-bbox="1098 421 1487 533">- éléments câbles avec interpolation de maillage sans coïncidence des noeuds "câble"- "béton".</p> <p data-bbox="1098 568 1487 680">- modèles physiques béton, comportement aux jeunes âges (fluage endogène pouvant être important).</p> <p data-bbox="1098 716 1487 828">- introduire le glissement à l'interface entre les couches précontraintes de comportement 1D et les éléments béton.</p> <p data-bbox="1098 1240 1487 1532">- Pour structures types EDF : mailleur automatique avec comme entrées, le type de câble, l'espacement, l'ex-centrement, les principales caractéristiques du béton, etc. note : développement d'autant plus utile qu'une certaine expérience des applications à traiter est acquise.</p>
Outil_métiers	NEANT	

L'analyse des besoins du SEPTEN sur le thème du calcul par éléments finis de structures précontraintes nous conduit à orienter les développements du Code_Aster selon trois directions prioritaires [Fleury, 1997 c]:

1 - Calcul simplifié des tensions dans les câbles de précontrainte (inchangé par rapport à l'appel d'offre initial) :

Le calcul de la précontrainte aux jeunes âges n'est pas jugée prioritaire car elle est souvent inconnue faute de disposer de mesure in-situ adéquate. Le calcul de la précontrainte initiale dans les câbles utilisera les relations du B.P.E.L. dans un premier temps. Les câbles seront supposés comme étant correctement injectés, le déplacement relatif câble-béton est nul.

On créera un opérateur permettant à partir d'un maillage de câbles de déterminer la distribution le long des câbles des tensions après déformations différées aux jeunes âges (copie en annexe 1 des éléments de modélisation).

note : il sera nécessaire de prévoir le fait que les termes de déformations instantannées ou différés pourront ou non être pris en compte (par exemple : valeur nulle par défaut).

2 - Transfert des tensions des câbles au béton en un champ de forces initial f_0

On écrira une procédure introduisant les termes de tension initiale dans l'élément de barre MECA_BARRE en utilisant la commande AFFE-CHAR-MECA.

Lorsque ces deux développements seront réalisés, il sera possible de faire des calculs de précontrainte selon une approche explicite intégrant une tension non uniforme le long des câbles, pourvu que les noeuds du maillage câble coïncident avec des noeuds du maillage béton. Les câbles auront une loi de comportement de type élastique-linéaire. Le couplage avec des lois de déformations différées simplifiées du béton permettra ainsi d'effectuer des calculs de vieillissement approchés pour des structures massives ou coques (simulation, par exemple, de la perte de précontrainte due à un fluage du béton).

3 - Création de liaisons cinématiques entre différents types d'éléments finis

Cette phase de développement est ajoutée au précédent appel d'offre. Elle permettra le calcul de structure précontrainte en s'affranchissant de la nécessité de confondre les noeuds des câbles avec les noeuds de la structure en béton. Le développement à réaliser comprendra :

- recherche des éléments voisins "béton" aux câbles. Une technique de "fenêtre" pourra être réalisée. A ce titre, nous rappelons qu'une technique similaire a été développée récemment par Isabelle Vautier du Dpt. MMN ;

- créer les relations linéaires entre les noeuds "câbles" et les éléments "béton". Pour les éléments de coque, un terme de rotation devra être intégré de façon à pouvoir réaliser une excentricité entre le plan moyen de la coque béton et le (s) câble (s).

Ces développements seront réalisés pour être utilisés avec des éléments 2D (contraintes planes) et des éléments coques DKT. Pour les câbles, on utilisera des éléments SEG2 de type ELE_MECA_BARRE. L'extension à une plus grande gamme d'éléments sera réalisée ultérieurement.

remarque : il est possible que cette technique engendre un nombre assez important de multiplicateurs de Lagrange. Le développement devra aussi fonctionner lorsque les noeuds des câbles sont aussi superposés aux noeuds du béton.

4 - Cas tests

Pour la validation des développements nous utiliserons les cas tests suivants.

a - validation de la partie 1 : opérateur câble

- cas d'un câble rectiligne

- cas du câble en hélice régulière (pas d'hélice constant). La solution analytique est connue.

b - validation de la partie 2 : calcul avec noeuds confondus

- une poutre rectangulaire 2D avec un câble rectiligne centré et excentré (excentricité constante le long de la poutre.

- coque DKT : câble non excentré du plan moyen

c - validation de la partie 3 : calcul avec noeuds non confondus

a - comparaison avec validation 2.

- une poutre rectangulaire 2D avec un câble rectiligne centré et excentré (excentricité constante le long de la poutre

- coque DKT : câble non excentré du plan moyen

b - coque avec câble excentré

- calcul avec des éléments coque DKT avec câble excentré.

L'ensemble de ces trois développements répondra aux besoins d'EDF en termes de fonctionnalités informatiques. Il s'agira par la suite d'approfondir la description des évolutions des comportements différés des aciers et des bétons tels que le fluage de dessiccation, le retrait, etc.

Les trois développements proposés ci-dessus seront réalisés sous la responsabilité du Dpt. MTC avec pour échéance fin 1997.

5 - Références

- Andrieux S., Voldoire F., 1995, Stress identification in steam generator tubes from profile measurements, *Nuclear Engineering and Design* 158, 417-427.
- Bissonnette B., 1996, Comportement différé des BHP, *thèse PhD, Université Laval*, QC, Canada.
- Bouberguig A., 1984, Calcul des coques nervurées et précontraintes par éléments finis avec pré et post-processeur, *Annales ITBTP*, n°422.
- Bournazel J.P., 1992, Contribution des mécanismes d'hydratation sur le comportement aux jeunes âges des bétons, *thèse de doctorat Paris 6*.
- Copere M.F., 1981, Notice d'utilisation du programme PRCONT permettant de déterminer les efforts de précontrainte dans une structure, 39 pages, *E.SE/TA 81-34*, *note technique SEPTEN*, EDF.
- Désir J.M., 1997, A study of the bond-slip at steel-concrete interface for reinforced and prestressed concrete, *thèse de doctorat Coppelfederal university of Rio de Janeiro*, Brésil, en préparation.
- Didry O., Gérard B., Bui D., 1997, Analyse des besoins d'EDF en modélisation du comportement du béton, *note EDF-DER HT-B2-/97/001/A, HI-74/97/003/A*
- Fleury F., 1997, Analysis of the results of the first phase of the CESA benchmark, calculations : elastic studies, *rapport EDF-SEPTEN, MS/DS.97079*.
- Fleury F., 1997 b, Parametric study for the 2nd phase of the CESA benchmark - Thermal computations and mechanical interpretation., *rapport EDF-SEPTEN, MS/ENT MS/97/088 A*
- Fleury F., 1997 c, Compte rendu de réunion du 28/4/97 "Priorités de développements pour une modélisation de la précontrainte avec Aster", ref. *MS/DS 97213*.
- Fleury F., 1997, Dossier de plans de bâtiments réacteurs EDF, ref. *MS/DS 97.150*.
- Granger L., 1995, Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires, analyse et modélisation, *thèse de doctorat ENPC*.
- Jacobsen S., Gérard B., Marchand J., 1996, Prediction of short term drying for OPC and silica fume concrete frost/salt scaling testing, *Proceedings 7DBMC, Stockholm*, vol 1., pp401-
- Mazars J., 1990, Béton précontraint, ouvrages isostatiques, Formation à l'agrégation de génie civil, *note de cours ENS Cachan*.
- Le Roy, 1995, Déformations instantannées et différées des bétons à hautes performances, *thèse de doctorat ENPC*.
- Pijaudier-Cabot G. et Bazant Z.P., 1987, Nonlocal Damage Theory, *J. of Engrg. Mech., ASCE*, 113, 1512 - 1533 (1987)

- Prat M., Bisch Ph., Mestat Ph., Millard A., Pijaudier-Cabot G., 1997, Calcul des ouvrages généraux de construction, *Ed. Hermes*, Paris.
- Rousselin A., Granger L., 1997, Synthesis of the elastic calculations of the CESA project, *rapport EDF/SEPTEN GC 96-30A*.
- Souron H., PERCAB, notice d'utilisation, *SMIS 109 03 rev 1.1. note Séchaud et Metz*.
- Takeda H., Kusabuka M., Imoto K., Takumi K., Soejima M., 1996, Numerical algorithm for local failure mechanism of prestressed concrete containment vessel wall with penetration, *Nuclear Engineering and Design*, 166, pp 389-401.
- Tenaud R., 1996, Les éléments finis appliqués au calcul des ouvrages précontraints ; aspects pratiques de la mise en oeuvre des logiciels, *Formation flash ENPC "Les éléments finis appliqués au calcul des ouvrages précontraints"*.
- Ulm F., 1994, Un modèle d'endommagement plastique, application aux bétons de structure, *thèse de doctorat ENPC*.
- Ulm F., 1994, Modelling of prestressing of concrete structures : a boundary condition of slip at interface, *Computer modelling of concrete structures, Ed. Mang, Bicanic and de Borst, proceedings of Euro-C*.
- Ulm F., Acker P., 1997, Le point sur le fluage et la recouvrance des bétons, *article à soumettre à une revue*.

Annexe 1

Paramètres de modélisation simplifiée du comportement différé des bétons et des aciers

Fluage :

Le modèle de Lemaître - Chaboche :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_{eq}}{K} \right)^N p^{-\frac{N}{M}} \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \quad \text{avec } p = \int \sqrt{2/3 \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}} dt \quad \text{et } \sigma_{eq} = \int \sqrt{3/2 \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d}$$

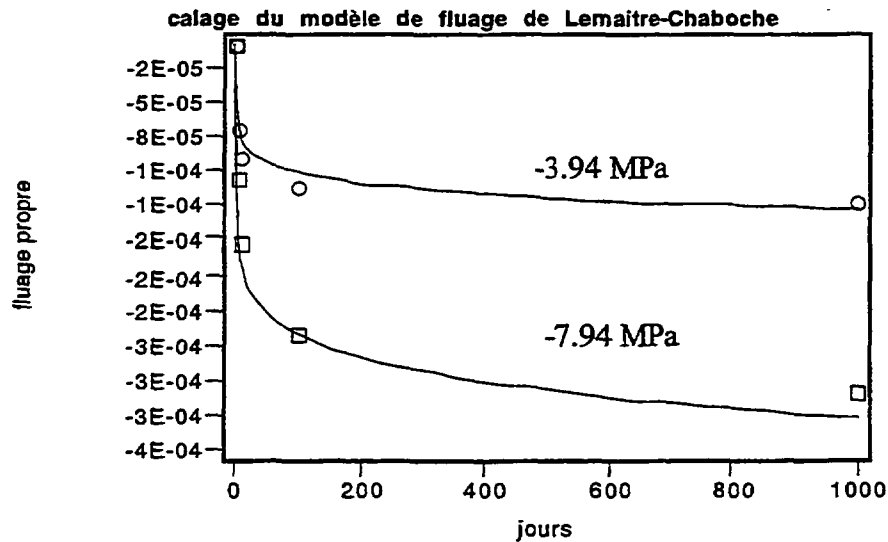
Pour une sollicitation unidimensionnelle à contrainte constante, ce modèle reproduit les résultats d'expérience de fluage qui se mettent sous la forme caractéristique :

$$\dot{\varepsilon} = k \cdot \sigma^n \cdot t^m$$

avec ε la déformation de fluage, σ la contrainte appliquée et t le temps. k, n et m sont des constantes à identifier. [Barbier, 1997] a montré les relations suivantes entre ces derniers paramètres et les ceux de la loi de Lemaître :

$$N = \frac{n}{1+m} \quad M = -\frac{n}{m} \quad K = k^{-\frac{1}{n}} (1+m)^{\frac{m}{n}}$$

La Figure suivante montre une identification des paramètres pour des essais sur béton réalisés par [Le Roy, 1995].



Béton de $f_{c28} = 40$ MPa, $k = 1.9 \cdot 10^{-12}$, $n = 1$, $m = 0.1$

Séchage

Pour décrire la diffusion de l'humidité dans le béton, nous proposons une des relations les plus utilisées celle de [Bazant et al, 1972]. Le transport de l'humidité est décrit par une équation de diffusion non-linéaire en humidité relative :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \text{div}(C(h)\text{grad}h) \quad \text{avec} \quad C(h) = c \left(\alpha + \frac{1-\alpha}{1 + \left(\frac{1-h}{1-h_\sigma} \right)^n} \right)$$

où n , c , h_σ et α sont des constantes. En remplaçant $h = T$ et $C(h) = C(T)$ on peut résoudre cette équation en utilisant le module de thermique non-linéaire du Code_Aster. D'autres relations existent, [Jacobsen et al., 1996] ont toutefois montré qu'un raffinement des lois ne permettait pas de gagner beaucoup en prédiction, les données matériaux et les conditions limites réelles étant assez difficiles à déterminer expérimentalement.

[Granger, 1995] présente une relation entre l'humidité relative et la déformation de retrait d'un béton. Elle peut se mettre sous la forme :

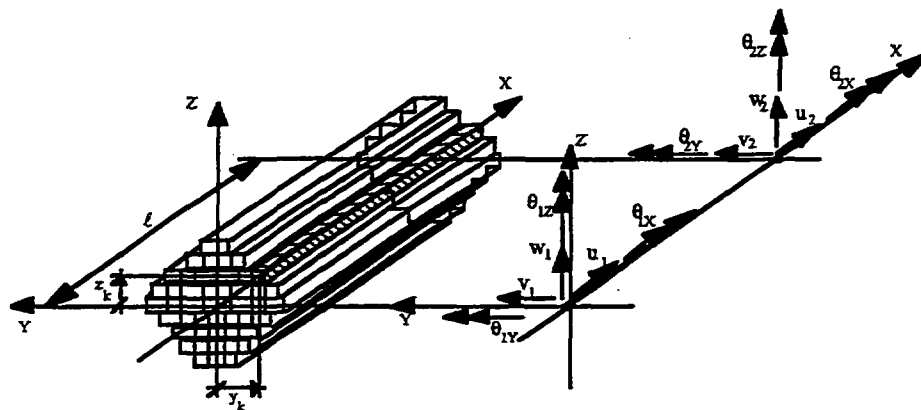
$$\varepsilon_r = a (h - h_{ref})^b \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des constantes}$$

Toujours par analogie, un calcul thermo-mécanique chaîné permet de prédire le retrait de séchage en fonction du temps.

Annexe 2

Eléments multi-couches et multi-fibres travaux de F. Ulm, 1994

Dans ce qui suit, nous présentons les spécifications éléments finis pour le développement d'éléments multifibres défini sur la figure suivante :

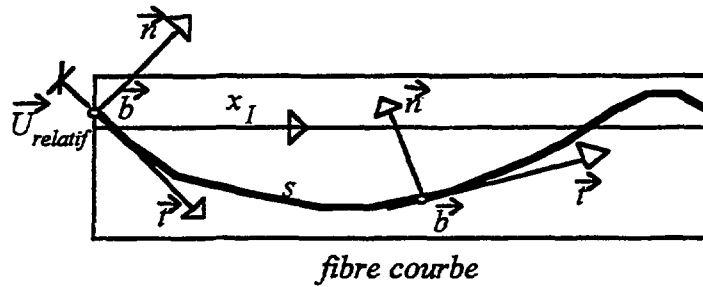


élément fini multifibres

Cet élément se présente à une échelle globale comme un élément de poutre à 6 degrés de liberté par noeuds. La section droite de l'élément est discrétisée en surfaces élémentaires, fibres juxtaposées. Chacune des fibres peut être constituée de matériaux différents, comme par exemple des fibres de béton et des fibres d'acier qui modélisent le ferrailage passif des éléments précontraints.

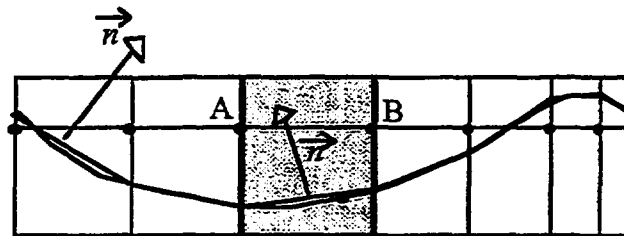
Les problèmes à résoudre pour obtenir un élément multifibre incluant un câble de précontrainte avec glissement sont d'une part l'intégration d'une fibre courbe dans l'élément et d'autre part la définition de la loi de comportement de cette fibre, avec la prise en compte d'un frottement.

Une fibre courbe est définie par un trièdre orthonormé $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ fonction de l'abscisse curviligne s . Le glissement relatif $\bar{U}_{relatif}$ est défini en tout point du câble.



Tracé d'un câble de précontrainte

Le trièdre $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ est pris constant sur toute la longueur d'un élément, entre les noeuds A et B. Le câble modélisé est rectiligne dans l'élément.



Modélisation multifibres

Le vecteur déplacement de la fibre inclinée $\vec{U}_{câble}$ est :

$$\vec{U}_{câble} = \vec{U}_{béton} + \vec{U}_{relatif}$$

$\vec{U}_{béton}$ est le vecteur déplacement de la fibre inclinée calculé avec l'hypothèse de continuité des déplacements, et $\vec{U}_{relatif}$ le vecteur de glissement supposé dirigé suivant la tangente \vec{t} de l'abscisse curviligne s du câble :

$$\vec{U}_{relatif} = U_{relatif}(s)\vec{t}$$

Les déplacements relatifs de la fibre inclinée qui représente le câble sont modélisés par des degrés de liberté supplémentaires aux deux extrémités de l'élément de poutre. Ces degrés de liberté supplémentaires représentent les déplacements relatifs câble/béton aux abscisses $s=0$ et $s=l$, où l est la longueur de la fibre inclinée, et une interpolation linéaire en s . Pour rendre compte de n déplacements relatifs d'un élément de poutre à m noeuds, il faut disposer de $n \times m$ degrés de liberté supplémentaires.

Dans le cas présenté ici d'un élément de poutre à deux noeuds ($m=2$) et d'un seul déplacement relatif ($n=1$), il est nécessaire d'introduire deux degrés de liberté supplémentaires. **L'élément fini de poutre à deux noeuds comporte ainsi $12 + 2 = 14$ degrés de liberté.**

Le vecteur des paramètres de déplacements U et de rotations ω s'écrit alors :

$$\{U\} = \{U_{\text{béton}}\} + \{U_{\text{relatif}}\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \{U_{\text{béton}}\}_{i=A,B} = \{U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}, \omega_{1i}, \omega_{2i}, \omega_{3i}, 0\} \\ \{U_{\text{relatif}}\}_{i=A,B} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, U_{ri}\} \end{cases}$$

$\{U_{\text{béton}}\}$ regroupe les six degrés de liberté par noeud d'un élément poutre 3D standard. Les deux degrés de liberté supplémentaires U_{ri} ($i=A,B$) sont attachés au vecteur tangent au câble \bar{t} .

Le second problème à résoudre concerne la définition de la loi de comportement d'une fibre inclinée, et la prise en compte du frottement. En supposant un champ de contrainte uniaxial en s dans le repère $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$, le tenseur σ a six composantes dans le repère local de l'élément. Le choix de la loi de comportement de l'acier d'un câble de précontrainte peut être par exemple celui d'une loi élastoplastique avec un critère de plasticité de Von Mises et un écrouissage isotrope. Le glissement du câble est attaché à la ligne directrice s de la fibre inclinée. Le câble est encore assimilé à un fil tendu continu convexe. Le traitement du frottement s'effectue de manière analogue à celui des éléments barres.