



KR9900262

KAERI/TR-1378/99

방사능 계측 통계학

Radiation Counting Statistics

한국원자력연구소

31-02

R

제 출 문

한국원자력연구소장 귀하

본 보고서를 1999 년도 “사용후핵연료 화학특성 연구” 과제의 기술보고서로 제출합니다.

1999년 8월

주 저 자 : 서 무 열

공동저자 : 지 광 용

박 경 균

박 영 재

김 원 호

요 약 문

방사능 계측 실험을 계획하고 계측 결과를 평가하는 데 필요한 통계적 방법들을 기술하였다. 확률분포 모델을 이용해서 계측의 정밀도를 추정하고 계측시스템의 안정성을 평가하는 방법, 계수치가 바탕이 되는 계산 결과의 불확도를 구하는 방법, 그리고 계측오차를 줄이는 데 필요한 통계적 방법들을 중점적으로 기술하였다.

Abstract

This report is intended to describe the statistical methods necessary to design and conduct radiation counting experiments and evaluate the data from the experiments. The methods are described for the evaluation of the stability of a counting system and the estimation of the precision of counting data by application of probability distribution models. The methods for the determination of the uncertainty of the results calculated from the number of counts, as well as various statistical methods for the reduction of counting error are also described.

목 차

1. 확률변수와 확률분포	9
1.1. 이산확률변수	10
1.2. 연속확률변수	13
1.3. 이산확률분포	15
이항분포	15
포아송 분포	17
1.4. 연속확률분포	20
정규분포	20
표준정규분포	21
이항분포의 정규 근사법	22
포아송 분포의 정규 근사법	22
2. 확률분포 모델의 응용	29
2.1. 계측시스템의 안정성 확인	29
2.2. 1 회 계측의 정밀도	36
2.3. 반복 계측의 정밀도	37
3. 계측오차의 파악	43
3.1. 카운트수의 가감 계산	43
3.2. 카운트수와 상수의 곱셈	44
3.3. 카운트수 간의 곱셈	45
3.4. 복합 계산	46
3.5. 합성표준불확도 계산	51

4. 계측오차를 줄이는 방법	63
4.1. 백그라운드 저감 방법	63
4.2. 최적 계측시간 배정법	64
4.3. 정확도 설정과 계측시간	65
4.4. 방사능 검출한계	68
4.5. 불감시간 보정	74
4.6. 모평균의 신뢰구간	77
참고문헌	84

1. 확률변수와 확률분포

지하수의 칼슘 농도나 pH 등과 같이 측정하려고 하는 시료의 특성을 변수(變數: variable)라고 한다. 어떤 지하수의 칼슘 농도를 동일한 조건으로 반복 측정하여도 측정값들이 꼭 같지 않고 어떤 분포를 보이는 것처럼 변수가 취하는 값이 확률적 특성을 갖고 있을 때 이 변수를 확률변수(random variable)라고 한다. 관례적으로 확률변수는 대문자 X, Y, Z 등으로 표시하고, 확률변수의 값은 소문자 x, y, z 등으로 표시한다. 확률변수는 이산확률변수(離散確率變數; discrete random variable)와 연속확률변수(continuous random variable)로 구분된다. 변수가 어떤 실수 구간 내에 있는 모든 실수값을 취할 수 있으면 연속확률변수라고 하며, 무게, 높이, 시간, 농도 등이 이에 해당된다. 이에 반해서 변수가 취하는 값이 수직선 위의 서로 떨어져 있는 수치들을 취할 경우 이산확률변수라고 하며, 사람의 수, 불량품의 개수, 계수기에 기록된 방사능 계수치 등이 이에 해당된다.

실험을 통해 얻는 데이터의 구조와 특징을 파악하기 위해서 도수분포(frequency distribution)를 조사하고, 실험 데이터를 요약하고 표현하기 위해서 일반적으로 산술평균과 편차를 계산한다. 따라서, 이를 보다 체계화하려면 관련된 이론적 배경을 이해하는 것이 중요하다. 도수분포의 이론적 대응 관계를 확률분포(probability distribution)라고 한다면 데이터의 실험적 평균(experimental mean)과 실험적 분산(experimental variance)의 이론적 대응관계에 있는 것이 각각 확률분포의 평균과 분산이다.

확률변수가 취할 수 있는 모든 값에 대응되는 확률을 함께 나열한 것을 확률변수의 확률분포라고 하며, 확률분포에는 여러 종류가 있다. 이산확률분포 중에는 이항분포, 포아송 분포와 초기하 확률분포(hypergeometric probability distribution)가 있으며, 연속확률분포 중에서 특별히 중요한 것으로 정규분포, t-분포 그리고 χ^2 -분포를 들 수 있다.

1.1. 이산확률변수

Ref.1, p.131

이산확률변수 X 가 취할 수 있는 n 개의 실현치를 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 라고 할 때, X 가 x_i 의 값을 취할 수 있는 확률을 $P(X=x_i)$ 또는 $P(x_i)$ 로 나타낸다. 표 1과 같이 x_i 에 대응되는 확률 $P(x_i)$ 와 x_i 를 연관시켜 나열한 것을 X 의 이산확률분포라고 한다. 그리고, 확률변수 X 의 확률분포를 기술하는 함수 $P(x)$ 를 확률밀도함수 (probability density function) 또는 간단히 확률함수(probability function)라고 한다.

표 1. 이산확률변수의 확률분포표

x	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
$P(x) = P(X=x)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	\dots	$P(x_n)$

이산확률변수 X 의 확률함수 $P(x)$ 는 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

(1) 확률변수 X 가 x 의 값을 취할 확률은 항상 0과 1 사이에 있다.

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

(2) 모든 확률 $P(x_i)$ 의 합은 1이다.

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$

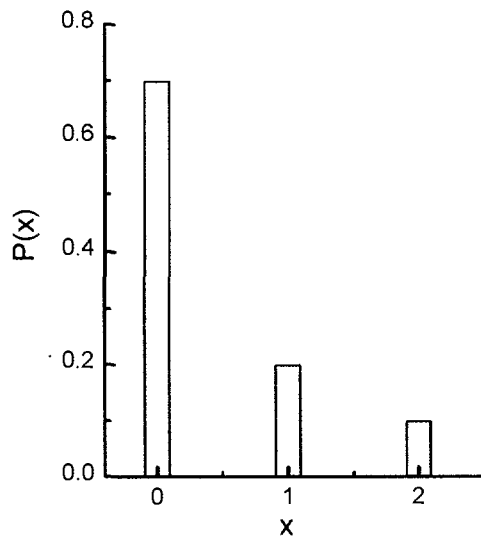
[예제 1] 한 번에 한 쌍씩 생산되는 안경 렌즈를 생각해 보자. 각 쌍의 불량품 개수 X 에 대하여 $X = 0$ 인 확률은 0.70이고, $X = 1$ 인 확률은 0.20이고, $X = 2$ 인 확률은 0.10이라고 하자. 이 경우 X 에 대한 확률분포표를 작성하고 그의 그래프를 그려 보아라.

Ref.1, p.132

[풀이]

확률분포표

x	0	1	2	합
P(x) = P(X=x)	0.70	0.20	0.10	1.0



이산확률분포 그래프

이산확률변수의 기대치와 분산

이산확률변수 X의 확률분포의 기대치(expectation) E(X)를 간단히 이산확률변수의 평균(mean) μ 라고도 한다. 다음 (1)식의 표현대로 모든 이산확률변수의 값과 이에 대응하는 확률을 곱하고 이들을 합해서 기대치를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mu &= E(X) \\
 &= x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \dots + x_n \cdot P(x_n) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i) \quad \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

이산확률변수 X 의 확률분포의 분산(variance) $V(X)$ 는 다음 (2)식과 같이 정의되며, 분산의 양의 제곱근을 그 분포 또는 확률변수의 표준편차라고 한다.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= V(X) \\ &= E[(X-\mu)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i) \quad \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

(1)식으로 정의되는 평균 μ 와 반복측정의 데이터로부터 계산되는 평균 \bar{x} 는 서로 구별할 필요가 있다. 전자가 이론적 분포(theoretical distribution)로부터 계산되는 이론적 평균(theoretical mean)인데 비해 후자는 시료를 측정해서 얻는 실험적 평균(experimental mean)이다. 분산의 경우도 마찬가지다. (2)식으로 정의되는 이론적 분산(theoretical variance) σ^2 과 시료를 측정해서 계산하는 시료분산(sample variance) s^2 으로 구분된다.

[예제 2] 동전을 2 회 던져서 나오는 앞면의 개수를 확률변수 X 라고 할 때 X 의 확률분포와 X 의 기대치, 분산 그리고 표준편차를 구하여라. Ref.2, p.90, 107

[풀이] 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면, 다음과 같이 4 가지 경우가 가능하다.

두 번 던져서 나타나는 집합 :	(H, H),	(H, T),	(T, H),	(T, T)
X 의 값, x :	2	1	1	0

앞면의 개수 X 의 확률분포표

x	0	1	2
P(x)	1/4	2/4	1/4

앞면의 개수 X의 평균과 분산의 계산표

x	P(x)	xP(x)	(x-μ) ² P(x)
0	1/4	0	1/4
1	2/4	2/4	0
2	1/4	2/4	1/4
합계	1	1	0.5

이 표에서 알 수 있듯이 기대치, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

$$\text{기대치 : } \mu = E(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i) = 1$$

$$\text{분산 : } \sigma^2 = V(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i) = 0.5$$

$$\text{표준편차 : } \sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.5}$$

1.2. 연속확률변수

Ref.1, p.150

연속적인 확률분포를 나타내는 확률밀도곡선을 확률밀도함수 f(x)라고 하며, f(x)는 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

- (1) 확률밀도 곡선 아래의 면적은 항상 1이다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- (2) 모든 실수값에 대하여 f(x) ≥ 0이다.

- (3) 연속확률변수의 한 점에서의 확률은 0이다. (예) P(a) = 0.

- (4) 확률변수가 a와 b 사이의 값을 취할 확률 P(a<x<b)는 a와 b 사이의 확률밀도곡선 아래의 면적에 해당된다.

$$P(a<x<b) = \int_a^b f(x)dx$$

그림 1은 이산확률함수의 확률분포 그래프와 연속확률함수의 확률분포 그래프이다. 이산확률분포 그래프에서는 막대의 높이가 그 점에서의 확률을 나타내므로 어느 구간에서의 확률은 구간에 들어 있는 막대들의 높이의 합이지만, 연속확률분포에서 어느 구간의 확률은 확률분포 그래프 아래의 면적에 해당된다.

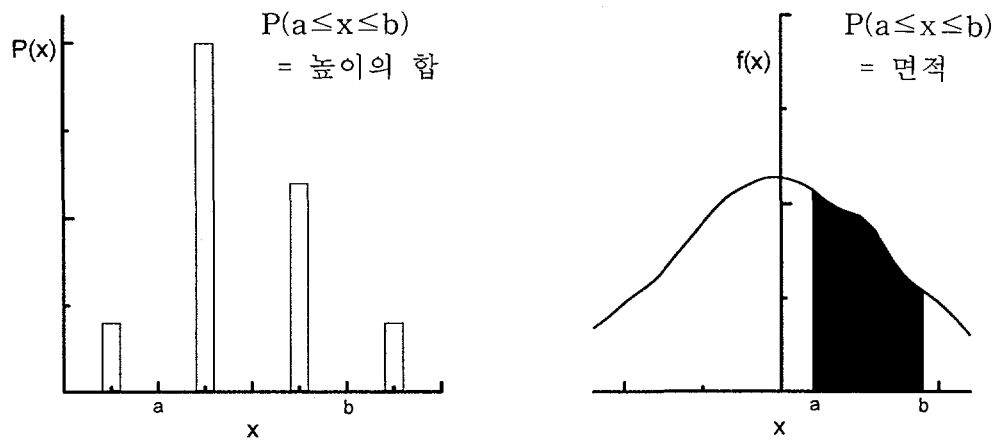


그림. 1. 이산확률함수와 연속확률함수의 확률분포 그래프

연속확률변수의 기대치와 분산

연속확률변수 X 의 기대치와 분산은 다음과 같다.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 \quad \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

1.3. 이산확률 분포

이항분포(二項分布: binomial distribution)

이항분포는 다음과 같은 조건에서 적용되는 확률밀도 함수이다.

- (1) 시행결과는 A와 B 두 가지로 나누어진다.
- (2) 어떤 시행결과가 A일 확률은 시행횟수와 관계없이 일정하다.
- (3) 시행결과가 다른 시행에 영향을 미치지 않는다.

이러한 조건을 만족하려면 유한 모집단으로부터 복원추출(復元抽出)에 의해서 또는 무한 모집단으로부터 복원 또는 비복원추출에 의해서 n 개의 시료를 추출하는 경우로서 시료 추출이 모집단에 영향을 주지 않아야 된다. 예를 들면 동전을 던졌을 때 앞면이 나오느냐 뒷면이 나오느냐, 불량품 검사에서 상품을 집었을 때 불량품이나 합격품이나, 미사일 발사가 성공적이냐 아니냐, 방사성 핵이 관찰하는 동안에 붕괴 하느냐 안 하느냐 등과 같이 두 가지 가능한 결과만을 갖는 우연적인 시행이 이항분포를 따른다.

불량률이 p , 합격률이 $q(= 1 - p)$ 인 어떤 생산품 모집단에서 무작위로 n 개의 시료를 취할 때 추출되는 불량품 개수가 x 일 확률은 이항분포를 따른다. 비슷한 예로서, A가 표시된 공과 B가 표시된 공이 많이 들어 있는 상자로부터 공을 하나 꺼낼 때 A가 나올 확률은 p 이고 B가 나올 확률이 $q(= 1 - p)$ 라고 할 때, 이 상자에서 공을 n 회 꺼내는 경우 A가 나오는 횟수가 x 일 확률은 (5)식으로 표현되는 이항분포라고 부르는 이산확률함수 $P(x)$ 로 기술할 수 있다.

$$P(x) = {}_n C_x p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 1, 2, 3, \dots, n \quad \dots \dots \dots (5)$$

[예제 3] 흰공 3 개와 빨강공 2 개가 들어 있는 주머니에서 무작위로 한 개를 꺼내서 무슨 색의 공인지를 확인한 다음 꺼낸 공을 주머니에 도로 넣고 다시 한 개를 꺼내는 2 회 복원추출의 경우 빨강 공의 출현 개수 x 는 $n = 2, p = 2/5$ 인 이항분포

를 따른다. 확률밀도함수를 구하여라.

Ref.2, p.122

[풀이] 빨강 공 0 개($x = 0$)일 확률: $P(0) = {}_2C_0(2/5)^0(3/5)^2 = 9/25$

빨강 공 1 개($x = 1$)일 확률: $P(1) = {}_2C_1(2/5)^1(3/5)^1 = 12/25$

빨강 공 2 개($x = 2$)일 확률: $P(2) = {}_2C_2(2/5)^2(3/5)^0 = 4/25$

그리고, 이항분포는 확률함수이므로 $\sum_{x=0}^n P(x) = 1$ 을 만족한다. 평균 μ 와 분산 σ^2 은 (5)식을 (1)식과 (2)식에 대입하여 구할 수 있으며, 중간과정을 생략하면 최종적으로 (6)식과 (7)식으로 정리된다. 표준편차 σ 는 분산의 양의 제곱근이므로 (8)식과 같다.

$$\mu = \sum_{x=0}^n x \cdot P(x) = np \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{x=0}^n (x - \mu)^2 \cdot P(x) = np(1 - p) = \mu(1 - p) \quad \dots \dots (7)$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{\mu(1 - p)} \quad \dots \dots \dots (8)$$

방사능 붕괴에 확률모델로 이항분포를 적용할 수 있다. 방사성 핵이 t 시간 동안에 붕괴할 확률은 $p = 1 - e^{-\lambda t}$ 이다. 따라서, t 시간 동안에 붕괴하지 아니할 확률은 $q = 1 - p = e^{-\lambda t}$ 이다. 전체 n 개의 방사성 핵 중 x 개의 핵이 t 시간 동안에 붕괴할 확률 $P(x)$ 는 (5)식에 의해서 다음과 같다.

$$P(x) = {}_n C_x (1 - e^{-\lambda t})^x (e^{-\lambda t})^{n-x}$$

λ : 붕괴상수(decay constant),

$$\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}, \quad T_{1/2} : \text{반감기}$$

평균 μ 와 표준편차 σ 는 (6)식과 (8)식을 이용해서 구할 수 있다.

$$\mu = np = n(1 - e^{-\lambda t})$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\mu e^{-\lambda t}}$$

그리고, $\lambda t \ll 1$ 이면, 즉 측정시간이 반감기에 비해서 대단히 짧아서 $\lambda t \rightarrow 0$ 이면 $\sigma = \sqrt{\mu}$ 가 된다.

[예제 4] 어떤 대학에 입학한 신입생이 4년 후 졸업할 확률은 0.9이다. 5000 명의 학생이 입학했을 때 졸업하는 학생의 기대수를 구하여라. 또한, 졸업하는 학생수의 표준편차를 구하여라. Ref.1, p.170

[풀이] $n = 5000$, $p = 0.9$ 인 이항분포이므로 기대수와 표준편차는 각각 (6)식과 (8)식을 이용해서 구할 수 있다.

$$\text{졸업하는 학생의 기대수} : \mu = np = 5000 \times 0.9 = 4500 \text{ 명}$$

$$\text{표준편차} : \sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{5000 \times 0.9 \times 0.1} = 21.2 \text{ 명}$$

포아송 분포(Poisson distribution)

포아송 분포는 $p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ 이고 $\mu = np$ 가 일정한 값의 조건에서 이항분포를 단순화한, 즉 이항분포의 특수한 예이다. 예를 들면 일정 시간 동안의 방사능 붕괴수, 점심시간 동안에 걸려온 전화수, 직물 제품 일정 크기 중의 결점수, 단위 용적의 희석액 중의 세균수, 어느 지역에서의 1 일 교통사고 사망자수 등의 확률분포가 포아송 분포를 따른다.

이를테면, 반감기 $T_{1/2} = 30$ 년인 ^{137}Cs 선원의 경우 한 개의 ^{137}Cs 핵이 단위 시

간에 붕괴할 확률, 즉 붕괴 상수는 $\lambda = (\ln 2)/30y = 7.3 \times 10^{-10} \text{s}^{-1}$ 이다. 확률이 매우 적다. 그런데, $1 \mu\text{g}$ 만큼이나 적은 ^{137}Cs 시료에도 4×10^{15} 개의 핵이 들어 있다. 핵 한 개가 1 회 시행에 해당되므로 시행횟수가 대단히 크다는 것을 알 수 있다. 그리고, 이 시료의 평균 붕괴수는 $\mu = np = 4 \times 10^{15} \times 7.3 \times 10^{-10} = 2.9 \times 10^6$ decays/s로 일정한 값이다. 이처럼 방사능 붕괴는 위에서 언급한 이항분포를 포아송 분포로 단순화할 수 있는 한계조건을 갖추고 있다.

포아송 분포는 (9)식으로 정의되는 확률함수이다. (9)식에 평균 μ 는 들어 있지만 시행횟수 n 과 확률 p 는 들어 있지 않음을 주목할 필요가 있다. 방사능 붕괴와 관련된 일반적인 실험들이 바로 이처럼 방사성 핵의 수는 알려져 있지 않고 평균계수만을 알 수 있는 경우이다.

$$P(x) = e^{-\mu} \mu^x / x!, \quad x = 0, 1, 2, \dots \dots \dots (9)$$

μ ; 정해진 시간구간 또는 영역에서 일어나는 성공 횟수의 평균

$$e = 2.71828\dots$$

[예제 5] 어떤 방사선 검출기를 써서 방사성동위원소 선원을 측정하였더니 평균계수율(average count rate)이 20 cpm(counts/min)이었다. 다음 측정에서 18 cpm을 측정할 확률은 얼마인가? Ref.3, p.34

[풀이] 방사성 핵이 붕괴할 확률은 포아송 분포를 따르며, $\mu = 20$, $x = 18$ 이므로 확률은 (9)식에 의해서 다음과 같다.

$$P(18) = 20^{18} e^{-20} / 18! = 0.0844 \approx 8\%$$

따라서, 만일 10,000 번 측정하면 844 번은 18 cpm의 값을 기대할 수 있다.

[예제 6] 평균세기가 일정한 방사선원의 방사능 측정 실험에서 50 시간 동안에 총 19,500 개의 α 입자가 관찰되었다. 개개의 α 입자가 도달하는 시간이 테이프에 기록되면 1 분 구간마다 몇 개의 α 입자가 기록되는지를 알 수 있다. Ref.4, p.207

- (a) 1 분 구간 당 평균 몇 개의 α 입자가 기록되었는가?
- (b) 1 분 구간에 α 입자가 전혀 기록되지 않은 구간은 몇 개인가?
- (c) 1 분 구간에 1 개의 α 입자가 기록된 구간은 몇 개나 되는가?
- (d) 1 분 구간에 6 개의 α 입자가 기록된 구간은 몇 개나 되는가?

[풀이] (a) 1 분 구간 당 평균 α 입자 수: $\mu = 19500/(50 \times 60) = 6.5 \alpha$ -rays/min

(b) $P(0) = 6.5^0 e^{-6.5} / 0! = 0.00150$

50 x 60 개의 1 분 구간이 있으므로, α 입자가 전혀 기록되지 않은 구간 수 :

$3000 \times P(0) = 3000 \times 0.0015 = 4.5$ 구간

(c) $P(1) = 6.5^1 e^{-6.5} / 1! = 0.00977$

1 개의 α 입자가 기록된 구간 수: $3000 \times P(1) = 3000 \times 0.00977 = 29.3$ 구간

(d) $P(6) = 6.5^6 e^{-6.5} / 6! = 0.157$

6 개의 α 입자가 기록된 구간 수: $3000 \times P(6) = 3000 \times 0.157 = 471$ 구간

그리고, 포아송 분포는 $\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = 1$ 을 만족하며, 평균 μ 와 분산 σ^2 은 (9)식을

(1)식과 (2)식에 대입하여 구할 수 있으며, 중간과정을 생략하면 최종적으로 (6)식과 (10)식으로 정리된다. 표준편차 σ 는 분산의 양의 제곱근이므로 (11)식과 같다.

$$\mu = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(x) = np \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{x=0}^{\infty} (\mu - x)^2 \cdot P(x) = np(1 - p) \quad \leftarrow (p \rightarrow 0 \text{이므로 } 1 - p = 1) \\ &= np = \mu \quad \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\mu} \quad \dots \dots \dots (11)$$

[예제 7] 무작위로 1,000 명을 뽑아서 생일이 오늘인 사람을 조사하였다. 생일을 오늘로 기대할 수 있는 사람 수, 즉 기대치, 그리고 분산과 표준편차를 구하여라.

Ref.5, p.116

[풀이] 어떤 사람의 생일이 오늘일 확률 p 는 $1/365$ 이다. p 가 1에 비해서 매우 작고 시행횟수가 1,000으로 많으므로 포아송 분포를 이용한다.

$$p = 1/365 = 0.00274 \quad n = 1,000$$

$$\mu = np = 1,000 \times 0.00274 = 2.74 \text{ 명}$$

$$\sigma^2 = \mu = 2.74$$

$$\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{2.74} = 1.66 \text{ 명}$$

1.4. 연속확률분포

정규분포(normal distribution)

이항분포와 포아송 분포가 이산확률변수에 적용되는 반면 정규분포, 즉 가우스 분포는 연속확률변수에 적용된다. 정규분포 $f(x)$ 는 (12)식으로 정의된다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \dots \dots \dots (12)$$

$f(x)dx$ 는 x 값이 x 와 $x+dx$ 사이에 있을 확률로서 이 구간에 해당되는 정규분포곡선 아래의 면적에 해당된다. 정규분포곡선 아래의 전체면적은 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 이다. 그리고, 정규분포는 연속함수이므로 기대치와 분산 및 표준편차는 각각 (3)식과 (4)식을 이용해서 구한다.

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)dx \quad \dots \dots \dots (4)$$

표준정규분포(standard normal distribution)

정규분포함수 $f(x)$ 는 μ 와 σ 의 함수이기 때문에 이들 값이 바뀔 때마다 계산을 새로이 해야된다. 정규분포함수를 평균이 0이고 표준편차가 1인 표준정규분포함수로 변환하면 이러한 번거로움을 피할 수 있다. 새로운 확률변수 z 를 다음 (13)식으로 정의함으로써 $f(x)$ 는 (14)식과 같은 표준정규분포함수 $f(z)$ 로 변환된다.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \dots \dots \dots (13)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) \dots \dots \dots (14)$$

표준정규분포 함수의 평균은 $\bar{z} = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f(z)dz = 0$ 이다. 그리고, 분산은

$$\sigma^2 = V(z) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot f(z)dz = 1 \text{이다.} \quad \text{Ref.3, p.39}$$

[예제 8] 어떤 용기에 들어 있는 약품의 무게는 평균 $\mu = 500$ g, 표준편차 $\sigma = 5$ g의 정규분포에 따른다. 하나의 용기를 임의로 뽑았을 때 다음의 확률을 구하여라.
 (a) 510 g 이상일 확률 (b) 498 g 이하일 확률 (c) 491 g과 498 g 사이일 확률

[풀이] x 는 용기 안에 들어 있는 약품의 무게를 나타낸다고 하자. 확률변수 x 를 z 로 변환한 다음, 표준정규분포표를 이용해서 확률을 구할 수 있다. Ref.1, p.204

$$(a) P(x > 510) = P(z > \frac{510 - 500}{5}) = P(z > 2) = 2.28\% \quad \leftarrow \text{부록 1, 표준정규분포표}$$

$$(b) P(x < 498) = P(z < \frac{498 - 500}{5}) = P(z < -0.4) = P(z > 0.4) = 34.46\%$$

$$(c) P(491 < x < 498) = P(\frac{491 - 500}{5} < z < \frac{498 - 500}{5})$$

$$\begin{aligned}
&= P(-1.8 < z < -0.4) = P(z < -0.4) - P(z < -1.8) \\
&= 34.46 - 3.59 = 30.87\%
\end{aligned}$$

이항분포의 정규 근사법

Ref.1, p.207, Ref.3, p.33, 41, Ref.4, p.237

이항분포의 확률을 구하는 산술적 계산은 n 이 어느 정도 커지면 매우 복잡하고 시간이 많이 걸린다. 이처럼 n 이 클 때 이항분포 확률의 근사치를 구하는 두 가지 방법이 있다. 즉, 평균 $\mu = np$ 의 포아송 분포로 근사시키거나 평균 $\mu = np$, 표준편차 $\sigma = \sqrt{npq}$ 의 정규분포로 근사시키는 방법이다. 이항분포 확률함수를 포아송 분포 확률함수로 근사시키는 경우에 대해서는 이미 앞에서 기술하였다.

그림 2에서 $n = 10$ 의 경우 p 가 0.1, 0.4, 0.8로 변함에 따라 이항분포 모양이 달라지는 것을 볼 수 있다. 특히, $p \rightarrow 0.5$ 이면 정규분포에 근접하는 것을 알 수 있다. 이항분포는 n 이 크거나, n 이 적을지라도 p 가 0이나 1에 가깝지 않고 0.5에 가까워지면 정규분포와 비슷해지므로 이항분포를 정규분포로 대신할 수 있다. 일반적으로 np 와 nq 가 다같이 5보다 크면 이항분포는 정규분포에 가까워진다. 이항분포를 정규분포로 근사시킬 때 정규분포 함수 (12)식의 평균(μ)으로는 np , 표준편차(σ)로는 \sqrt{npq} 를 사용해야 된다.

포아송 분포의 정규 근사법

Ref.3, p.36, 41, Ref.4, p.244

그림 3은 평균 μ 의 변화에 따른 포아송 분포 변화를 보여준다. 평균이 커짐에 따라 포아송 분포는 평균을 중심으로 대칭을 이루는, 즉 정규분포와 유사해진다. $\mu > 20$ 이면 포아송 분포를 정규분포로 근사시킬 수 있다. 포아송 분포를 정규분포로 대신할 때는 정규분포 함수 (12)식의 평균으로는 np , 표준편차로는 \sqrt{np} 를 사용해야 된다.

이처럼 이항분포와 포아송 분포도 특정 조건에서는 정규분포를 닮게 된다. 측정 횟수가 많아지면 거의 모든 측정에 정규분포를 적용할 수 있다. 방사능 붕괴나 핵

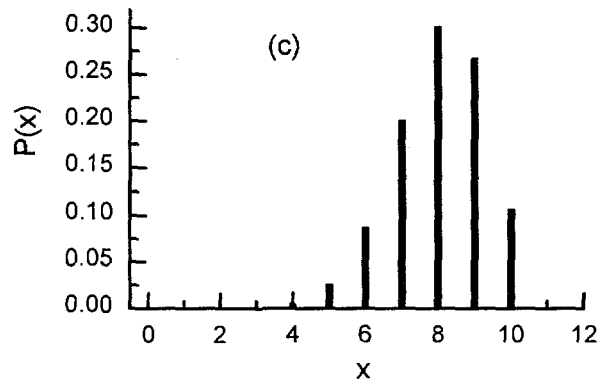
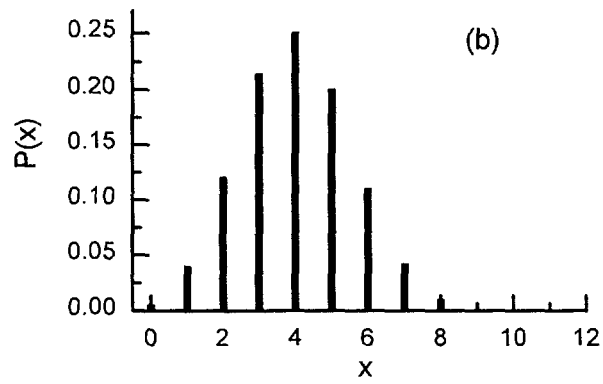
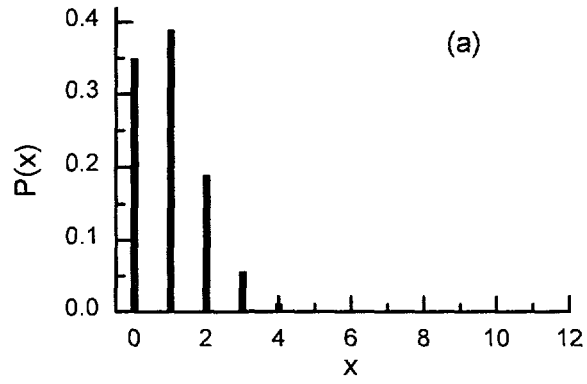


그림 2. 확률에 따른 $n = 10$ 의 이항분포 모양:
 (a) $p = 0.1$, (b) $p = 0.4$, (c) $p = 0.8$.

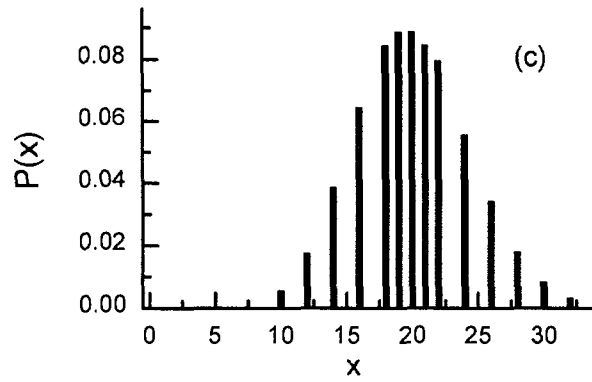
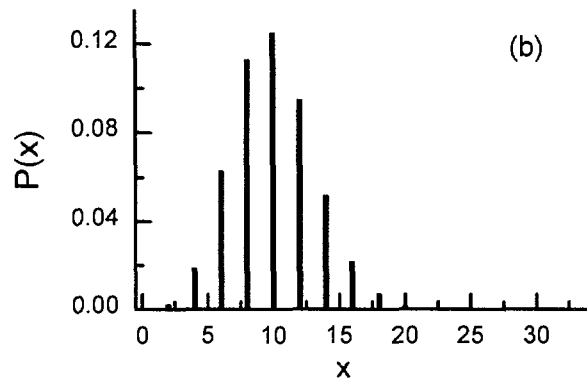
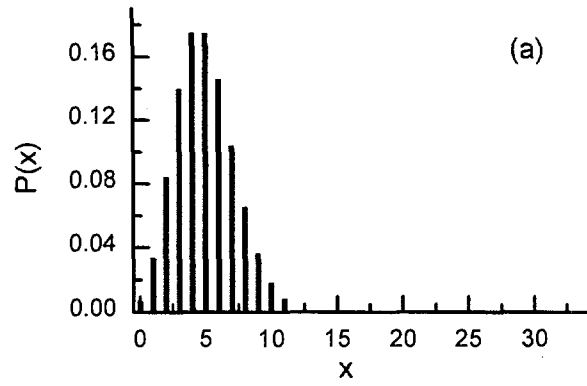


그림 3. 평균에 따른 포아송 분포 모양 :
 (a) $\mu = 5$, (b) $\mu = 10$, (c) $\mu = 20$.

반응에서 입자의 방출은 통계적 특성이 있으며 포아송 분포를 따른다. 특히, 계수치의 평균이 20 이상이면 포아송 분포는 정규분포에 가까워지므로 방사능 측정 결과를 정규분포로 취급할 수 있다.

포아송 분포와 정규분포에서 다같이 평균이 $\mu = 25$ 인 경우를 살펴 보자. 평균이 같으면서 표준편차가 다른 정규분포는 무수하게 있을 수 있다. 이처럼 많은 정규분포 중에서 포아송 분포와 모양이 거의 비슷한 정규분포는 표준편차로 $\sigma = \sqrt{\mu} = 5$ 를 사용하는 경우이다. (9)식에서 $\mu = 25$ 의 포아송 분포를 계산하고, (12)식에서 $\mu = 25$, $\sigma = \sqrt{\mu} = 5$ 의 정규분포를 계산하여 표 2에 수록하였다. 그리고, 그림 4는 이들 분포를 도시한 것으로 두 분포 모양이 거의 비슷하다. 결론적으로 말해서, 방사능 계측 결과는 포아송 분포를 따르지만 평균이 $\mu > 20$ 이면 정규분포로 취급할 수 있으며, 이 경우 정규분포의 평균과 표준편차로는 포아송 분포의 평균 $\mu = np$ 와 표준편차 $\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{np}$ 를 사용해야 된다.

Ref.3, p.41

표 2. 평균이 동일한($\mu = 25$) 포아송 분포와 정규분포의 비교

x	P(x)(Poisson)	f(x)(normal), $\sigma = 5$
10	0.0004	0.0009
12	0.0017	0.0027
14	0.0059	0.0071
16	0.0154	0.0168
18	0.0316	0.0299
20	0.0519	0.0484
22	0.0702	0.0666
24	0.0795	0.0782
25	0.0795	0.0798
26	0.0765	0.0782
28	0.0632	0.0666
30	0.0454	0.0484
32	0.0286	0.0299
34	0.0159	0.0168
36	0.0079	0.0071
38	0.0035	0.0027

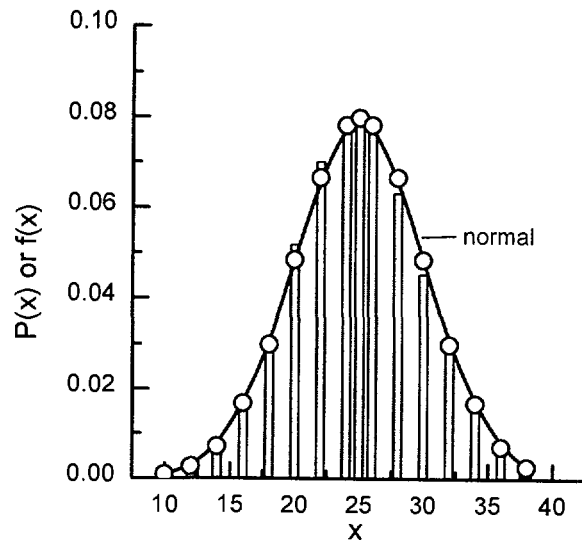


그림 4. $\mu = 25$ 의 포아송 분포 모양과 평균이 같으면서 $\sigma = 5$ 인 정규분포 모양.

지금까지 내용을 종합하면 다음과 같다: 화학분석에서 시료를 여러 차례 측정하여 얻은 측정값들은 정규분포를 따른다는 것이 잘 알려져 있다. 그래서, 화학분석에서는 시료를 7 ~ 8 회 분석하여 평균 \bar{x} 와 표준편차 s 를 계산하고 이들을 바탕으로 하는 정규분포 $N(\bar{x}, s^2)$ 을 모집단의 분포를 예측하거나 설명하는 확률분포 모델로 이용하고 있다. 마찬가지로, 방사능 붕괴의 경우도 정규분포 모델로 기술할 수 있을까? 화학분석에서 측정하는 함량은 연속확률변수인데 반해 방사능 계수치는 이산확률변수로서 방사능 계수치들의 분포는 이산확률분포인 이항분포를 따른다. 그런데, 이항분포의 특성상 시행횟수 n 이 크고(방사성 핵의 수가 시행횟수에 해당됨) 확률 p 가 적은 경우(예를 들면 반감기에 비해서 계측시간이 짧은 방사능 계측)는 이항분포를 포아송 분포로 단순화할 수 있다. 나아가서, 평균이 20 이상이면 포아송 분포를 연속확률분포인 정규분포로 근사시킬 수 있다. 다시 말해서 방사능 계수치는 이

산확률변수이지만 평균이 20보다 크면 방사능 계수치들의 분포를 정규분포 모델로 예측하거나 설명할 수 있다. 다만, 방사능 계측에 정규분포를 적용할 때는 포아송 분포의 평균과 표준편차에 해당하는 np 와 \sqrt{np} 를 각각 정규분포의 평균과 표준편차로 사용한다.

NEXT PAGE(S)
left BLANK

2. 확률분포 모델의 응용

2.1. 계측시스템의 안정성 확인

Ref.5, p.122

방사능 계측 실험실에서는 품질관리 일환으로 한 달에 한 번 정도 주기적으로 같은 조건에서 동일한 선원을 20 ~ 50 회 반복 계측하고, 얻은 데이터를 통계적 방법으로 분석한다. 통계적 분석 결과 데이터 분포가 비정상적인 것으로 평가되면 계측시스템에 문제가 있다고 판단한다.

예를 들어, 어떤 방사선원을 1 분 동안씩 연속해서 n 번 계측한다고 하자. F(x) 는 다음 (15)식으로 정의되는 데이터 분포함수(data distribution function)이며, 데이터 집합에 들어있는 수치의 상대적인 빈도, 즉 상대도수(relative frequency)를 나타낸다.

$$F(x) = \frac{\text{수치 "x"의 출현 수}}{\text{측정 횟수}(n)} \quad \dots \dots \dots (15)$$

따라서, 당연히 $\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1$ 이다. 또한, 이 데이터 분포로부터 시료평균 \bar{x} 와 시료분산 s^2 을 다음 (16)식과 (17)식을 이용해서 계산할 수 있다.

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot F(x) \quad \dots \dots \dots (16)$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot F(x) \quad \dots \dots \dots (17)$$

다음 단계는, 실험에서 얻은 이들 데이터를 적절한 통계모델에 결부시킨다. 통계모델로는 시료평균 \bar{x} 의 크기에 따라서 보통 포아송 분포나 정규분포를 선택한다. 이들 분포는 모평균(population mean) μ 을 써서 계산하므로 μ 가 어떤 값이냐가 중요하다. 그런데, \bar{x} 는 μ 의 추정치이므로 $\mu = \bar{x}$ 의 통계모델을 당연히 생각할 수 있다. $\mu = \bar{x}$ 의 포아송 분포 또는 정규분포를 계산하여 P(x)라고 하자. 이 P(x)가 데

이더가 추출된 모분포(population distribution)를 정확히 기술하는 모델이라면 측정에서 얻은 데이터 분포함수 $F(x)$ 는 $P(x)$ 의 많은 근사치 중의 하나이므로 $F(x)$ 와 $P(x)$ 를 같은 좌표에 도시할 경우 두 분포의 모양이 비슷할 것이다. 그러나, 이 방법은 정성적인 비교에 불과하다.

이보다는 각 분포, 즉 $F(x)$ 와 $P(x)$ 에서 하나의 파라미터를 선정하여 이것들을 정량적으로 비교하는 것이 좋다. 가장 기본적인 파라미터는 평균인데 $F(x)$ 와 $P(x)$ 에서 같은 평균 \bar{x} 를 사용하였으므로 평균을 비교하는 것은 무의미한 일이다. 두 번째로 생각할 수 있는 파라미터로 분산을 들 수 있다. 여기서는, 통계모델의 분산 σ^2 을 데이터 집합에서 구한 시료분산 s^2 과 정량적으로 비교하는 방법을 쓴다. 만일 데이터가 통계모델로 설명되고 데이터 분포가 통계적 예측과 일치한다면 이 두 분포의 분산은 같은 값을 가질 것이다. 두 분산을 비교하는 구체적인 방법으로 “카이 제곱 테스트(Chi-squared test)”를 이용하며 이를 통해 정량적인 결과를 이끌어 낼 수 있다.

그러면, 같은 선원을 20 회 계측한 데이터를 정리한 표 3을 이용해서 데이터 분포함수 $F(x)$ 와 예측한 확률분포함수 $P(x)$ 를 직접 비교하여 보자. 그림 5에 표 3의

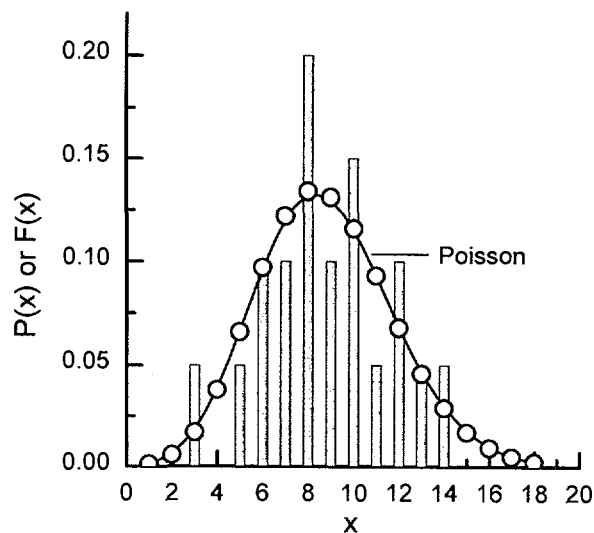


그림 5. $\mu = 8.80$ 의 포아송 분포 모델로 예측한 분포와 실험 데이터 분포의 비교.

표 3. 데이터 분포함수 및 그의 평균과 분산

계수치	데이터 분포함수	$x \cdot F(x)$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot F(x)$
8, 14, 5,	$F(3) = 1/20 = 0.05$	0.15	1.682
8, 12, 8,	$F(4) = 0/20 = 0$	0	0
10, 3, 13,	$F(5) = 1/20 = 0.05$	0.25	0.722
9, 7, 12,	$F(6) = 2/20 = 0.10$	0.6	0.784
9, 6, 10,	$F(7) = 2/20 = 0.10$	0.7	0.324
10, 6, 8,	$F(8) = 4/20 = 0.20$	1.6	0.128
11, 7	$F(9) = 2/20 = 0.10$	0.9	0.004
	$F(10) = 3/20 = 0.15$	1.5	0.216
	$F(11) = 1/20 = 0.05$	0.55	0.242
	$F(12) = 2/20 = 0.10$	1.2	1.024
	$F(13) = 1/20 = 0.05$	0.65	0.882
	$F(14) = 1/20 = 0.05$	0.7	1.352
	$\Sigma F(x) = 1.0$	$\Sigma x \cdot F(x)$ = 8.80	$\Sigma (x_i - \bar{x})^2 \cdot F(x)$ = 7.36

데이터 분포함수를 막대그래프로 나타냈다. 이 데이터의 평균이 $\bar{x} = 8.80$ 이므로 $\mu = 8.80$ 을 가정하고 적절한 통계모델로는 포아송 분포를 선택한다(평균이 크지 않으므로 정규분포는 부적당하다). 그림 5에 작은 원들은 평균을 8.80로 하여 (9)식으로 계산한 포아송 분포함수의 값들이다. 포아송 분포는 불연속이지만 데이터 분포의 추이를 눈으로 확인할 수 있도록 원들을 연결하여 연속적인 곡선으로 나타냈다. 그림에서 데이터 분포와 포아송 분포가 얼마만큼이나 비슷한지를 비교하는 것이 쉽지 않다. 데이터가 20 개로 많지 않기 때문에 $F(x)$ 값들이 큰 변동을 보이지만 데이터 수가 늘어나면 변동이 줄어들어 데이터 분포함수 $F(x)$ 와 예측한 확률분포함수 $P(x)$ 가 매우 비슷해 질 것이다. 어쨌든, 그림으로부터 실험 데이터 분포가 통계적으로 예측한 분포(포아송 분포)와 큰 차이는 없다는 정도의 정성적 결론을 내릴 수 있다.

한 단계 더 나아가서 정량적인 비교 즉, 시료분산과 통계모델로부터 예측한 분

(20)식에서 s^2/\bar{x} 비가 1에서 벗어나는 정도가 시표분산과 관계적으로 예측한 분산과의 차이가 얼마나 되는지를 나타낸다. 테이터의 끝포가 완전한 포아송 끝포라면 $s^2 = \bar{x}$ 이고, 따라서 (20)식에서 $s^2/\bar{x} = 1$ 이므로 $\chi^2 = (n-1)$ 이 된다. 결국, χ^2 과 $(n-1)$ 의 차이는 테이터의 끝포가 포아송 끝포로부터 벗어나는 정도를 가리킨다. 포 4에서 보면, 확률이 0.5에 가까우면 $\chi^2 \approx n-1$ 일 수 있다. 포 4에서 0.01

$$\chi^2 = \frac{\bar{x}}{(n-1)s^2} \dots \dots \dots (20)$$

그런데, 포아송 끝포의 분산 σ^2 은 평균 μ 와 같으므로 (19)식은 $\chi^2 = (n-1)s^2/\mu$ 이 된다. 그리고, \bar{x} 가 μ 의 추정치이므로 (19)식은 결국 (20)식으로 변환된다.

$$\chi^2 = \frac{\sigma^2}{(n-1)s^2} \dots \dots \dots (19)$$

다. 카이제분 χ^2 은 연속확률분포의 함수으로 (19)식으로 정의된다. 그리고, 예측한 올계모델이 포아송 끝포이므로, 올계모델로부터 예측되는 분산은 $\sigma^2 = \mu = 8.80$ 이다. 이 두 분산(7.36과 8.80)을 보면 큰 차이가 없어 보이는 하 나, "카이제분 테스트"를 이용하면 두 분산의 차이를 보다 정량적으로 검토할 수 있

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \dots \dots \dots (18)$$

분산 s^2 을 계산할 수 있다. 산을 비교해 보자. 포 3에서 알 수 있듯이 (17)식을 이용하면 시표분산은 $s^2 = 7.36$ 이다. 만일, 테이터 끝포가 정규분포이면 (17)식은 물론이고 (18)식을 적용하여 시표

표 4. χ^2 -분포

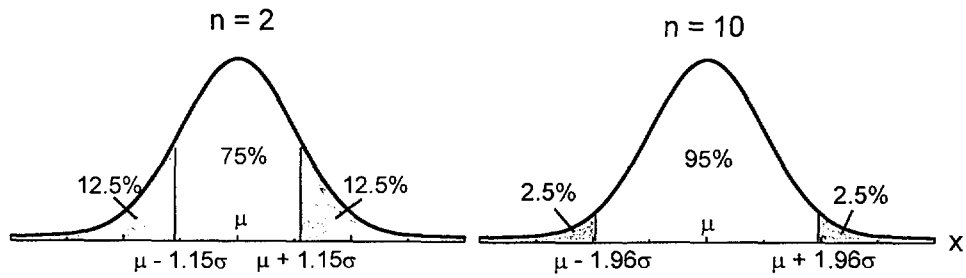
자유도 N-1	확 른						
	0.99	0.95	0.90	0.50	0.10	0.05	0.01
1	0.0002	0.004	0.016	0.455	2.706	3.841	6.635
2	0.020	0.103	0.211	1.386	4.605	5.991	9.210
3	0.115	0.352	0.584	2.366	6.251	7.815	11.345
4	0.297	0.711	1.064	3.357	7.779	9.488	13.277
5	0.554	1.145	1.610	4.351	9.236	11.070	15.086
6	0.872	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	16.812
7	1.239	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	18.475
8	1.646	2.733	3.490	7.344	13.362	15.507	20.090
9	2.088	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	21.666
10	2.558	3.940	4.865	9.342	15.987	18.307	23.209
11	3.053	4.575	5.578	10.341	17.275	19.675	24.725
12	2.571	5.226	6.304	11.340	18.549	21.026	26.217
13	4.107	5.892	7.042	12.340	19.812	22.363	27.688
14	4.660	6.571	7.790	13.339	21.064	23.685	29.141
15	5.229	7.261	8.547	14.339	22.307	24.996	30.578
16	5.812	7.962	9.312	15.338	23.542	26.296	32.000
17	6.408	8.672	10.085	16.338	24.769	27.587	33.409
18	7.015	9.390	10.865	17.338	25.989	28.869	34.805
19	7.633	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	36.191
20	8.260	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	37.566
21	8.897	11.591	13.240	20.337	29.615	32.671	38.932
22	9.542	12.338	14.041	21.337	30.813	33.924	40.289
23	10.196	13.091	14.848	22.337	32.007	35.172	41.638
24	10.856	13.848	15.659	23.337	33.196	36.415	42.980
25	11.534	14.611	16.473	24.337	34.382	37.382	44.314
26	12.198	15.379	17.292	25.336	35.563	38.885	45.642
27	12.879	16.151	18.114	26.336	36.741	40.113	46.963
28	13.565	16.928	18.939	27.336	37.916	41.337	48.278
29	14.256	17.708	19.768	28.336	39.087	42.557	49.588

과 같이 매우 낮은 확률은 데이터의 변동이 비정상적으로 크다(데이터가 너무나 비슷하지 않음)는 뜻이며, 0.99와 같이 매우 높은 확률은 데이터가 비정상적으로 균일하다는 것(데이터가 너무나 비슷함)을 의미한다. 반면에 데이터분포가 완벽하게 포아송 분포를 따르면 확률이 0.50이다. 즉, 계측시스템이 정상적이면 (20)식으로 구한 χ^2 값이 χ^2 -분포표에서 확률이 대략 0.5에 해당되는 칸(column)에 들어 있는 χ^2 값과 비슷할 것이다. 이러한 정량적 비교 방법을 표 3의 데이터에 적용해 보자. $n = 20$, $\bar{x} = 8.80$, 그리고 $s^2 = 7.36$ 이므로 (20)식에 의해서 $\chi^2 = 15.89$ 이고, 이 값에 대응하는 확률을 표 4에서 내삽법으로 구하면 $p = 0.66$ 임을 알 수 있다. 확률 0.66은 너무 높거나 낮지 않으므로 이 데이터를 얻은 계측시스템은 정상적이라고 결론 지을 수 있다.

Ref.3, p.57, Ref.4, p.17

이제, 평균에 비해서 큰 차이를 보이는 데이터의 기각에 대해서 생각해 보자. 반복 계측에서 어떤 계수치들은 다른 것들에 비해서 그 값이 크게 차이가 나는 경우가 자주 있다. 이러한 이상한 데이터를 얻게 된 원인을 찾을 수 있으면 이 데이터를 버리면 되지만 원인을 밝힐 수 없을 경우 이들 데이터를 어떻게 처리할 것인가 하는 문제가 있다. 오차의 정규분포 이론에 의하면 이상한 측정값들도 빈도는 적을 지라도 있을 수 있으므로 데이터를 함부로 버리는 것은 옳지 못하다. 이처럼 이상한 계수치가 한 개 있으면, n 개의 계수치들 중에서 평균으로부터 편차가 이렇게 큰 계수치를 한 개 얻을 수 있는 확률을 계산하여 이 확률이 기준 확률보다 적으면 이 계수치를 버리는 방법을 생각할 수 있다. 기준 확률로 널리 이용되고 있는 것이 쇼브네 기준(Chauvenet's criterion)이다. 쇼브네 기준은 데이터의 분포를 정규분포로 가정한 것이다. 이 기준을 따르면, 평균으로부터 이 정도로 큰 편차를 보이는 계수치를 얻을 확률이 $1/2n$ 이하일 경우 이 계수치를 버린다. 쇼브네 기준에서 이용하는 자료들을 표 5에 수록하였다. $n = 2$ 의 경우, '표준편차로 표현한 평균으로부터의 편차' 1.15는 정규분포곡선 그림에서 양쪽 끝부분의 면적이 각각 12.5%(쇼브네의 기준확률 0.25의 절반)가 되는 $z = 1.15$ 이며, 표준정규분포표(부록 1)에서 이 값

을 찾을 수 있다. 마찬가지로, $n = 10$ 의 경우는 정규분포곡선 그림에서 양쪽 끝부분의 면적이 각각 2.5%(쇼브네 기준확률 0.05의 절반)가 되는 $z = 1.96$ 이다.



기준확률($1/2n$)과 평균으로부터의 편차($z\sigma$)의 관계

표 5. 쇼브네 기준 적용을 위한 자료

측정횟수, n	표준편차로 표현한 평균 으로부터의 편차, $z\sigma$	기준 확률, $1/2n$
2	1.15σ	0.25
3	1.38σ	0.167
4	1.54σ	0.125
5	1.65σ	0.1
10	1.96σ	0.05
15	2.13σ	0.033
20	2.24σ	0.025
25	2.33σ	0.02

쇼브네 기준에 따라, 평균으로부터 편차가 가장 큰 계수치 x 에 대해 $x - \bar{x} > z\sigma$ 이면 x 를 기각하고 나머지 데이터만으로 평균과 표준편차를 새로이 계산한다. 그런데, 어떤 데이터 집합에 대해 쇼브네 기준을 이용해서 데이터를 기각하는 일은

한 번으로 그치는 것이 좋다. 나머지 계수치들에 대해 계속해서 쇼브네 기준을 적용하다 보면 매우 비슷한 계수치들만 남게 되는데 확률론에 의하면 너무나 비슷한 데이터 집합은 너무나 산포가 심한(변동이 매우 심한) 데이터 집합과 마찬가지로 어딘가 문제가 있다.

[예제 9] 앞의 표 3에서 데이터의 분포를 정규분포로 가정할 경우 계수치 $x = 14$ 는 평균($\bar{x} = 8.80$)에 비해 편차가 너무 커서 기각하는 것이 옳다고 생각하는가?

[풀이] 측정횟수 $n = 20$ 이므로 표 5로부터 $z = 2.24$ 이고, 표준편차 $s = 2.78$ [(18)식으로 계산]이다.

$$x - \bar{x} = 14 - 8.80 = 5.2 < zs = 2.24 \times 2.78 \approx 6.2$$

따라서, 계수치 14는 이상하게 큰 값이라고 할 수 없으므로 기각하지 않는다.

2.2. 1 회 계측의 정밀도

Ref.5, p.127

여러 번 되풀이해서 방사능을 계측하는 경우에는 시료분산이 구해지고, 이 시료분산의 제곱근(표준편차)을 1 회 계측할 때 계수치와 평균(참값) 간의 편차를 나타내는 지표로 사용한다. 그러나, 방사능을 다만 1 회 계측하는 경우는 다수 반복 계측할 때 방법으로 시료분산을 계산할 수는 없지만 통계 모델을 이용하면 시료분산을 유추할 수 있다. 계측통계학이 응용성이 큰 까닭은 이처럼 한 번만 계측한 경우도 이 계측과 관련된 불확도(uncertainty)를 알 수 있다는 데 있다.

1 회 측정된 계수치를 x 라 하고, x 가 추출된 모집단의 분포함수를 포아송 분포

또는 정규분포로 가정하자. 분포의 평균 μ 와 확률밀도 함수를 알면 (2)식이나 (4)식으로 분산을 구할 수 있다. 그렇지만 여기서는, μ 는 알 수 없고 다만 1 회 측정 한 카운트수 x 만 가지고 있다. 그런데, x 는 모집단으로부터 추출된 값이므로 μ 의 추정치로 x 를 사용해서 x_i (모든 x)에 대한 확률을 구하면 확률밀도 함수 $P(x)$ 를 얻을 수 있다. $P(x)$ 가 구해지면 (2)식 또는 (4)식으로 예측한 확률분포의 분산 σ^2 을 계산할 수 있다. 모집단에서 추출되는 시료의 분산 s^2 이 확률분포의 분산 σ^2 의 추정치이므로 σ^2 은 s^2 과 비슷하다고 할 수 있다. 그리고, 방사능 계측 데이터의 확률 분포는 포아송 분포 또는 정규분포를 따르므로 확률분포의 분산 σ^2 은 평균 μ 이다. 이러한 논리를 차례대로 수식으로 표현하면 $\mu = x$, $\sigma^2 = s^2$, $\sigma^2 = \mu$ 이므로 $s^2 = x$ 가 된다. 즉, 1 회 측정 한 계수치 x 가 바로 시료분산이라는 결론을 얻었다.

결론적으로 말하면, 1 회 계수치 x 가 참평균(true mean)으로부터 벗어나는 정도를 나타내는 시료표준편차(sample standard deviation)는 \sqrt{x} 이다.

$$s = \sqrt{x}$$

예를 들어, 1 회 계수치가 $x = 100$ 카운트이면 표준편차는 10 카운트이다.

$$s = \sqrt{x} = \sqrt{100} = 10 \text{ counts}$$

2.3. 반복 계측의 정밀도

Ref.3, p.57

방사능 붕괴는 완전한 확률적 과정으로서 포아송 분포를 따르므로 참평균 μ 의 표준편차는 $\sigma = \sqrt{\mu}$ 이다. 그렇지만, 참평균을 알 수 없을뿐 아니라 아무리 여러 차례 계측하더라도 이것을 찾아 낼 수 없다. 그런데도 계측을 여러 차례 할 필요가 있을까?

단지 1 회 계측하여 x 카운트를 얻었다면, 최적의 참평균 추정치는 1 회 계수치 x 가 되며, 표준편차는 \sqrt{x} 이다. 이 경우 상대표준편차는 $\sqrt{x} / x = 1/\sqrt{x}$ 이므로 카

운트수를 늘릴수록 상대표준편차는 감소할 것이다. 그런데, 계수치를 늘리는 방법은
 계측시간을 늘리든지 아니면 여러 차례 계측을 되풀이하고 그 결과를 합치면 된다.
 시간을 길게 하여 한 번 계측하는 것보다는 반복 계측하는 것이 좋은데 이것은 여
 러 차례 반복 계측하면 결과의 재현성도 검토할 수 있기 때문이다. 동일 시료를 n
 회 반복 계측하여 그 결과를 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 라고 하자. 계수치 x_i 는 같은 조
 건에서 같은 시간 동안에 얻은 것들이므로 이들 카운트수 간에 차이가 있다면 이것
 은 오직 방사능 계측의 통계적 특성 때문이다. 각각의 계수치 x_i 의 표준편차는 $s_i =$
 $\sqrt{x_i}$ 이며, 평균 \bar{x} 는 (21)식으로 구한다.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \dots \dots \dots (21)$$

그리고, 평균 \bar{x} 의 표준편차를 계산하는 (22)식과 (23)식은 다음과 같이 유도된다:
 한 편으로 보면, 계수치 x_i 는 포아송 분포를 따르므로 평균과 표준편차는 각각 \bar{x} 와
 $\sigma = \sqrt{\bar{x}}$ 이고, 따라서 평균의 표준편차 $s_{\bar{x}}$ 는 (22)식을 이용해서 구할 수 있다. 다른
 한 편으로 보면, (21)식에서 평균 \bar{x} 는 독립변수 x_i 의 선형결합이므로 오차과급을 고
 려하면 \bar{x} 의 표준편차 $s_{\bar{x}}$ 를 구하는 (23)식이 유도된다. 그러나, 이 식들을 잘 살펴보
 면 같은 식이라는 것을 알 수 있다.

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\bar{x}}}{\sqrt{n}} \quad \dots \dots \dots (22)$$

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i}\right)^2 S_{x_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\sqrt{x_i})^2}{n^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{x_{tot}} \quad \dots \dots \dots (23)$$

$x_{tot} = x_1 + x_2 + \dots \dots \dots + x_n$: n 회 계측에서 얻은 총 계수치

[예제 10] 다음 표는 10 회 계측 결과이다. 평균 계수치와 표준편차를 계산하여라.

계측번호, i	계수기에 기록된 계수치, x	편차의 제곱, $(x_i - \bar{x})^2$
1	197	81
2	210	16
3	200	36
4	198	64
5	205	1
6	195	121
7	190	256
8	220	196
9	215	81
10	230	576
Total	2060	1428

[풀이] $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{2060}{10} = 206$ Ref.3, p.59

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\bar{x}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{206/10} = 4.5 \quad \leftarrow (22) \text{ 식}$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{X_{\text{tot}}}}{n} = \frac{\sqrt{2060}}{10} = 4.5 \quad \leftarrow (23) \text{ 식}$$

※ 일반적인 계산식으로 표준편차를 계산하고 다시 시료평균의 표준편차를 계산하면 다음과 같다.

$$s = \sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 / (n-1)} = \sqrt{1428/9}$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1428/9}}{\sqrt{10}} = 3.98 \approx 4$$

여기서 표준편차 s의 계산에 문제가 있다. 일반적으로 데이터 분포의 종류에 관계 없이 다음 (a)와 (b)식을 이용해서 시료평균 \bar{x} 와 시료평균의 분산 $s_{\bar{x}}^2$ 를 계산한다. 이럴 경우 \bar{x} 의 계산에는 문제가 없지만 $s_{\bar{x}}^2$ 의 계산은 그렇지 않다. $s_{\bar{x}}^2$ 의 계산에 필요한 σ^2 은 알 수 없지만 s^2 이 σ^2 의 추정치이므로 s^2 을 구하면 된다. 그런데, 시료분산 s^2 의 계산식은 데이터가 포아송 분포와 정규분포 중 어느 분포

를 따르느냐에 따라 다르다.

Ref.6, p.93-98

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \dots \dots \dots (a)$$

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \dots \dots \dots (b)$$

데이터가 포아송 분포를 따르면 σ^2 의 추정치 s^2 은 다음 식으로 계산한다.

$$s^2 = \bar{x}$$

그러나, 데이터가 정규분포를 따르면 σ^2 의 추정치 s^2 은 다음 식을 이용해서 계산한다.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

따라서, [예제 10]에서는 방사능 측정결과로서 포아송 분포이므로 [풀이]의 계산 방법이 더 타당하다.

한편, 개개의 계수치는 평균과 크게 다르지 않을 것이므로 $x_i \approx \bar{x}$ 이다. 따라서, 개개 계수치의 표준편차는 $s_{x_i} = \sqrt{x_i} = \sqrt{\bar{x}}$ 이며, (22)식을 $s_{x_i} = \sqrt{\bar{x}}$ 로 나누면 $s_{\bar{x}}/s_{x_i} = 1/\sqrt{n}$ 이 된다. 즉, n 회 반복계측을 바탕으로 계산한 평균이 가지고 있는 오차는 1 회 계수치가 가지고 있는 오차의 $1/\sqrt{n}$ 이다. 따라서, 어떤 계측에서 정밀도를 2 배 개선하려면 계측횟수를 처음보다 4 배로 늘려야 된다. Ref.5, p.136

어떤 경우에는, 불확도가 아주 다른 계측실험 결과들을 합칠 필요가 있다. 이를테면 장시간 계측실험 결과와 단시간 계측실험 결과를 더해야 되는 경우이다. 이 때 평균은 (24)식과 같이 표준편차에 따른 가중치를 부여해서 계산하며, 표준편차는 (25)식으로 계산한다. Ref.3, p.59, Ref.4, p.28, 42

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i/s_i^2}{\sum_{i=1}^n 1/s_i^2} \quad \dots \dots \dots (24)$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/s_i^2}} \quad \dots \dots \dots (25)$$

간단한 예를 들어서 (24)식과 (25)식을 증명하여 보자. 어떤 선원을 독립적으로 2회 측정하여 각각 $x_1 \pm s_1$ 와 $x_2 \pm s_2$ 를 얻었다. 이렇게 오차가 다른 경우 최적의 평균과 표준편차를 구하기 위해서 오차가 적은 계수치에 가중치를 당연히 더 주어야 할 것이다. 구하려고 하는 가장 적절한 평균과 표준편차를 각각 \bar{x} 와 s 라고 하자. x_1 에 대해서 정규화된 통계적 가중치(normalized statistical weight)를 a 라고 하면 \bar{x} 와 두 계수치 사이의 관계를 다음식으로 표현할 수 있다. 이 식은 덧셈식이므로

$$\bar{x} = ax_1 + (1 - a)x_2$$

오차과급 공식을 적용하면 \bar{x} 의 표준편차 s 는 다음 식으로 표현된다. \bar{x} 가 최적이

$$s^2 = a^2s_1^2 + (1 - a)^2s_2^2$$

되려면 표준편차 s 가 최소가 되어야 하므로 다음 조건을 만족해야 된다. 이 식의

$$ds^2/da = 2as_1^2 + 2(1 - a)(-1)s_2^2 = 0$$

해를 구하면 다음과 같은 정규화된 가중치 a 와 $(1 - a)$ 를 얻을 수 있다.

$$a = \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} = \frac{1/s_1^2}{1/s_1^2 + 1/s_2^2}$$

$$1 - a = \frac{s_1^2}{s_1^2 + s_2^2} = \frac{1/s_2^2}{1/s_1^2 + 1/s_2^2}$$

따라서, \bar{x} 과 s 를 구하는 식들은 다음과 같으며, 이 식들은 2회 측정한 데이터와 그 표준편차들로 (24)식과 (25)식을 표현한 것과 같다는 것을 알 수 있다.

$$\bar{x} = \frac{x_1/s_1^2 + x_2/s_2^2}{1/s_1^2 + 1/s_2^2}$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{1/s_1^2 + 1/s_2^2}}$$

3. 계측오차의 파급

Ref.5, p.131

방사능 계측에서 어떤 특정 시간 동안 계측한 카운트수를 그대로 이용하는 경우는 드물며, 관심 있는 물리적 양(g, M, atom etc.)으로 변환하기 위해서 본래의 카운트수를 곱하고 더하는 등 데이터를 가공하는 경우가 더 많다. 이런 경우, 초기 데이터가 가지고 있는 오차가 계산과정을 통해 전파되어 유도된 최종의 양에 불확도로 반영된다. x, y, z, \dots 는 직접 계측한 카운트수이고 이들에 대응되는 표준편차는 각각 s_x, s_y, s_z, \dots 이며, 이들 카운트수로부터 유도되는 어떤 양을 u 라고 하면 $u = f(x, y, z, \dots)$ 이므로 u 에 대한 표준편차 s_u 는 (26)식을 이용해서 계산할 수 있다.

$$s_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 s_z^2 + \dots \dots \dots (26)$$

이 식을 오차파급 공식(error propagation formula)이라고 부르는데, 방사선 계측에서 거의 모든 상황에 적용할 수 있는 식이다. 여기서, 변수 X, Y, Z, \dots 는 완전히 독립적이어야 된다. 이를테면, 어떤 특정 계수치는 이들 변수 중의 하나에만 관여되어야지 또 다른 변수와 관계가 있으면 안된다.

3.1. 카운트수의 가감 계산

계산식 : $u = ax \pm by$, a, b : 상수

u 의 분산 : $s_u^2 = (a)^2 s_x^2 + (\pm b)^2 s_y^2$

u 의 표준편차 : $s_u = \sqrt{a^2 s_x^2 + b^2 s_y^2}$

[예제 11] 전계수치가 1071 카운트이고, 백그라운드 계수치가 521 카운트일 경우 순계수치와 그의 표준편차는 얼마인가?

Ref.5, p.132

[풀이] 순계수치 = 전계수치 - 백그라운드 계수치, “ $u = x - y$ ” 형의 계산식;

$$\begin{aligned} \text{gross counts} & : x = 1071 \\ \text{background counts} & : y = \underline{521} \text{ (-)} \\ \text{net counts} & : u = 550 \end{aligned}$$

포아송 분포 확률 모델 적용하므로 표준편차;

$$s_x = \sqrt{x} = \sqrt{1071}$$

$$s_y = \sqrt{y} = \sqrt{521}$$

$$s_u = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{x + y} = \sqrt{1592} = 39.9$$

∴ 순계수치(net counts) = 550 ± 39.9 counts

3.2. 카운트수와 상수의 곱셈

$$\begin{aligned} \text{계산식} & : u = ax & u &= (1/a)x & a &: \text{상수} \\ u \text{의 분산} & : s_u^2 = a^2 s_x^2 & s_u^2 &= (1/a)^2 s_x^2 \\ u \text{의 표준편차} & : s_u = a s_x & s_u &= (1/a) s_x \end{aligned}$$

[예제 12] t 시간 동안에 x 카운트를 측정하였다면 계수율은 $r = x/t$ 이다. 시간 측정에는 오차가 거의 없다고 보아서 t를 상수로 취급한다. 예를 들어, 5 초간 측정하여 1120 카운트를 얻었을 경우 계수율과 표준편차를 구해 보자. Ref.5, p.133

[풀이] 계수율 : $r = \frac{x}{t} = \frac{1120}{5} = 224 \text{ counts/s}$

표준편차 : $s_r = \frac{s_x}{t} = \frac{\sqrt{1120}}{5} = 6.7 \text{ counts/s}$

∴ 계수율 : $r = 224 \pm 6.7 \text{ cps}$

3.3. 카운트수 간의 곱셈

계산식 : $u = xy$

$u = x/y$

u의 분산 : $s_u^2 = y^2 s_x^2 + x^2 s_y^2$

$s_u^2 = (1/y)^2 s_x^2 + (-x/y^2)^2 s_y^2$

상대표준편차 : $(\frac{s_u}{u})^2 = (\frac{s_x}{x})^2 + (\frac{s_y}{y})^2$

$(\frac{s_u}{u})^2 = (\frac{s_x}{x})^2 + (\frac{s_y}{y})^2$

[예제 13] 2 개의 선원을 같은 시간 동안 개별적으로 측정하여 각각 16265 카운트와 8192 카운트를 얻었다. 백그라운드는 무시한다. 방사능 비율을 계산하고 표준편차를 계산하여라. Ref.5, p.135

[풀이]

$x = 16265$

$y = 8192$

$s_x = \sqrt{x} = \sqrt{16265}$

$s_y = \sqrt{y} = \sqrt{8192}$

방사능 비율 : $R = x/y = 16265/8192 = 1.985$

상대표준편차 : $(\frac{s_R}{R})^2 = (\frac{s_x}{x})^2 + (\frac{s_y}{y})^2$

$$= \frac{16265}{16265^2} + \frac{8192}{8192^2}$$

$$= 1.836 \times 10^{-4}$$

$$\frac{s_R}{R} = 0.0135$$

$$s_R = 0.0135 \times R = 0.0135 \times 1.985 = 0.027$$

$$\therefore R = 1.99 \pm 0.027$$

3.4. 복합계산

계수율의 표준편차

Ref.3, p.59

계수기에는 보통 카운트수가 기록되며, 계수율, 즉 단위 시간 당 카운트수는 다음과 같이 계산한다.

G : 전계수치(gross counts : number of counts recorded by the scaler in time t_G with the sample present)

B : 백그라운드 계수치(background counts : number of counts recorded by the scaler in time t_B without the sample)

$$g = \frac{G}{t_G} : \text{전계수율(gross count rate)}$$

$$b = \frac{B}{t_B} : \text{백그라운드 계수율(background count rate)}$$

$$r = \frac{G}{t_G} - \frac{B}{t_B} = g - b : \text{순계수율(net count rate)}$$

순계수율 r 이 4 가지 독립변수 G , t_G , B 와 t_B 의 함수인 점을 생각하고 오차의 파급을 고려한 오차 계산에 따르면 순계수율의 표준오차, 즉 표준편차는 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$s_r^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial G}\right)^2 s_G^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial t_G}\right)^2 s_{tG}^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial B}\right)^2 s_B^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial t_B}\right)^2 s_{tB}^2$$

전자장비의 시간 측정에서의 오차는 G 와 B 측정에서의 오차에 비해서 실제적으로 매우 적다. 따라서, 특별한 경우가 아니면 s_{tG} 와 s_{tB} 는 0으로 생각한다. 즉, $s_G \gg s_{tG}$ 이고, $s_B \gg s_{tB}$ 이면 윗식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$s_r^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial G}\right)^2 s_G^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial B}\right)^2 s_B^2$$

방사능 계측에 포아송 모델이 적용된다는 점을 생각하면 $s_G = \sqrt{G}$, $s_B = \sqrt{B}$ 이다.

$$s_r = \sqrt{\frac{G}{t_G^2} + \frac{B}{t_B^2}}$$

여기서 중요한 점은 순계수율 계산식에서 독립변수는 g 와 b 가 아니라 G , t_G , B 와 t_B 라는 것이다. 따라서 순계수율에 관련된 오차는 G , t_G , B 와 t_B 로부터 계산된다. 계수기에 기록된 수치는 계수율 g 와 b 가 아니라 계수치 G 와 B 이며, 어떤 계측치의 오차는 계수기에 기록된 수치, 즉 계수치로 계산한다는 점을 명심해야 된다.

[예제 14]) $G = 1000$ counts, $t_G = 2$ min, $B = 500$ counts, $t_B = 10$ min일 경우 순계수율과 표준편차를 구하여라. Ref.3, p.61

[풀이]

$$r = \frac{G}{t_G} - \frac{B}{t_B} = \frac{1000}{2} - \frac{500}{10} = 450 \text{ cpm}$$

$$s_r = \sqrt{\frac{G}{t_G^2} + \frac{B}{t_B^2}} = \sqrt{1000/2^2 + 500/10^2} = 16 \text{ cpm}$$

$$\therefore r = 450 \pm 16 \text{ cpm}$$

그런데, [예제 14]에서 g 와 b 가 각각 G 와 B 의 함수라는 것을 망각하고 $r = g - b$ 식에만 집착하면 다음과 같은 오류를 범할 수 있다.

$$\begin{aligned} s_r &= \sqrt{s_g^2 + s_b^2} = \sqrt{(\sqrt{g})^2 + (\sqrt{b})^2} \\ &= \sqrt{g + b} = \sqrt{1000/2 + 500/10} \\ &= 23 \text{ cpm} \end{aligned}$$

그렇지만, $s_g \neq \sqrt{g}$, $s_b \neq \sqrt{b}$ 라는 점을 알고, 다음과 같이 s_g 와 s_b 의 정의를 정확히 따르면 올바른 값을 얻을 수 있다.

$$g = \frac{G}{t_G}$$

$$b = \frac{B}{t_B}$$

$$\begin{aligned} s_g^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial G}\right)^2 s_G^2 \\ &= \frac{1}{t_G^2} s_G^2 \\ &= \frac{1}{t_G^2} (\sqrt{G})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_b^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial B}\right)^2 s_B^2 \\ &= \frac{1}{t_B^2} s_B^2 \\ &= \frac{1}{t_B^2} (\sqrt{B})^2 \end{aligned}$$

$$s_g = \frac{\sqrt{G}}{t_G} = \frac{\sqrt{1000}}{2}$$

$$s_b = \frac{\sqrt{B}}{t_B} = \frac{\sqrt{500}}{10}$$

$r = g - b$ 에 오차파급 공식 (26)을 적용한다:

$$\begin{aligned} s_r^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial g}\right)^2 s_g^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial b}\right)^2 s_b^2 \\ &= s_g^2 + s_b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_r &= \sqrt{s_g^2 + s_b^2} \\ &= \sqrt{\frac{G}{t_G^2} + \frac{B}{t_B^2}} = \sqrt{1000/2^2 + 500/10^2} = 16 \text{ cpm} \end{aligned}$$

[예제 15] 방사성 시료를 계측하였더니 2 분 동안에 1000 카운트였다. 계측시스템의 백그라운드 계수율은 100 ± 6 cpm으로 알려져 있다. 순계수율과 그 표준편차를 구하여라.

Ref.3, p.62

[풀이]

$$r = \frac{G}{t_G} - b = \frac{1000}{2} - 100 = 400 \text{ cpm}$$

$$s_r^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial G}\right)^2 s_G^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial b}\right)^2 s_b^2$$

$$= \left(\frac{1}{t_G}\right)^2(\sqrt{G})^2 + (-1)^2 s_b^2 = \frac{G}{t_G^2} + s_b^2 = \frac{1000}{4} + 6^2 = 286$$

$$\therefore s_r = \sqrt{286} = 17 \text{ cpm}$$

이 문제에서 b와 s_b는 주었지만 B와 t_B는 주지 않았다. 백그라운드 계수율은 이전에 계측한 것을 사용하고 있다. 분명히 b를 1 분간 계측하여 구하지 않았음을 알 수 있다. 왜냐하면, B = 100이고 t_B = 1 min이라면 다음 계산에 의해서 백그라운드 계수율로 100 ± 10 cpm이라고 주었을 것이다.

$$b = B/t_B = 100 \text{ cpm}$$

$$s_b = \sqrt{B}/t_B = \sqrt{100} / 1 = 10 \text{ cpm}$$

계수율의 합성(combining count rates)

Ref.3, p.62

시료를 n 회 계측하여 전계수치와 백그라운드 계수치로 다음과 같은 결과를 얻었다고 하자.

$$G_1, G_2, G_3, \dots, G_n \quad B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$$

이들과 평균순계수율(average net count rate)과의 관계는 (27)식과 같다.

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{G_i}{t_{G_i}} - \frac{B_i}{t_{B_i}} \right) \dots \dots \dots (27)$$

대부분의 경우, n 회 계측 모두에서 t_{G_i}와 t_{B_i}는 일정하므로, 즉 t_{G_i} = t_G, t_{B_i} = t_B라고 할 수 있으므로 (27)식은 다음 식으로 변환된다.

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{G_i}{t_{G_i}} - \frac{B_i}{t_{B_i}} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{G_t}{t_G} - \frac{B_t}{t_B} \right)$$

여기서, $G_t = \sum_{i=1}^n G_i$, $B_t = \sum_{i=1}^n B_i$ 이다.

(27)식에서 알 수 있듯이 평균순계수율은 G_i 와 B_i 의 함수이고 t_G 와 t_B 는 상수이므로 가감계산에서의 오차 파급을 고려하면 평균순계수율의 표준편차 $s_{\bar{r}}$ 의 계산식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} s_{\bar{r}}^2 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial G_i} \right)^2 s_{G_i}^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial B_i} \right)^2 s_{B_i}^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{t_G^2} s_{G_i}^2 + \frac{1}{t_B^2} s_{B_i}^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{G_i}{t_G^2} + \frac{B_i}{t_B^2} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{G_t}{t_G^2} + \frac{B_t}{t_B^2} \right) \end{aligned}$$

때로는 백그라운드 계수율이 전계수율에 비해서 무시할 정도로 적으므로 이런 경우는 표준편차 $s_{\bar{r}}$ 의 계산식은 다음과 같이 간단해진다.

$$s_{\bar{r}} = \frac{1}{n} \frac{\sqrt{G_t}}{t_G}$$

그러므로, 상대표준편차는 다음과 같다.

$$\frac{s_{\bar{r}}}{\bar{r}} = \frac{(1/n)\sqrt{G_t}/t_G}{G_t/nt_G} = \frac{1}{\sqrt{G_t}}$$

3.5. 합성표준불확도 계산

Ref.7, p.79

방사능 계측 실험은 단순히 계수치나 계수율을 얻는 것으로만 끝나지 않고 이를 통해서 시료의 방사능 농도를 측정하는 것이 보통이다. 따라서, 측정한 방사능 농도의 불확도가 얼마인지를 알아야 할 필요가 자주 있다. 이런 예의 하나로 액체섬광 계수기를 이용해서 물 시료를 계측하여 구한 ^{222}Rn 방사능 농도의 불확도를 계산하는 절차를 소개한다.

3 가지 계측선원으로 라돈 방사능 농도를 알고 있는 물 표준물(random-in-water standard), 블랭크 계수율을 구하기 위한 방사능이 전혀 없는 물, 그리고 라돈 방사능 농도를 측정하려고 하는 물 시료를 각각 5 g 정도씩 준비한다. 각각의 물에 12 g의 섬광제를 혼합한 다음 표준물(standard)-블랭크(blank)-시료(sample)의 순서로 한 사이클을 이루어 6 개 사이클을 계측하여 그 결과를 표 6에 수록하였다. 모든 선원에 대해서 불감시간을 보정한 계측시간 T_0 은 60 분이다. 블랭크 계수율이 전체 계측시간(65 시간) 동안 내내 일정하다고 할 수 없지만, 블랭크를 계측한 값을 같은 사이클에서 표준물과 시료를 계측하는 동안의 블랭크 계수치로 간주한다.

표 6. 물 시료의 방사능 농도 측정관련 계측 데이터

Cycle	Standard		Blank		Sample	
	$t_s(\text{min})$	$C_s(\text{counts})$	$t_b(\text{min})$	$C_b(\text{counts})$	$t_x(\text{min})$	$C_x(\text{counts})$
1	243.74	15380	305.56	4054	367.37	41432
2	984.53	14978	1046.10	3922	1107.66	38706
3	1723.87	14394	1785.43	4200	1846.99	35860
4	2463.17	13254	2524.73	3830	2586.28	32238
5	3217.56	12516	3279.12	3956	3340.68	29640
6	3956.83	11058	4018.38	3980	4079.94	26356

t_s, t_b, t_x : 각각 표준물, 블랭크, 시료를 담은 바이알에 대해서 기준시간 $t = 0$ 에서부터 불감시간을 보정한 계측시간 $T_0 = 60$ 분의 중간점까지의 시간이며, 계산과정에 t_b 는 필요 없지만 보다 분명하게 하려고 나타내었다.

C_s, C_b, C_x : 각각 표준물, 블랭크, 시료를 담은 바이알에 대해서 불감시간을 보정한 계측시간 $T_0 = 60$ 분 동안의 계수치이다.

표준물과 물 시료에 대한 계수치는 (28)과 (29)식으로 표현할 수 있다.

$$C_s = C_b + \varepsilon A_s T_0 m_s \cdot \exp(-\lambda t_s) \quad \dots \dots (28)$$

$$C_x = C_b + \varepsilon A_x T_0 m_x \cdot \exp(-\lambda t_x) \quad \dots \dots (29)$$

ε : 현 상태의 용액 조성에서 ^{222}Rn 에 대한 액체섬광검출기의 효율이며, 방사능 준위와 무관한 것으로 가정한다.

A_s : 기준시간 $t = 0$ 에서 물 표준물의 방사능 농도.

A_x : 기준시간 $t = 0$ 에서 물 시료의 방사능 농도.

m_s : 물 표준물의 무게.

m_x : 물 시료의 무게.

λ : ^{222}Rn 의 붕괴상수, $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2} = 1.25894 \times 10^{-4} \text{ min}^{-1}$,
 $T_{1/2} = 5505.8 \text{ min}$.

(28)과 (29)식에서 알 수 있듯이 표준물과 시료 중의 반감기가 짧은 방사능이 지수함수적으로 붕괴할 뿐 아니라 싸이클에 따라 블랭크 계수치가 조금씩 변하므로 표 6에 수록된 6 개의 C_s 값들이나 C_x 값들로부터 바로 평균을 구해서는 안 된다. 그 대신에 방사능 붕괴와 블랭크를 보정한 계수치로 바꾸거나, 또는 계수치를 $T_0 = 60$ 분으로 나눠서 계수율로 변환한 다음 평균을 구해야 된다. 이 점을 고려하여 (28)과 (29)식으로부터 시료의 방사능 농도를 구하는 (30)식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
A_x &= A_s \frac{m_s}{m_x} \frac{(C_x - C_b) \cdot \exp(\lambda t_x)}{(C_s - C_b) \cdot \exp(\lambda t_s)} \\
&= A_s \frac{m_s}{m_x} \frac{C_x - C_b}{C_s - C_b} \exp[\lambda (t_x - t_s)] \quad \dots \dots (30)
\end{aligned}$$

(30)식에서 $(C_x - C_b) \cdot \exp(\lambda t_x)$ 와 $(C_s - C_b) \cdot \exp(\lambda t_s)$ 는 기준시간 $t = 0$ 에서 그리고 측정시간 $T_0 = 60$ 분에 대해서 각각 블랭크를 보정한 시료와 블랭크를 보정한 표준물의 계수치이다. 블랭크와 방사능 붕괴를 보정한 계수율 R_x 와 R_s 를 각각 (32)와 (33)식으로 표현하면 (30)식은 (31)식으로 간소화된다.

$$A_x = A_s \frac{m_s}{m_x} \frac{R_x}{R_s} \quad \dots \dots (31)$$

$$R_x = [(C_x - C_b)/T_0] \cdot \exp(\lambda t_x) \quad \dots \dots (32)$$

$$R_s = [(C_s - C_b)/T_0] \cdot \exp(\lambda t_s) \quad \dots \dots (33)$$

물 시료의 라돈 방사능 농도 A_x 는 (31)식을 이용해서 계산하며, A_x 의 합성표준 불확도(combined standard uncertainty), 즉 표준편차 s_{Ax} 는 오차과급 공식을 이용해서 구한다. 여기서 우선, 오차과급 공식으로 돌아가 보자. 오차과급 공식 (26)은 확률변수들이 서로 독립적일 때 적용되는 식이며, (26a)식이 보다 일반적인 오차과급 공식이다.

어떤 양 u 가 $u = f(x, y)$ 의 관계식으로 표현되고, x 와 y 가 독립적 관계에 있지 아니하고 이들 사이에 상관관계가 있으면 u 의 합성표준불확도 s_u 를 계산하는 오차과급 공식으로 (26a)식을 사용해야 된다. Ref.7, p.19

$$s_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) s_x \cdot s_y \cdot r(x, y) \quad \dots \dots (26a)$$

$r(x, y)$ 는 x 와 y 의 상관계수(correlation coefficient)이다. x 와 y 가 독립적이면 $r(x,$

$y) = 0$ 이지만, 독립이 아니면 $-1 \leq r(x, y) \leq +1$ 이다. 이를테면, x 와 y 를 측정할 때 같은 기기를 사용하거나 불확도가 매우 큰 같은 표준물을 사용하면 x 와 y 는 상관관계를 갖게 된다.

상관계수 $r(x, y)$ 는 다음과 같이 구한다: 같은 측정 조건에서 n 쌍의 측정값 (x_i, y_i) 를 얻고, 이들로부터 계산된 평균이 \bar{x} 와 \bar{y} 이면, x 와 y 의 공분산(covariance) S_{xy} 는 (34)식으로 정의 된다. 그리고, x 와 y 의 상관계수 $r(x, y)$ 는 공분산 S_{xy} 와 x 의 표준편차 s_x 및 y 의 표준편차 s_y 에 의해 (35)식으로 표현된다. 따라서, S_{xy} , s_x , s_y 를 알면 $r(x, y)$ 를 구할 수 있다. 또한, 평균의 공분산과 표준편차 $s_{\bar{x}\bar{y}}$, $s_{\bar{x}}$, $s_{\bar{y}}$ 를 이용하면 \bar{x} 와 \bar{y} 의 상관계수 $r(\bar{x}, \bar{y})$ 를 얻을 수 있는데, (35)식과 (37)식을 비교해 보면 $r(\bar{x}, \bar{y})$ 는 $r(x, y)$ 와 동일하다는 것을 알 수 있다. Ref.1, p.144, Ref.7, p.22

$$S_{xy} = \frac{1}{(n - 1)} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad \dots \dots \dots (34)$$

$$r(x, y) = \frac{S_{xy}}{s_x s_y} \quad \dots \dots \dots (35)$$

$$s_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{1}{n(n - 1)} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad \dots \dots \dots (36)$$

$$r(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{s_{\bar{x}\bar{y}}}{s_{\bar{x}} s_{\bar{y}}} \quad \dots \dots \dots (37)$$

$$s_{\bar{x}} = s_x/\sqrt{n}, \quad s_{\bar{y}} = s_y/\sqrt{n}$$

이제, 물 시료의 라돈 농도 A_x 와 s_{Ax} 의 계산으로 돌아가자. 6 개 싸이클에 걸쳐 계측하였으므로 (31)식의 R_x 와 R_s 대신 평균계수율 \bar{R}_x 와 \bar{R}_s 를 사용하는 (31a)식으로 A_x 를 계산하며, s_{Ax} 의 계산에는 (26a)식의 정의에 따라 (31a)식을 편미분하여 얻은 (38)식을 이용한다.

$$A_x = A_s \frac{m_s}{m_x} \frac{\bar{R}_x}{\bar{R}_s} \dots \dots \dots (31a)$$

$$s_{A_x}^2 = \left(\frac{\partial A_x}{\partial A_s}\right)^2 s_{A_s}^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial m_s}\right)^2 s_{m_s}^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial m_x}\right)^2 s_{m_x}^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial \bar{R}_x}\right)^2 s_{\bar{R}_x}^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial \bar{R}_s}\right)^2 s_{\bar{R}_s}^2 + 2 \left(\frac{\partial A_x}{\partial \bar{R}_x}\right) \left(\frac{\partial A_x}{\partial \bar{R}_s}\right) s_{\bar{R}_x} s_{\bar{R}_s} \cdot r(\bar{R}_x, \bar{R}_s) \dots \dots \dots (38)$$

이제부터, (31a)식과 (38)식을 이용해서 A_x 와 s_{A_x} 를 계산하는 데 필요한 표 7에 수록된 여러 가지 값들을 먼저 구해 보자.

표 7. 방사능 붕괴와 블랭크를 보정한 계수율의 계산

cycle k	R_x min^{-1}	R_s min^{-1}	$t_x - t_s$ min	$R = R_x/R_s$
1	652.46	194.65	123.63	3.3520
2	666.48	208.58	123.13	3.1953
3	665.80	211.08	123.12	3.1543
4	655.68	214.17	123.11	3.0615
5	651.87	213.92	123.12	3.0473
6	623.31	194.13	123.11	3.2107
	$\bar{R}_x = 652.60$ $s_{\bar{R}_x} = 6.42$ $s_{\bar{R}_x} / \bar{R}_x = 9.8 \times 10^{-3}$	$\bar{R}_s = 206.09$ $s_{\bar{R}_s} = 3.79$ $s_{\bar{R}_s} / \bar{R}_s = 1.84 \times 10^{-2}$		$\bar{R} = 3.170$ $s_{\bar{R}} = 0.046$ $s_{\bar{R}} / \bar{R} = 1.44 \times 10^{-2}$
	$\bar{R}_x / \bar{R}_s = 3.167$ $s_{(\bar{R}_x/\bar{R}_s)} = 0.045$ $s_{(\bar{R}_x/\bar{R}_s)} / (\bar{R}_x / \bar{R}_s) = 1.42 \times 10^{-2}$			
Correlation coefficient, $r(\bar{R}_x, \bar{R}_s) = 0.646$				

우선, R_x 와 R_s 는 (32)식과 (33)식을 이용해서 표 6의 데이터로부터 구한다. 예를 들면, 표 7의 $k=1$ 의 $R_x = 652.46$ 은 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} R_x &= [(C_x - C_b)/T_0] \cdot \exp(\lambda t_x) \\ &= [(41432-4054)/60] \cdot \exp(1.25894 \times 10^{-4} \times 367.37) \\ &= 652.455 \end{aligned}$$

R 의 경우는 $R = R_x/R_s$ 이므로 R_x 와 R_s 로부터 계산할 수도 있으며, $R = [(C_x - C_b)/(C_s - C_b)] \cdot \exp\{\lambda(t_x - t_s)\}$ 을 이용해서 구할 수도 있다. \bar{R}_s , \bar{R}_x , \bar{R} 는 평균이므로 (21)식을 R_s , R_x , R 에 적용하여 각각을 구한다. 그리고, (18)식을 이용해서 R_s , R_x , R 로부터 각각의 표준편차 SR_s , SR_x , SR 을 구한 다음 평균의 표준편차 $s_{\bar{R}_s}$, $s_{\bar{R}_x}$, $s_{\bar{R}}$ 을 다음 식들을 이용해서 계산한다. 예를 들어, (18)식을 이용하면 $SR_x = 15.715$ 이므로 $s_{\bar{R}_x} = 15.715/\sqrt{6} = 6.42$ 이다.

$$s_{\bar{R}_s} = SR_s/\sqrt{n}, \quad s_{\bar{R}_x} = SR_x/\sqrt{n}, \quad s_{\bar{R}} = SR/\sqrt{n}$$

(38)식의 마지막 항에 들어 있는 \bar{R}_x 와 \bar{R}_s 의 상관계수 $r(\bar{R}_x, \bar{R}_s)$ 를 구하는 식으로는 (36a)식과 (37a)식이 적당하다는 것을 (36)과 (37)식으로부터 유추할 수 있다. 물론, 먼저 \bar{R}_x 와 \bar{R}_s 의 공분산 $s_{\bar{R}_x\bar{R}_s}$ 를 구해야 된다.

$$s_{\bar{R}_x\bar{R}_s} = \frac{1}{n(n-1)} \sum (R_x - \bar{R}_x)(R_s - \bar{R}_s) \quad \dots \dots (36a)$$

$$r(R_x, R_s) = r(\bar{R}_x, \bar{R}_s) = \frac{s_{\bar{R}_x\bar{R}_s}}{s_{\bar{R}_x} s_{\bar{R}_s}} \quad \dots \dots (37a)$$

표 8. \overline{R}_x 와 \overline{R}_s 의 공분산 계산표

Cycle, k	R_x	$R_x - \overline{R}_x$	R_s	$R_s - \overline{R}_s$	$(R_x - \overline{R}_x)(R_s - \overline{R}_s)$
1	652.46	- 0.14	194.65	-11.44	1.6016
2	666.48	13.88	208.58	2.49	34.5612
3	665.80	13.20	211.08	4.99	65.8680
4	655.68	3.08	214.17	8.08	24.8864
5	651.87	- 0.73	213.92	7.83	-5.7159
6	623.31	-29.29	194.13	-11.96	350.3084
Σ					471.5097

$$s_{\overline{R}_x \overline{R}_s} = \frac{1}{n(n-1)} \sum (R_x - \overline{R}_x)(R_s - \overline{R}_s)$$

$$= 471.5097/[6(6-1)] = 15.717$$

$$r(\overline{R}_x, \overline{R}_s) = \frac{s_{\overline{R}_x \overline{R}_s}}{s_{\overline{R}_x} s_{\overline{R}_s}}$$

$$= 15.717/(6.42 \times 3.79) = 0.646$$

표 7의 R_x 와 R_s 의 경우 그 값의 변화가 비교적 적기 때문에 이들의 평균의 비 $\overline{R}_x/\overline{R}_s$ 와 이 비의 표준편차 $s_{(\overline{R}_x/\overline{R}_s)}$ 를 보면 이들 각각은 R_x/R_s 를 각 싸이클마다 구한 다음 평균한 \overline{R} 및 표준편차 $s_{\overline{R}}$ 와 매우 비슷하다. 한편, $s_{(\overline{R}_x/\overline{R}_s)}$ 를 계산할 때는 R_x 와 R_s 의 상관관계를 나타내는 상관계수 $r(\overline{R}_x, \overline{R}_s)$ 를 고려하여 다음과 같이 오차파급 공식 (26a)를 이용해서 구한다. 우선 $Q = \overline{R}_x/\overline{R}_s$ 라고 식을 정의하면 $\overline{R}_x/\overline{R}_s$ 의 표준편차는 $s_{(\overline{R}_x/\overline{R}_s)} = s_Q$ 로 표현된다. 따라서, 아래와 같이 $Q = \overline{R}_x/\overline{R}_s$ 를 (26a)식에 따라 편미분한 식의 양변을 $Q^2 = (\overline{R}_x/\overline{R}_s)^2$ 으로 나눈다.

$$Q = \frac{\overline{R}_x}{\overline{R}_s}$$

$$\begin{aligned} s_Q^2 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial \overline{R}_x}\right)^2 s_{\overline{R}_x}^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \overline{R}_s}\right)^2 s_{\overline{R}_s}^2 + 2\left(\frac{\partial Q}{\partial \overline{R}_x}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial \overline{R}_s}\right) s_{\overline{R}_x} s_{\overline{R}_s} \cdot r(\overline{R}_x, \overline{R}_s) \\ &= \left(\frac{1}{\overline{R}_s}\right)^2 s_{\overline{R}_x}^2 + \left(-\frac{\overline{R}_x}{\overline{R}_s^2}\right)^2 s_{\overline{R}_s}^2 - 2\left(\frac{1}{\overline{R}_s}\right)\left(-\frac{\overline{R}_x}{\overline{R}_s^2}\right) s_{\overline{R}_x} s_{\overline{R}_s} \cdot r(\overline{R}_x, \overline{R}_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{s_Q}{Q}\right)^2 &= \left(\frac{s_{\overline{R}_x}}{\overline{R}_x}\right)^2 + \left(\frac{s_{\overline{R}_s}}{\overline{R}_s}\right)^2 - 2\left(\frac{s_{\overline{R}_x}}{\overline{R}_x}\right)\left(\frac{s_{\overline{R}_s}}{\overline{R}_s}\right) \cdot r(\overline{R}_x, \overline{R}_s) \\ &= (9.8 \times 10^{-3})^2 + (1.84 \times 10^{-2})^2 - 2(9.8 \times 10^{-3})(1.84 \times 10^{-2}) \times 0.646 \\ &= 2.016 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_Q^2 &= Q^2 \times 2.016 \times 10^{-4} \\ &= \left(\frac{\overline{R}_x}{\overline{R}_s}\right)^2 \times 2.016 \times 10^{-4} = (3.167)^2 \times 2.016 \times 10^{-4} = 2.022 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$s_Q = s_{(\overline{R}_x/\overline{R}_s)} = \sqrt{2.022 \times 10^{-3}} = 0.045$$

$$\frac{s_{(\overline{R}_x/\overline{R}_s)}}{\overline{R}_x/\overline{R}_s} = \frac{0.045}{3.167} = 1.42 \times 10^{-2}$$

이제, 시료의 라돈 방사능 농도 A_x 를 \overline{R}_x 와 \overline{R}_s , 그리고 아래에 나열한 데이터를 이용해서 (31a)식으로 계산한다. 여기서, s_{A_s} 는 라돈 표준물 구입시 규격서에 명시된 표준편차이며, 무게관련 표준편차에 해당되는 s_{m_s} 와 s_{m_x} 는 무게 측정에서의 불확도 계산 방법으로 구할 수 있다. Ref.8, p.24

$$A_s = 0.1368 \text{ Bq/g}$$

$$s_{A_s} = 0.0018 \text{ Bq/g}; \quad s_{A_s}/A_s = 1.32 \times 10^{-2}$$

$$m_s = 5.0192 \text{ g}$$

$$s_{m_s} = 0.005 \text{ g}; \quad s_{m_s}/m_s = 1.0 \times 10^{-3}$$

$$m_x = 5.0571 \text{ g}$$

$$s_{m_x} = 0.0010 \text{ g}; \quad s_{m_x}/m_x = 2.0 \times 10^{-4}$$

*물론, t_s , t_x , λ 및 $\exp[\lambda(t_x - t_s)]$ 의 불확도, 그리고 선원(표준물, 블랭크, 시료)에 따른 섬광검출기의 검출효율 차이와 관련된 불확도, 검출기의 불감시간 보정관련 불확도와 방사능준위에 따른 계측효율 보정관련 불확도를 생각할 수 있으나 이들은 무시할 수 있을 정도로 적다. 시료 매질에 따른 소광효과 보정에 대한 불확도는 고려하지 않았다.

$$\begin{aligned} A_x &= A_s \frac{m_s}{m_x} \frac{\overline{R}_x}{\overline{R}_s} \\ &= 0.1368 \text{ Bq/g} \times \frac{5.0192 \text{ g}}{5.0571 \text{ g}} \times 3.167 \\ &= 0.4300 \text{ Bq/g} \end{aligned}$$

다음은, 최종 결과로 얻은 0.4300 Bq/g의 라돈 방사능 농도가 가지고 있는 불확도가 얼마인지를 계산할 차례이다. (31a)식을 (38)식에 따라 편미분한 다음 (31a)를 제공한 식으로 양변을 나누면 (39)식을 얻을 수 있다. 좌변은 A_x 의 상대표준편차의 제곱이라는 것을 알 수 있다. 그리고, 바로 앞 페이지에서 $s_{(\overline{R}_x/\overline{R}_s)}$ 의 계산식 유도 부분을 보면 (39)식의 마지막 3 개의 항들은 $\overline{R}_x/\overline{R}_s$ 의 상대표준편차의 제곱에 해당되는 $s_{(\overline{R}_x/\overline{R}_s)}^2/(\overline{R}_x/\overline{R}_s)^2$ 과 같다. 또한, 표 7을 보면 \overline{R} 이 $\overline{R}_x/\overline{R}_s$ 와 정확히 같지 않으며, $\overline{R}_x/\overline{R}_s$ 의 표준편차 $s_{(\overline{R}_x/\overline{R}_s)}$ 도 \overline{R} 의 표준편차 $s_{\overline{R}}$ 과 꼭 같지는 않다는 것도 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{S_{A_x}^2}{A_x^2} &= \frac{S_{A_s}^2}{A_s^2} + \frac{S_{m_s}^2}{m_s^2} + \frac{S_{m_x}^2}{m_x^2} + \frac{s_{\overline{R}_x}^2}{\overline{R}_x^2} \\ &\quad + \frac{s_{\overline{R}_s}^2}{\overline{R}_s^2} - 2 \frac{s_{\overline{R}_x}}{\overline{R}_x} \frac{s_{\overline{R}_s}}{\overline{R}_s} r(\overline{R}_x, \overline{R}_s) \quad \dots \dots (39) \\ &= (1.32 \times 10^{-2})^2 + (1 \times 10^{-3})^2 + (2 \times 10^{-4})^2 + (6.42/652.60)^2 \\ &\quad + (3.79/206.09)^2 - 2 \times (6.42/652.60) \times (3.79/206.09) \times 0.646 \\ &= 3.7656 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\frac{s_{Ax}}{A_x} = \sqrt{3.7656 \times 10^{-4}} = 0.0194$$

$$\begin{aligned} s_{Ax} &= A_x \times 0.0194 \\ &= 0.4300 \text{ Bq/g} \times 0.0194 = 0.0083 \text{ Bq/g} \end{aligned}$$

결과를 종합하면, 물 시료의 라돈 방사능 농도는 $A_x = 0.4300 \text{ Bq/g}$ 이고 합성표준편차는 $s_{Ax} = 0.0083 \text{ Bq/g}$ 이다.

한편, 이처럼 복잡한 \bar{R}_x 와 \bar{R}_s 의 상관관계를 고려하지 않고도 \bar{R} 를 이용하면 (31a)식이 (31b)식으로 변환되므로 이 식을 이용해서 시료의 라돈 방사능 농도 A_x 와 표준편차를 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_x &= A_s \frac{m_s}{m_x} \bar{R} \quad \dots \dots \dots (31b) \\ &= 0.1368 \text{ Bq/g} \times 5.0192 \text{ g} \times 3.170/5.0571 \text{ g} \\ &= 0.4304 \text{ Bq/g} \end{aligned}$$

A_x 에 대한 표준편차 s_{Ax} 를 구하는 식을 유도하기 위해서는 (31b)식을 편미분하므로 계산식이 다음과 같이 간단하다.

$$\begin{aligned} \frac{s_{Ax}^2}{A_x^2} &= \frac{s_{As}^2}{A_s^2} + \frac{s_{ms}^2}{m_s^2} + \frac{s_{mx}^2}{m_x^2} + \frac{s_{\bar{R}}^2}{\bar{R}^2} \\ &= (1.32 \times 10^{-2})^2 + (1 \times 10^{-3})^2 + (2 \times 10^{-4})^2 + (0.046/3.170)^2 \\ &= 3.8585 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\frac{s_{Ax}}{A_x} = \sqrt{3.8585 \times 10^{-4}} = 0.0196$$

$$\begin{aligned}
 s_{Ax} &= A_x \times 0.0196 \\
 &= 0.4300 \text{ Bq/g} \times 0.0196 = 0.0084 \text{ Bq/g}
 \end{aligned}$$

따라서, 물 시료의 라돈 방사능 농도는 $A_x = 0.4304 \text{ Bq/g}$ 이고 합성표준편차는 $s_{Ax} = 0.0084 \text{ Bq/g}$ 이다.

지금까지 설명한 물 시료의 라돈 방사능 농도와 합성표준불확도를 계산하는 두 가지 접근방식 중 후자의 방식을 택하는 것이 바람직하다. 표 7에서, 6 개 싸이클의 R_x 와 R_s 데이터로부터 R_s 에 대한 R_x 의 비를 구하는 방식으로 두 가지를 생각할 수 있으며, 이에 따라 A_x 와 합성표준불확도를 계산하는 방식이 다르다. 전자는 6 개의 R_s 와 R_x 의 각각의 평균 $\overline{R_s}$ 와 $\overline{R_x}$ 를 계산한 다음 $\overline{R_x}/\overline{R_s}$ 를 구하는 방식이고, 후자는 각 싸이클 마다 R_x/R_s 를 구해서 6 개 싸이클에 대한 평균 \overline{R} 를 계산하는 방식으로 개개의 싸이클을 중시함으로써 측정절차를 더 잘 반영하고 있다. 그렇지만, 두 가지 접근방식으로 구한 A_x 값의 차이가 불확도(표준편차) 크기를 감안할 때 매우 적고, 두 방법으로 계산한 합성표준불확도의 차이도 무시할 수 있을 정도이다. 이러한 결과로 보아서 전자의 방법에서도 상관관계를 잘 고려하기만 하면 두 방법의 결과는 거의 같다고 할 수 있다.

4. 계측오차를 줄이는 방법

방사능 계측 오차를 줄이기 위한 첫 조치는 계측시스템을 개선하여 백그라운드를 가능하면 많이 줄이는 일이다. 그런 다음, 오차를 줄일 수 있는 계측방법을 강구하는 것이 차례이다.

4.1. 백그라운드 저감 방법

Ref.3, p.64

백그라운드 때문에 생기는 오차를 최소화하기 위해서 백그라운드를 장시간 측정한다. 즉, t_B 를 길게 한다.

$$s_r = \sqrt{\frac{G}{t_G^2} + \frac{B}{t_B^2}} \approx \sqrt{\frac{G}{t_G^2}}$$

[예제 16] 다음과 같은 계측 데이터를 얻었다고 하자. 순계수율과 상대오차를 구하여라. 시스템의 백그라운드는 일정하다고 한다. 만일 백그라운드를 250 분간 계측할 경우 순계수율과 상대오차를 구하여라.

$$G = 400 \quad t_G = 5 \text{ min}$$

$$B = 100 \quad t_B = 2.5 \text{ min}$$

[풀이] $r = 400/5 - 100/2.5 = 40 \text{ cpm}$

$$s_r = \sqrt{\frac{400}{5^2} + \frac{100}{2.5^2}} = 5.65 \text{ cpm}$$

$$\frac{s_r}{r} = 5.65/40 = 0.14 = 14\%$$

백그라운드를 장시간, 즉 250 분 동안 측정하면 다음과 같이 결과가 개선된다.

$$B = \frac{100}{2.5} \times 250 = 10,000 \text{ counts} \quad t_B = 250 \text{ min}$$

$$r = 400/5 - 10,000/250 = 40 \text{ cpm}$$

$$s_r = \sqrt{\frac{400}{5^2} + \frac{10,000}{250^2}} = \sqrt{16 + 0.16} \approx 4 \text{ cpm}$$

$$\frac{s_r}{r} = 4/40 = 10\%$$

4.2. 최적 계측시간 배정법

Ref.3, p.65

시료와 백그라운드 계측을 위한 시간이 제한되어 있을 때 시료와 백그라운드 계측에 적절히 시간 배분을 함으로써 오차를 줄이는 방법이다. 전계수치와 백그라운드 계수치, 그리고 순계수율의 표준편차 사이에는 다음 관계가 있다.

$$g = G/t_G \quad b = B/t_B \quad \Rightarrow \quad G = gt_G, \quad B = bt_B$$

$$s_r = \sqrt{\frac{G}{t_G^2} + \frac{B}{t_B^2}}$$

$$s_r^2 = \frac{g}{t_G} + \frac{b}{t_B}$$

계측시간을 적절히 배분하여 순계수율의 오차를 최소가 되게 하려면 s_r 가 최소가 되어야 하므로 s_r^2 의 미분식은 다음 조건을 만족해야 된다.

$$d(s_r^2) = -\frac{g}{t_G^2} dt_G - \frac{b}{t_B^2} dt_B = 0$$

$$t_G + t_B = T = \text{constant} \quad \Rightarrow \quad t_B = T - t_G, \quad dt_G = -dt_B$$

$$d(s_r^2) = -\frac{g}{t_G^2} dt_G + \frac{b}{(T-t_G)^2} dt_G = 0$$

따라서, 최종적으로 다음 관계식이 얻어진다.

$$\sqrt{\frac{b}{g}} = \frac{t_B}{t_G}$$

이제, 우선 짧은 시간 동안의 계측을 통해 계수율 g 와 b 를 대략적으로 구하고 계측자가 측정시간 T 를 결정하면 다음 두 식을 이용해서 적절한 계측시간 t_G 와 t_B 를 계산할 수 있다.

$$t_G + t_B = T$$

$$\sqrt{\frac{b}{g}} = \frac{t_B}{t_G}$$

4.3. 정확도 설정과 계측시간

순계수율의 상대표준편차가 설정된 경우

$$\begin{aligned} t_B &= t_G \sqrt{b/g} \\ &= (T - t_B) \sqrt{b/g} \\ &= T \sqrt{b/g} - t_B \sqrt{b/g} \end{aligned}$$

$$t_B(1 + \sqrt{b/g}) = T \sqrt{b/g}$$

$$t_B = T \frac{\sqrt{b/g}}{1 + \sqrt{b/g}} = T \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{g} + \sqrt{b}}$$

따라서, t_G 는 다음과 같다.

$$t_G = T \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g} + \sqrt{b}}$$

이를테면, 순계수율의 상대표준편차가 5%가 되기 위한 총계측시간 T 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{S_r}{r} = \frac{S_r}{g - b} = 0.05$$

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{t_G} + \frac{b}{t_B}}}{g - b} = 0.05$$

$$g/t_G + b/t_B = [0.05(g - b)]^2$$

$$\frac{\sqrt{g} \sqrt{g}}{T \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g} + \sqrt{b}}} + \frac{\sqrt{b} \sqrt{b}}{T \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{g} + \sqrt{b}}} = [0.05(g - b)]^2$$

$$\frac{(\sqrt{g} + \sqrt{b})^2}{T} = [0.05(g - b)]^2$$

$$\therefore T = \frac{(\sqrt{g} + \sqrt{b})^2}{[0.05(g - b)]^2}$$

백그라운드 계수율과 표준편차가 제시된 경우

Ref.3, p.66

백그라운드 계수율이 b 이고, 표준편차가 s_b 인 계측시스템으로 방사성 시료를 계측할 때 순계수율의 정확도(상대표준편차)가 a 퍼센트, 즉 $s_r/r = a\%$ 가 되려면 계측시

간 t_G 를 얼마로 해야 되는지를 알아보자.

순계수율과 그 표준편차는 다음과 같다.

$$r = \frac{G}{t_G} - b \quad s_r = \sqrt{\frac{G}{t_G^2} + s_b^2}$$

따라서, 상대표준편차 s_r/r 이 $a\%$ 가 되려면 다음 관계식이 성립해야 된다.

$$\frac{s_r}{r} = \frac{\sqrt{G/t_G^2 + s_b^2}}{G/t_G - b} = \frac{\sqrt{g/t_G + s_b^2}}{g - b} = \frac{a}{100}$$

여기서 t_G 의 해를 구하면 다음 식이 얻어진다. 따라서, 대략적인 전계수율을 알고 있으면 이 식을 이용해서 t_G 를 결정할 수 있다.

$$t_G = \frac{g}{(g - b)^2 (a/100)^2 - s_b^2}$$

[예제 17] 백그라운드 계수율이 100 ± 2 cpm인 계측시스템으로 시료를 계측할 때 상대표준편차가 1%가 되려면 시료의 계측시간을 얼마로 해야 되나? Ref.3, p.66

[풀이] 먼저 대략적인 전계수율을 측정하기 위해서 시료를 2 분간 계측하여 800 카운트를 얻었다면, 전계수율은 $g = 800/2 = 400$ cpm이므로 필요한 계측시간을 구할 수 있다.

$$t_G = \frac{400}{(400 - 100)^2 (0.01)^2 - 2^2} = 80 \text{ min}$$

실제로 80 분간 계측하면 순계수율 r 의 오차 s_r/r 은 다음과 같이 1%가 될 것이다.

$$s_r = \sqrt{g/t_G + s_b^2} = \sqrt{400/80 + 2^2} = 3$$

$$s_r/r = 3/300 = 0.01 = 1 \%$$

4.4. 방사능 검출한계

Currie는 방사능 검출한계에 관해 비슷한 표현들을 사용하면서도 의미가 완전히 다른 경우가 많음을 지적하고, 시료를 계측한 방사능 준위를 다음과 같이 3 단계로 구분함으로써 최소검출방사능(minimum detectable activity)의 개념을 정리하였다:

Ref.9, p.275, Ref.10

결정한계(decision limit) ; 시료에서 오는 신호인지 아닌지의 구분이 가능한 정도의 신호(계수치) 크기

검출한계(detection limit) ; 시료에서 오는 신호가 검출된다고 확신할 수 있을 정도의 신호 크기

정량한계(determination limit) ; 정밀도를 제시할 수 있는 정량적 계측이 가능한 신호 크기

이들 한계는 계측 통계학만을 바탕으로 정의된 것이며, 다른 우연오차라든지 계통 오차는 고려되지 않았으므로 계측시스템으로 검출할 수 있는 절대적인 방사능 준위로서가 아니라 다만 지침 정도로 이들을 이용하는 것이 좋다.

순계수치의 참값(true net counts) μ_s 가 얼마 이상이면 검출을 확신할 수 있을 정도로 충분히 큰 순계수치 $S(= G - B)$ 를 얻을 수 있는지를 결정하면 최소검출방사능을 정하는 문제가 해결된다. 관찰된 신호 S 가 블랭크가 아닌 시료에서 오는 참신호라는 판단은 신뢰도를 바탕으로 내려야 하는 문제이므로 유의성 검정(test of hypothesis)의 차원에서 취급해야 할 것이다. 그림 6에서 그래프 A는 시료가 없는

($\mu_s = 0$) 블랭크 계수치들의 분포이고, 그래프 B는 순계수치의 참값이 $\mu_s = L_D$ 인 시료를 계측한 순계수치들의 분포이다. x-축은 순계수치 S를 나타낸다.

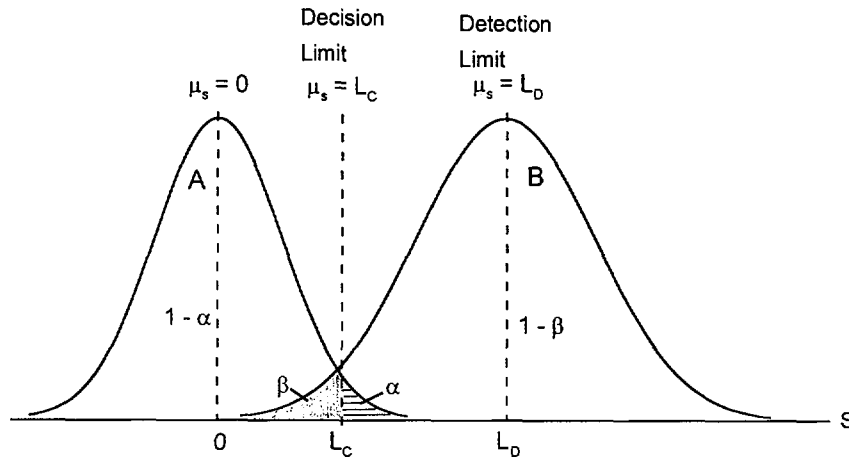


그림 6. 유의성 검정을 바탕으로 하는 결정한계와 검출한계의 정의; μ_s : 순계수치의 참값, α : 제 1 종 과오, β : 제 2 종 과오.

분포 A와 분포 B가 겹치는 구간에서는 블랭크 신호와 시료 신호를 확실하게 구별하기 어렵다. 시료 신호가 없는데도 있다고 판단할 수 있는 확률이 α (제 1 종 과오)이며, 실제로는 시료 신호가 있는데도 없다고 판단할 수 있는 확률이 β (제 2 종 과오)이다. L_C 를 좀더 높게 설정해서 제 1 종 과오를 줄이려고 하면 제 2 종 과오가 커지고, 반대로 L_C 를 좀더 낮게 설정해서 제 2 종 과오를 적게 하려고 들면 제 1 종 과오가 커진다. 따라서, α 와 β 를 적절히 고려하여 판단을 내릴 수밖에 없다.

수학적으로는 L_C 와 L_D 를 각각 (40)식과 (41)식으로 표현할 수 있다. z_α 와 z_β 는 각각 확률(위험율: significance level) α 및 β 에 대응되는 표준화확률변수의 값이며, 표준정규분포표(부록 1)에서 구할 수 있다. s_0 는 $\mu_s = 0$ 인 시료(블랭크), 즉 블랭크 계수치의 표준편차이며, s_D 는 $\mu_s = L_D$ 인 시료 계수치(즉, 시료와 백그라운드)에 해당되는 전계수치)의 표준편차이다.

$$L_C = z_\alpha S_0 \quad \dots \dots (40)$$

$$L_D = L_C + z_\beta S_D \quad \dots \dots (41)$$

일반적으로 α 와 β 가 함께 적어지기를 바라므로 $\alpha = \beta = 0.05$ 로 하는 것이 바람직한 선택일 수 있다. 즉, 없는 시료 신호를 있다고 판단할 확률(α)을 5%, 있는 시료 신호를 없다고 판단할 확률(β)을 5%로 설정하는 것이다. 계수치의 표준편차에 포아송 분포 이론과 오차과급 공식을 적용하고, 계수치가 어느 정도 크면 정규분포를 한다는 가정에서 $\alpha = \beta = 0.05$ 를 가정하면 (40)식과 (41)식은 각각 (42)와 (43)식이 된다.

$$L_C = z \sqrt{2} \sqrt{\mu_B} = 1.645\sqrt{2} \sqrt{B} = 2.33\sqrt{B} \quad \dots \dots (42)$$

$$L_D = z^2 + 2L_C = 2.71 + 4.66\sqrt{B} \quad \dots \dots (43)$$

여기서, L_C 는 $S < L_C$ 이면 시료 신호가 없고, $S > L_C$ 이면 시료 신호가 있다고 판단하는 임계값에 해당되는 순계수치를 의미한다. L_D 는 시료를 계측하여 $S > L_D$ 이면 시료 검출을 확신할 수 있는 그런 수준의 순계수치를 나타낸다. B 는 블랭크 계수치로서 블랭크 계수치의 참값 μ_B 의 추정치이다. z 는 표준화확률변수이며, $z_\alpha = z_\beta = z_{0.05}$ 일 때는 표준정규분포표(부록 1)에서 $z = 1.645$ 이다.

$\alpha = \beta = 0.05$ 의 경우, 시료 신호를 검출하지 못할 확률을 보면, 순계수치가 $S = 0$ 이면 95%, $S = L_C$ 이면 50%, 이처럼 L_C 로부터 L_D 로 순계수치가 커짐에 따라 점점 줄어들어 $S = L_D$ 에서는 5%가 된다. 따라서, $S = L_D$ 이면 시료 신호를 검출할 수 있는 확률이 95%이므로, 흔히 L_D 를 최소검출방사능을 의미하는 신뢰도(confidence level) 95%의 검출한계로 간주한다. 그렇지만, L_D 는 블랭크와 α 및 β 의 값에 따라 달라지므로 최소를 나타내는 어떤 하나의 고유한 값으로 고정되는 것이 아니다. 따라서, L_D 에 최소라는 의미를 부여하는 데는 문제가 없지 않다.

이처럼, 최소검출방사능을 어떻게 정의하건 이것이 시료 신호의 유무를 절대적으로 확실하게 판단해 주지는 못한다. 그런데도 이를 잘못 이해함으로써 데이터를 잘못 처리하는 경우가 있으며, 특히 저준위 방사능 계측이 그런 예에 해당된다. 일련의 데이터의 평균을 구할 때 최소검출방사능보다 낮은 값의 데이터가 있더라도 이것을 버리지 말고 데이터를 모두 이용해서 평균을 구하는 것이 좋다. 양의 값들을 데이터로 간주하는 것처럼 음의 값들(블랭크 이하의 값)도 데이터에 포함시켜야 된다.

한편, L_c 또는 L_D 수준의 신호 검출에 대한 이러한 불확실성 때문에 이들 수준에서는 정량적 측정이 어렵다고 할 수 있다. 그래서, 정량적 측정이 확실한 시료 신호의 수준, 즉 정량한계 L_Q 를 (44)식으로 정의한다. L_Q 는 시료의 순계수치이고, s_Q 는 L_Q 의 표준편차이므로 $1/z_Q$ 는 상대표준편차라고 할 수 있다.

$$L_Q = z_Q s_Q \quad \dots \dots (44)$$

$\alpha = \beta = 0.05$ 이고, $z_Q = 10$ (상대표준편차 10%)의 경우는 (44)식으로부터 (45)식을 유도할 수 있다.

$$L_Q = 50[1 + (1 + B/12.5)^{1/2}] \quad \dots \dots (45)$$

한편, Tsoufanidis가 제시한 검출한계는 다음과 같다: 방사능을 검출할 수 있는 최저 검출수준은 여러 가지 요인과 관계되지만 계측 결과의 최대 허용오차와 관계가 가장 크다. 비록 최대 허용오차 s_r (순계수율의 표준편차)에 대한 일반적인 규칙은 없지만 최대 한계(upper limit)는 $s_r \leq r$ 로 설정되어 있는 셈이므로 보통은 (46)식의 조건을 만족하는 계수율이면 수용할만하다. f 는 실험자가 임의로 결정하는 인자이다.

Ref.3, p.67

$$s_r \leq f \cdot r, \quad f < 1 \quad \dots \dots \dots (46)$$

신뢰할 수 있는 최저계수율, 즉 계수율의 검출한계(minimum detectable count rate)는 다음과 같이 계산한다: 계측시스템의 백그라운드 계수율이 $b \pm s_b$ cpm이고, 시료의 방사능을 t_G 분간 계측한 결과가 G 카운트라면 (46)식은 (47)식으로 변형된다.

$$\sqrt{\frac{G}{t_G^2} + s_b^2} \leq f \cdot r \quad \dots \dots \dots (47)$$

전계수치 G 는 다음 관계가 있으므로 이 식을 (47)식에 대입하여 순계수율 r 에 관해

$$G = (r + b)t_G$$

정리한 다음, 해를 구하면 (48)식을 얻을 수 있다.

$$r \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 4f^2bt_G + 4f^2t_G^2s_b^2}}{2f^2t_G} \quad \dots \dots \dots (48)$$

대부분의 경우 근호 내의 둘째와 세째 항이 1에 비해서 매우 크므로 식을 간소화할 수 있다.

$$\begin{aligned} r &\geq \frac{\sqrt{4f^2bt_G + 4f^2t_G^2s_b^2}}{2f^2t_G} \\ &= \frac{1}{f} \sqrt{\frac{b}{t_G} + s_b^2} \quad \dots \dots \dots (49) \end{aligned}$$

더 나아가서, $b/t_G \ll s_b^2$ 이면 (49)식이 (50)식으로 더욱 간단하게 된다.

$$r \geq \frac{S_b}{f} \dots \dots (50)$$

[예제 18] 백그라운드 계수율이 20 ± 1 cpm인 측정시스템으로 시료를 1 시간 동안 측정하려고 한다. 최대 허용오차를 80%($f = 0.8$)로 설정면 측정 가능한 최소 계수율은 얼마인가? Ref.3, p.68

[풀이]

$$r \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 4(0.8)^2(20)(60) + 4(0.8)^2(60)^2(1)^2}}{2(0.8)^2(60)} = 1.45 \text{ cpm}$$

따라서, 전계수율이 $20 + 1.45 = 21.45$ cpm 이하, 즉 1 시간 동안의 전계수치가 $21.45 \times 60 = 1287$ counts 이하이면 80%의 높은 오차 설정을 고려할 때 시료 측정값은 의미가 없다.

[예제 19] 백그라운드 계수율이 1 ± 0.1 cpm인 측정시스템으로 시료를 1 시간 동안 측정하려고 한다. 최대 허용오차를 10%($f = 0.1$)로 설정하면 측정 가능한 최소 계수율은 얼마인가?

[풀이]

$$r \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 4(0.1)^2(1)(60) + 4(0.1)^2(60)^2(0.1)^2}}{2(0.1)^2(60)} = 2.67 \text{ cpm}$$

따라서, 오차를 10%로 낮게 설정한 점을 고려할 때 $1 + 2.67 = 3.67$ cpm, 즉 $3.67 \times 60 = 220$ counts 이상이면 신뢰도가 높은 시료 측정 결과를 얻을 수 있다.

여기서, Currie가 제시한 (40), (41), (44)식과 Tsoufanidis의 (50)식을 보면 전자의 경우는 순계수치와 계수치의 표준편차의 관계식들인데 반해 후자의 경우는 순계수율과 계수율의 표준편차의 관계식이다. 그렇지만, f 의 크기에 따라 $1/f$ 는 z_α , z_β 또는 z_Q 의 어느 하나와 비슷해 진다는 것을 알 수 있다. 예를 들어, $f = 0.1$ (상대오차 10%)의 Tsoufanidis의 검출한계와 $\alpha = \beta = 0.05$ 일 때 $z_Q = 10$ 의 Currie의 정량한계 L_Q 가 비슷하다.

참고로, 일반 기기분석에서는 농도에 따라 표준편차가 크게 변하지 않는다는 가정에서, 신뢰도 95%일 때 검출한계와 정량한계를 각각 $L_D = 3s_0$, $L_Q = 10s_0$ 로 정의하는 것을 흔히 볼 수 있다. Ref.11, p.119

4.5. 불감시간 보정

Ref.3, p.68

2 개의 입자가 검출기에 연이어 도달해서 2 개의 뚜렷한 펄스를 발생하는 최소 시간 간격을 불감시간(dead time) 또는 계측기의 분해시간(resolving time)이라고 한다. 즉, 불감시간은 입자가 검출기에 부딪친 순간부터 계수기에 펄스로 나타나는 순간까지 걸리는 시간이다. 검출기 단독의 불감시간보다는 계측시스템(counter-preamplifier-amplifier-discriminator-scaler)의 불감시간이 중요하지만, 검출기의 불감시간이 전자장치의 불감시간보다 훨씬 길기 때문에 후자를 무시할 수 있다.

어떤 입자들은 검출기의 불감시간 때문에 펄스로 나타나지 않고 따라서 카운트수로 기록되지 못하게 된다. 앞서 도착한 입자를 신호로 전환시키는데 소요되는 시간 때문에 펄스가 발생되지 못하는 것이다. 이러한 미계수된 입자는 특히 계수율이 높을 경우에 문제가 된다. 따라서, 관찰된 계수율을 검출기의 불감시간 때문에 놓친 카운트수를 고려하여 보정해야 된다.

계측시스템의 불감시간이 τ 이고, 관측된 전계수율이 g 이면, 계측시스템이 계수하지 못한 시간에 대한 분율은 $g\tau$ 이다. 참계수율(true count rate)을 c 라고 하면 미계수된 카운트수는 $cg\tau$ 이므로 다음 (51)식이 성립된다.

$$c = g + cg\tau$$

$$c = \frac{g}{1 - g\tau} \quad \dots \dots (51)$$

[예제 20] 계측시스템의 불감시간이 $200\mu s$ 이고, 전계수율이 $30,000\text{ cpm}$ 으로 계측되었다. 불감시간 때문에 미계수된 카운트수의 분율과 참계수율은 얼마인가?

[풀이]

$$c = \frac{g}{1 - g\tau} = \frac{30,000/60}{1 - (30,000/60)(200 \times 10^{-6})} = 555.5 \text{ counts/s}$$

따라서, 불감시간 때문에 미계수되는 계수치의 분율은 다음과 같다.

$$\frac{555 - 500}{555} = \frac{55}{555} = 10 \%$$

$g\tau = 0.10$ (불감시간에 전계수율을 곱한 값)이 불감시간 때문에 놓친 카운트수의 분율에 해당된다는 것을 [예제 20]을 통해 알 수 있다.

한편, 불감시간은 한 쌍의 선원을 사용해서 측정할 수 있다. 첫째 선원, 둘째 선원, 그리고 첫째와 둘째를 합친 선원의 참전계수율(true gross count rate)을 각각 c_1, c_2, c_{12} 라고 하고, 참백그라운드 계수율(true background count rate)을 c_b 라고 하자. 그리고, 이들에 대응되는 계수율의 관찰값을 각각 g_1, g_2, g_{12}, b 라고 하면 다음 관계식이 성립된다.

$$\begin{aligned}
 (\text{True net count rate})_1 + (\text{True net count rate})_2 &= (\text{True net count rate})_{12} \\
 (c_1 - c_b) + (c_2 - c_b) &= (c_{12} - c_b)
 \end{aligned}$$

이 관계식을 정리하고, (51)식을 이용하면 차례로 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned}
 c_1 + c_2 &= c_{12} + c_b \\
 \frac{g_1}{1 - g_1 \tau} + \frac{g_2}{1 - g_2 \tau} &= \frac{g_{12}}{1 - g_{12} \tau} + \frac{b}{1 - b \tau} \dots \dots \dots (52)
 \end{aligned}$$

$b \tau \ll 1$ 이면 (52)식의 마지막 항은 다음과 같이 간소화된다($b \tau \ll 1$ 이 아니면 계측하기에 앞서 계측시스템에 문제가 있는지 철저히 조사해야 된다).

$$\frac{b}{1 - b \tau} = b$$

불감시간 τ 는 g_1, g_2, g_{12} 및 b 를 측정한 다음 (52)식을 이용해서 계산한다.

그리고, (52)식은 (53)식으로 정리된다. (53)식은 τ 에 관해 2 차 방정식이므로

$$\begin{aligned}
 (g_1 g_2 g_{12} + g_1 g_2 b - g_1 g_{12} b - g_2 g_{12} b) \tau^2 - 2(g_1 g_2 - g_{12} b) \tau \\
 + g_1 + g_2 - g_{12} - b = 0 \dots \dots \dots (53)
 \end{aligned}$$

τ 의 해를 얻을 수 있다. 다음 두 경우에는 (53)식은 더 간단한 식으로 변환된다:

(1) 백그라운드를 무시할 정도인 경우

$$g_1 g_2 g_{12} \tau^2 - 2g_1 g_2 \tau + g_1 + g_2 - g_{12} = 0$$

(2) 계수율들이 $1/(1 - g_i \tau) \approx 1 + g_i \tau$ 인 경우($i = 1, 2, 12$)

$$\tau = \frac{g_1 + g_2 - g_{12} - b}{g_{12}^2 - g_1^2 - g_2^2}$$

불감시간 보정이 필요한 계측 실험에서, 참순계수율(true net count rate)이라고 부르는 순계수율(net count rate)은 (54)식으로 계산할 수 있다.

$$r = c - b = \frac{G/t_G}{1 - (G\tau/t_G)} - b \quad \dots \dots (54)$$

r 의 표준편차 s_r 은 (54)식에 오차과급식을 적용하여 계산한다. 오차의 요인이 다만 전체수치 G 와 백그라운드라면, r 의 표준편차는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$s_r = \sqrt{\frac{1}{(1 - g\tau)^4} \frac{G}{t_G^2} + s_b^2}$$

4.6. 모평균의 신뢰구간

Ref.11, p.42, Ref.9, p.285

일반적으로, 측정을 통해서 모평균이나 모분산(population variance)과 같은 모수(population parameter)를 구할 수 없다. 그러나, 시료를 측정하여 한 벌(set) 또는 여러 벌의 데이터를 얻게 되면 이들 데이터로부터 모수의 추정치를 계산할 수 있으며, 추정치를 이용하여 모수를 포함하는 신뢰구간을 구할 수 있다.

실험 데이터로부터 구한 평균 \bar{x} 를 이용해서 참평균(모평균) μ 를 포함할 것으로 기대되는 구간을 설정하고 이 구간을 μ 의 신뢰구간(confidence interval)이라고 하며, 구간의 끝을 μ 의 신뢰한계(confidence limits)라고 한다. 표준정규곡선에서 이

신뢰구간에 해당하는 면적을 %로 표시하여 μ 의 신뢰도(confidence level)라고 한다. 어떤 측정의 결과보고서를 낼 때 평균 \bar{x} 에 대한 우연오차 크기를 나타내기 위해서 모평균 μ 의 신뢰한계를 제시하는 경우가 자주 있다.

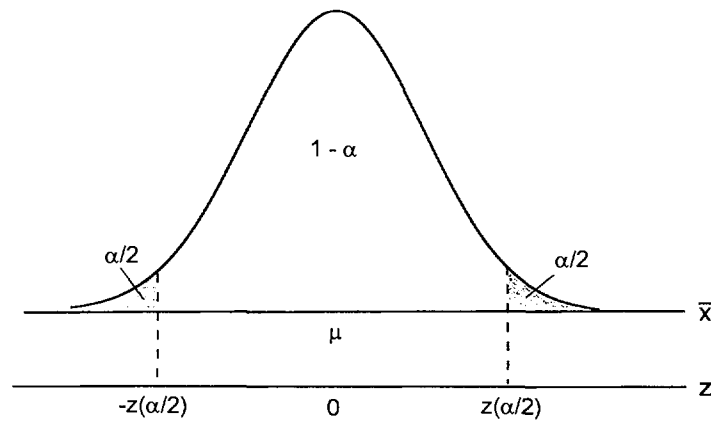


그림 7. 평균 μ , 분산 σ^2/n 의 정규분포 곡선.

$N(\mu, \sigma^2/n)$ 의 정규분포곡선(그림 7)에서 양끝의 면적이 각각 $\alpha/2$ 인, 그래서 중앙 면적이 $1-\alpha$ 인 구간을 “ μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간”이라 부른다. 곡선 밑의 구간의 면적은 참평균을 포함할 수 있는 확률(P)이므로 “ μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간”은 다음 (55)식을 만족한다.

$$P\left(\bar{x} - z(\alpha/2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z(\alpha/2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad \dots \dots (55)$$

이 식에서 $z(\alpha/2)$ 는 표준정규분포곡선에서 오른쪽 끝부분의 면적이 $\alpha/2$ 가 되는 z 값이다(그림 7). 예를 들어 $\alpha = 0.02$ 이면 $z(\alpha/2) = z(0.01) = 2.326$ 이다(부록 1, 표준정규분포표에서 오른쪽 끝부분 면적이 0.01, 즉 1%인 z 값). 표준정규분포의 대칭

성에 의해 왼쪽 끝부분의 면적이 $\alpha/2$ 가 되는 점은 $-z(\alpha/2)$ 이다.

따라서, 모집단이 정규분포이고 σ^2 이 알려져 있으면 “ μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간”은 (55)식을 만족해야 하므로 다음의 (56)식으로 표현 된다.

$$\underbrace{\bar{x} - z(\alpha/2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{신뢰하한}}} < \mu < \underbrace{\bar{x} + z(\alpha/2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{신뢰상한}}} \quad \dots \dots \dots (56)$$

$$\mu \text{의 신뢰한계} : \bar{x} \pm z(\alpha/2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

예를 들어, “ μ 의 95% 신뢰구간”을 구하려면, $z(0.05/2)$, 즉 $z(0.025)$ 는 표준정규분포 표에서 1.960이므로 이 값을 (56)식에 대입하여 μ 의 신뢰구간과 신뢰한계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu \text{의 95\% 신뢰구간} : \bar{x} - 1.960 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.960 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \text{의 95\% 신뢰한계} : \bar{x} \pm 1.960 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

[예제 21] 어떤 선원을 과거에 25 회 반복 계측하여 얻은 결과로부터 표준편차가 4.5 counts임을 알았다. 며칠 후 같은 방법으로 이 선원을 3 회 반복 계측하였더니 평균계수치와 표준편차가 각각 205 counts와 4.7 counts이었다. 이 경우 95% 신뢰한계를 구하여라.

[풀이]

95% 신뢰한계이므로 $\alpha = 0.05$, 따라서 $z(0.05/2) = z(0.025) = 1.960$,

$$\bar{x} = 205 \text{ counts}, \quad \sigma = 4.5 \text{ counts}, \quad n = 3$$

$$\begin{aligned} \text{모평균의 95\% 신뢰한계} &: \bar{x} \pm z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n} \\ &= 205 \pm (1.960 \times 4.5/\sqrt{3}) \\ &= 205 \pm 5.09 \text{ counts} \end{aligned}$$

$$\text{모평균의 95\% 신뢰구간} : 199.9 < \mu < 210.1 \text{ counts}$$

[예제 21]에서 3 회 계측의 표준편차 4.7을 사용하지 않고, 이보다는 25 회 계측으로 구한 표준편차(s)가 모표준편차(σ)에 더 가까울 것으로 판단해서 4.5를 사용했다.

실제 측정에서는 일반적으로 σ^2 을 모르고, 또 측정횟수가 많지 않은 결과들로부터 표준편차 s를 얻게 된다. 이런 경우 모평균의 신뢰구간은 σ 의 추정치 s와 t-분포를 이용하여 나타낸다.

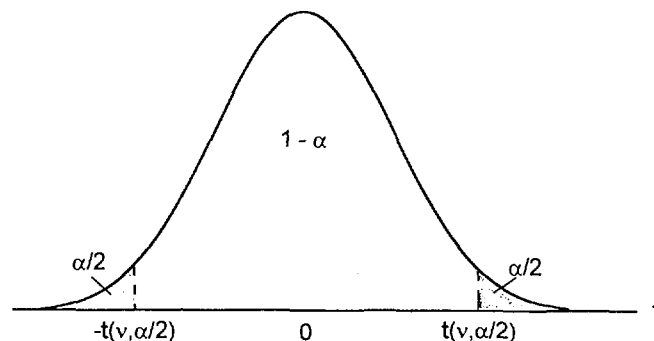


그림 8. 자유도 $\nu = n - 1$ 의 t-분포에서 왼쪽끝과 오른쪽끝의 면적이 각각 $\alpha/2$ 되게 하는 t의 값.

t-분포곡선 밑의 면적은 확률이므로 “ μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간”은 다음 (57)식의 관계를 만족한다. 여기서, $t(\nu, \alpha/2)$ 는 자유도 ν 의 t-분포곡선(그림 8)에서 오른쪽 끝부분의 면적이 $\alpha/2$ 가 되게 하는 점이며, $-t(\nu, \alpha/2)$ 는 왼쪽 끝부분의 면적

$$P\left(\bar{x} - t(\nu, \alpha/2) \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t(\nu, \alpha/2) \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad \dots \dots (57)$$

이 $\alpha/2$ 가 되게 하는 점이다. 따라서, 모집단이 정규분포이면서 σ^2 를 모를 때의 “ μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간”은 (57)식을 만족해야 되므로 (58)식으로 나타낼 수 있다.

$$\bar{x} - t(\nu, \alpha/2) \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t(\nu, \alpha/2) \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \dots \dots (58)$$

$$\mu \text{의 신뢰한계} : \bar{x} \pm t(\nu, \alpha/2) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

[예제 22] “예제 10”의 계측 결과에 대해서 모평균의 95%와 99% 신뢰한계를 구하여라.

[풀이]

$$\bar{x} = 206 \text{ counts}, \quad s/\sqrt{n} = \sqrt{206/10} = 4.5 \text{ counts}, \quad n = 10$$

$$\begin{aligned} - 95\% \text{ 신뢰한계} : & \bar{x} \pm t(\nu, \alpha/2) \times s/\sqrt{n} \\ & = 206 \pm t(9, 0.05/2) \times 4.5 && \leftarrow \text{부록 2, t-분포표} \\ & = 206 \pm 2.26 \times 4.5 \\ & = 206 \pm 10.2 \text{ counts} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - 99\% \text{ 신뢰한계} &: \bar{x} \pm t(\nu, \alpha/2) \times s/\sqrt{n} \\
 &= 206 \pm t(9, 0.01/2) \times 4.5 && \leftarrow \text{부록 2, t-분포표} \\
 &= 206 \pm 3.25 \times 4.5 \\
 &= 206 \pm 14.6 \text{ counts}
 \end{aligned}$$

때로는 같은 방법으로 측정한 데이터가 여러 벌일 경우 각 데이터 집합으로부터 표준편차를 계산하고, 다시 이들 여러 개의 표준편차를 통합하여 보다 모편준편차에 가까운 통합표준편차(pooled standard deviation) s_p 를 (59)식을 이용해서 구할 수 있다. 같은 방법으로 측정하여 얻은 어떤 데이터의 평균에 대한 모평균의 신뢰구간을 구할 때 이 통합표준편차를 이용하면 보다 확실한 신뢰구간을 얻을 수 있다.

Ref.11, p.31

표준편차	측정횟수	자유도
S_1	n_1	$\nu_1 = n_1 - 1$
S_2	n_2	$\nu_2 = n_2 - 1$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
S_k	n_k	$\nu_k = n_k - 1$

$$\text{표준편차 : } s_p = \sqrt{\frac{\nu_1 S_1^2 + \nu_2 S_2^2 + \dots + \nu_k S_k^2}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k}} \dots \dots \dots (59)$$

$$\text{자유도 : } \nu_p = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k$$

[예제 23] 같은 방법으로 측정한 5 별의 결과들로부터 계산한 표준편차들을 측정횟수(n) 및 자유도(ν)와 함께 다음 표에 수록하였다. 통합표준편차를 계산하여라.

Trial	s	n	ν
1	0.171	7	6
2	0.205	5	4
3	0.185	7	6
4	0.222	4	3
5	0.180	5	4

[풀이]

$$\text{자유도 : } \nu_p = 6 + 4 + 6 + 3 + 4 = 23$$

$$\begin{aligned} \text{표준편차 : } s_p &= \sqrt{(\nu_1 s_1^2 + \nu_2 s_2^2 + \dots + \nu_k s_k^2) / (\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k)} \\ &= \{[6 \times (0.171)^2 + 4 \times (0.205)^2 + 6 \times (0.185)^2 + 3 \times (0.222)^2 \\ &\quad + 4 \times (0.180)^2] \div (6 + 4 + 6 + 3 + 4)\}^{1/2} \\ &= 0.190 \end{aligned}$$

쌍을 이루고 있는 여러 별의 측정값이 있을 경우 각 쌍의 차이로부터 표준편차를 계산할 수 있다. 같은 모집단에서 하루에 시료를 한 개씩 취해서 2 회씩 측정하는 실험을 여러 날에 걸쳐서 행하는 경우는 물론이고, 방사능 농도가 크게 다르지 않은 여러 개의 비슷한 모집단들로부터 취한 각각의 시료에 대해서 2 회씩 측정하는 경우에도 적용된다.

Ref.11, p.29, Ref.9, p.287

$$s_p = \sqrt{\sum d^2 / 2k}$$

k : 쌍의 수, 자유도 : $\nu = k$

d : 쌍을 이룬 측정값 간의 차이

[예제 24] 어떤 선원을 하루에 2 회씩 계측하여 첫 번 계측치 x_f 와 둘째 번 계측치 x_s 를 얻는다. 이와 같은 방법으로 7 일에 걸쳐 계측하여 다음 표와 같이 7 쌍의 계측치들이 모아졌다. 표준편차를 계산하여라. 그리고, 어느 날 같은 방법으로 계측하여 계측치로 151과 148를 얻었다. 모평균의 95% 신뢰구간을 계산하여라.

$x_f(\text{counts})$: 147 151 150 149 153 149 149
 $x_s(\text{counts})$: 150 149 151 149 148 151 150

[풀이]

x_f	x_s	$ d $	d^2
147	150	3	9
151	149	2	4
150	151	1	1
149	149	0	0
153	148	5	25
149	151	2	4
149	150	1	1
Σ			44

자유도 : $\nu = k = 7$

표준편차 : $s_p = \sqrt{\Sigma d^2 / 2k} = \sqrt{44 / (2 \times 7)} = 1.77 \text{ counts}$

평균 : $\bar{x} = (151 + 148) / 2 = 149.5 \text{ counts}$

모평균의 95% 신뢰구간 :

$$149.5 - t(7, 0.05/2) \frac{1.77}{\sqrt{2}} < \mu < 149.5 + t(7, 0.05/2) \frac{1.77}{\sqrt{2}}$$

$$149.5 - 2.36 \times 1.25 < \mu < 149.5 + 2.36 \times 1.25$$

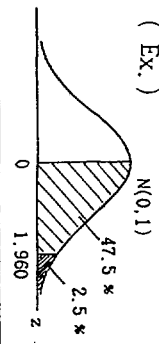
$$146.6 < \mu < 152.5 \text{ counts}$$

참 고 문 헌

1. 최종석 외, "통계학 개론", 정익사, 1994.
2. 한국공업표준협회, "통계적 방법, I 권".
3. N. Tsoufanidis, "Measurement and Detection of Radiation", Hemisphere Pub. Co., New York, 1983.
4. S. L. Meyer, "Data Analysis for Scientists and Engineers", John Wiley & Sons, New York, 1975.
5. G. F. Knoll, "Radiation Detection and Measurement", John Wiley & Sons, New York, 1979.
6. W. R. Leo, "Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments; A How-to Approach", 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1994.
7. "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", ISO, 1993.
8. "Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement", CITAC/16/97, Eurachem, 1995.
9. "A Handbook of Radioactivity Measurements Procedures", NCRP Report No.58, 1978.
10. L. A. Currie, Anal. Chem., 40, 586(1968).
11. 서무열, 김원호, 손세철, 이창현, 조기수, 한선호, "분석화학에서 이용하는 통계적방법", 한국원자력연구소 보고서 KAERI/TR-843/97, 1997.

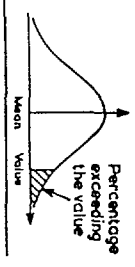
NEXT PAGE(S)
left BLANK

(Ex.)

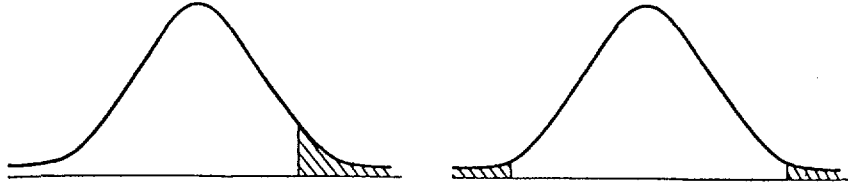


부록 1. 표준정규분포표 (Table of Standard Normal Distribution)
 [standardized value, $z = (x - \mu) / \sigma$]

Standardized value, z	% exceeding the value, 100 P	Standardized value	% exceeding the value	Standardized value	% exceeding the value	Standardized value	% exceeding the value	Standardized value	% exceeding the value	Standardized value	% exceeding the value	Standardized value	% exceeding the value
0.000	50.0	0.842	20.0	1.645	5.0	2.054	2.00	2.575	0.50	2.877	0.200	3.287	0.050
0.025	49.0	0.860	19.5	1.655	4.9	2.064	1.95	2.582	0.49	2.885	0.195	3.317	0.045
0.050	48.0	0.878	19.0	1.664	4.8	2.075	1.90	2.589	0.48	2.893	0.190	3.349	0.040
0.075	47.0	0.896	18.5	1.675	4.7	2.086	1.85	2.597	0.47	2.901	0.185	3.385	0.035
0.101	46.0	0.915	18.0	1.685	4.6	2.097	1.80	2.604	0.46	2.910	0.180	3.427	0.030
0.126	45.0	0.935	17.5	1.695	4.5	2.108	1.75	2.612	0.45	2.919	0.175	3.476	0.025
0.151	44.0	0.954	17.0	1.706	4.4	2.120	1.70	2.619	0.44	2.928	0.170	3.534	0.020
0.176	43.0	0.974	16.5	1.717	4.3	2.132	1.65	2.627	0.43	2.937	0.165	3.607	0.015
0.202	42.0	0.994	16.0	1.728	4.2	2.144	1.60	2.635	0.42	2.946	0.160	3.707	0.010
0.228	41.0	1.015	15.5	1.739	4.1	2.157	1.55	2.643	0.41	2.956	0.155	3.769	0.005
0.253	40.0	1.036	15.0	1.751	4.0	2.170	1.50	2.652	0.40	2.966	0.150		
0.279	39.0	1.058	14.5	1.762	3.9	2.183	1.45	2.660	0.39	2.977	0.145		
0.305	38.0	1.080	14.0	1.774	3.8	2.197	1.40	2.669	0.38	2.987	0.140		
0.332	37.0	1.103	13.5	1.786	3.7	2.211	1.35	2.678	0.37	2.998	0.135		
0.358	36.0	1.126	13.0	1.799	3.6	2.226	1.30	2.687	0.36	3.010	0.130		
0.385	35.0	1.150	12.5	1.812	3.5	2.241	1.25	2.696	0.35	3.022	0.125		
0.412	34.0	1.175	12.0	1.825	3.4	2.257	1.20	2.706	0.34	3.034	0.120		
0.440	33.0	1.200	11.5	1.838	3.3	2.273	1.15	2.716	0.33	3.047	0.115		
0.468	32.0	1.226	11.0	1.852	3.2	2.290	1.10	2.726	0.32	3.060	0.110		
0.496	31.0	1.254	10.5	1.866	3.1	2.308	1.05	2.736	0.31	3.074	0.105		
0.524	30.0	1.282	10.0	1.881	3.0	2.326	1.00	2.747	0.30	3.089	0.100		
0.553	29.0	1.311	9.5	1.896	2.9	2.345	0.95	2.758	0.29	3.104	0.095		
0.583	28.0	1.341	9.0	1.911	2.8	2.365	0.90	2.770	0.28	3.120	0.090		
0.613	27.0	1.372	8.5	1.927	2.7	2.386	0.85	2.781	0.27	3.136	0.085		
0.643	26.0	1.405	8.0	1.943	2.6	2.409	0.80	2.794	0.26	3.154	0.080		
0.674	25.0	1.439	7.5	1.960	2.5	2.432	0.75	2.806	0.25	3.172	0.075		
0.706	24.0	1.476	7.0	1.977	2.4	2.457	0.70	2.819	0.24	3.192	0.070		
0.739	23.0	1.514	6.5	1.995	2.3	2.483	0.65	2.833	0.23	3.214	0.065		
0.772	22.0	1.555	6.0	2.014	2.2	2.512	0.60	2.847	0.22	3.237	0.060		
0.806	21.0	1.598	5.5	2.033	2.1	2.542	0.55	2.862	0.21	3.261	0.055		



부록 2. t-분포표(Critical Values of Student's Distribution)



The shaded areas in the figures correspond to the column headings of the table.

Single-sided test				
DF	p			
	0.005	0.01	0.05	0.1
1	63.7	31.8	6.31	3.08
2	9.92	6.96	2.92	1.89
3	5.84	4.54	2.35	1.64
4	4.60	3.75	2.13	1.53
5	4.03	3.36	2.01	1.48
6	3.71	3.14	1.94	1.44
7	3.50	3.00	1.89	1.42
8	3.36	2.90	1.86	1.40
9	3.25	2.82	1.83	1.38
10	3.17	2.76	1.81	1.37
11	3.11	2.72	1.80	1.36
12	3.05	2.68	1.78	1.36
13	3.01	2.65	1.77	1.35
14	2.98	2.62	1.76	1.34
15	2.95	2.60	1.75	1.34
16	2.92	2.58	1.75	1.34
17	2.90	2.57	1.74	1.33
18	2.88	2.55	1.73	1.33
19	2.86	2.54	1.73	1.33
20	2.85	2.53	1.72	1.32
21	2.83	2.52	1.72	1.32
22	2.82	2.51	1.72	1.32
23	2.81	2.50	1.71	1.32
24	2.80	2.49	1.71	1.32
25	2.79	2.48	1.71	1.32
26	2.78	2.48	1.71	1.32
27	2.77	2.47	1.70	1.31
28	2.76	2.47	1.70	1.31
29	2.76	2.46	1.70	1.31
30	2.75	2.46	1.70	1.31
40	2.70	2.42	1.68	1.30
60	2.66	2.39	1.67	1.30
120	2.62	2.36	1.66	1.29
∞	2.58	2.33	1.64	1.28

Double-sided test				
DF	p			
	0.005	0.01	0.05	0.1
1	127	63.7	12.7	6.31
2	14.1	9.92	4.30	2.92
3	7.45	5.84	3.18	2.35
4	5.60	4.60	2.78	2.13
5	4.77	4.03	2.57	2.01
6	4.32	3.71	2.45	1.94
7	4.03	3.50	2.36	1.89
8	3.83	3.36	2.31	1.86
9	3.69	3.25	2.26	1.83
10	3.58	3.17	2.23	1.81
11	3.50	3.11	2.20	1.80
12	3.43	3.05	2.18	1.78
13	3.37	3.01	2.16	1.77
14	3.33	2.98	2.14	1.76
15	3.29	2.95	2.13	1.75
16	3.25	2.92	2.12	1.75
17	3.22	2.90	2.11	1.74
18	3.20	2.88	2.10	1.73
19	3.17	2.86	2.09	1.73
20	3.15	2.85	2.09	1.72
21	3.14	2.83	2.08	1.72
22	3.12	2.82	2.07	1.72
23	3.10	2.81	2.07	1.71
24	3.09	2.80	2.06	1.71
25	3.08	2.79	2.06	1.71
26	3.07	2.78	2.06	1.71
27	3.06	2.77	2.05	1.70
28	3.05	2.76	2.05	1.70
29	3.04	2.76	2.05	1.70
30	3.03	2.75	2.04	1.70
40	2.97	2.70	2.02	1.68
60	2.91	2.66	2.00	1.67
120	2.86	2.62	1.98	1.66
∞	2.81	2.58	1.96	1.64

서 지 정 보 양 식

수행기관보고서번호	위탁기관보고서번호	표준보고서번호	INIS 주제코드
KAERI/TR-1378/99			
제목 / 부제	방사능 계측 통계학		
주저자 및 부서명	서 무 열; 원자력화학연구팀		
공동저자 및 부서명	지 광 용, 박 경 균, 박 영 재, 김 원 호; 원자력화학연구팀		
출 판 지	발행기관	한국원자력연구소	발행년
			1999
페 이 지	88 p.	도 표	있음(o), 없음()
			크 기
			30 cm.
참고사항			
비밀여부	공개(o), 대외비(), — 급비밀	보고서종류	기술보고서
연구위탁기관		계약번호	
초록 (15-20줄내외)	<p>방사능 계측 실험을 계획하고 계측 결과를 평가하는 데 필요한 통계적 방법들을 기술하였다. 확률분포 모델을 이용해서 계측의 정밀도를 추정하고 계측시스템의 안정성을 평가하는 방법, 계수치가 바탕이 되는 계산 결과의 불확도를 구하는 방법, 그리고 계측 오차를 줄이는 데 필요한 통계적 방법들을 중점적으로 기술하였다.</p>		
주제명키워드 (10단어내외)	계측 통계학, 확률분포, 포아송 분포, 계측 오차, 오차 파급, 합성표준불확도, 검출한계, 불감시간,		

BIBLIOGRAPHIC INFORMATION SHEET							
Performing Org. Report No.		Sponsoring Org. Report No.		Standard Report No.		INIS Subject Code	
KAERI/TR-1378/99							
Title / Subtitle		Radiation Counting Statistics					
Main Author and Department		M. Y. Suh; Nuclear Chemistry Research Team					
Co-author and Department		K. Y. Jee, K. K. Park, Y. J. Park, W. H. Kim; Nuclear Chemistry Research Team					
Publication Place		Publisher		KAERI		Publication Date	
						1999	
Page		Ill. & Tab.		Yes(o), No ()		Size	
88 p.						30 cm.	
Note							
Classified		Open(o), Restricted(), ___ Class Document		Report Type		Technical report	
Sponsoring Org.				Contract No.			
Abstract (15-20 Lines)		<p>This report is intended to describe the statistical methods necessary to design and conduct radiation counting experiments and evaluate the data from the experiments. The methods are described for the evaluation of the stability of a counting system and the estimation of the precision of counting data by application of probability distribution models. The methods for the determination of the uncertainty of the results calculated from the number of counts, as well as various statistical methods for the reduction of counting error are also described.</p>					
Subject Keywords (About 10 words)		counting statistics, probability distribution, Poisson distribution, counting error, error propagation, uncertainty, dead time, detection limit					