

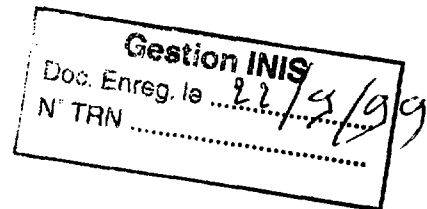


FR9903429

**Institut
de Physique
Nucléaire
de Lyon**

Université Claude Bernard

IN2P3 - CNRS



LYCEN 9961
Juillet 1999

Rapport de Stage de DEA

**« Dynamique d'un monopole magnétique
dans la matière »**

David FAYOLLE

43, Boulevard du 11 Novembre 1918 - 69622 VILLEURBANNE Cedex - France

31-04

R



FR9903429

Ecole doctorale des sciences fondamentales de Clermont-Ferrand

Diplôme d'études approfondies

Physique option Physique Nucléaire et des Particules

RAPPORT DE STAGE

David Fayolle

d.fayolle@ipnl.in2p3.fr

Dynamique d'un Monopole Magnétique dans la Matière

Maître de stage : Xavier Artru, IPNL, groupe Théorie

x.артру@ipnl.in2p3.fr

Année 1998-1999

Université Blaise Pascal Clermont 2

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Xavier Artru pour son aide, sa disponibilité et son enthousiasme qui m'ont guidé tout au long du stage.

Merci aussi à Jean-François Mathiot qui m'a aidé à trouver ce stage, au groupe de physique théorique de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon pour m'avoir accueilli, à Maurice Kibler pour avoir bien voulu m'aider dans ma préparation pour la soutenance orale, et à A. De Rujula pour son aide bibliographique précieuse.

Résumé

Nous étudions la dynamique d'un monopole magnétique de Dirac lent ($v/c \sim 10^{-4}$) dans la matière.

Tout d'abord nous montrons que la force qui s'exerce sur un monopole au niveau macroscopique est $\mathbf{F} = g(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D})$, comme si le monopole ne devait traverser ni les boucles de courant ni les dipôles électriques microscopiques. Nous interprétons ce résultat en terme d'interaction monopole-atome adiabatique.

Ensuite nous généralisons les équations de Maxwell macroscopiques dans la matière "symétrique duale" contenant des monopoles et des dyons, et nous en déduisons certaines propriétés comme la vitesse de la lumière, le comportement sous C, P, T , et nous généralisons le tenseur énergie-impulsion.

Ces équations s'appliquent aussi lorsque les nucléons ou les électrons possèdent un moment électrique dipolaire et nous proposons deux méthodes expérimentales de mise en évidence de ce moment électrique dipolaire par ses effets de polarisation macroscopique.

Abstract

We study the dynamic of a slow ($v/c \sim 10^{-4}$) Dirac magnetic monopole in mater.

Firstly, we show at macroscopic scale that the force exerted on a monopole is $\mathbf{F} = g(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D})$, as if the monopole was not allowed to cross neither microscopic current loops nor microscopic electric dipoles. We interpret this result in term of adiabatic monopole-atom interactions.

Secondly, we generalize the macroscopic Maxwell's equations in "dual symmetric" mater which contains monopoles and dyons, from which we deduce several properties such as the velocity of light, the behavior on C, P and T transformations, and we generalize the energy-momentum tensor.

These equations also apply when nucleons or electrons possess an electric dipole moment and we propose two experimental methods for detecting this electric dipole moment via its macroscopic polarization effects.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 3 |
| 2 | Le Monopole Magnétique | 4 |
| 2.1 | La théorie de Dirac | 4 |
| 2.1.1 | Symétrisation des équations de Maxwell | 4 |
| 2.1.2 | La corde de Dirac | 5 |
| 2.1.3 | Recouvrement de Wu-Yang | 7 |
| 2.1.4 | La condition de quantification de Dirac | 8 |
| 2.2 | Les monopoles non abéliens | 9 |
| 2.2.1 | Théorie de jauge non brisée | 10 |
| 2.2.2 | Brisure spontanée de symétrie | 12 |
| 3 | La Dynamique d'un Monopole Magnétique dans la Matière | 14 |
| 3.1 | Du macroscopique | 15 |
| 3.1.1 | Force magnétique | 15 |
| 3.1.2 | Force électrique | 17 |
| 3.2 | ... au microscopique | 20 |
| 3.2.1 | Equation de Pauli | 21 |
| 3.2.2 | Considérations semi-classiques | 21 |
| 3.3 | Généralisation des équations de Maxwell | 22 |
| 3.3.1 | Retour aux propriétés macroscopiques dans la matière ordinaire | 22 |
| 3.3.2 | Généralisation avec des charges magnétiques: la matière symétrique duale | 25 |
| 3.3.3 | Polarisation créée par des dyons | 26 |
| 3.3.4 | Particules avec moment dipolaire électrique | 28 |
| 3.3.5 | Quadri-potentiel vecteur | 29 |
| 3.3.6 | Vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans la matière symétrique duale | 29 |
| 3.3.7 | Invariance sous CPT | 31 |
| 3.4 | Condition de quantification pour les dyons | 31 |
| 3.5 | Tenseur énergie-impulsion dans la matière symétrique duale | 32 |
| 4 | Moment Dipolaire Electrique | 36 |
| 4.1 | Méthodes de détection | 36 |
| 4.2 | Conception d'un détecteur et ordre de grandeur du signal | 37 |
| 5 | Conclusion | 40 |

| | |
|---|-----------|
| A Minimisation de la densité d'énergie | 41 |
| Bibliographie | 43 |

Chapitre 1

Introduction

Depuis que P. Dirac [1][2] a montré l'existence théorique des monopoles magnétiques en 1931, il n'y a toujours pas de preuve expérimentale de leur existence, malgré la fausse alerte de l'expérience de Cabrera [3] en 1981. Cependant, la recherche des monopoles [4] reprend de l'intérêt à chaque fois qu'une nouvelle région en énergie est atteinte en physique des hautes énergies ou qu'une nouvelle source de matière devient disponible (roches lunaires, ...).

De plus, ces monopoles, qui n'étaient qu'optionnels avec Dirac, sont devenus inévitables dans certaines théories de jauge, notamment les théories de grande unification [5][6] où ils seraient extrêmement massifs, et leur absence aurait des répercussions sur notre compréhension de l'univers primordial et de la physique subatomique.

C'est pourquoi dans une première partie, nous nous attachons à comprendre ce qu'est un monopole.

Dans une deuxième partie, nous pénétrons au coeur de notre travail personnel de recherche: *la dynamique d'un monopole magnétique dans la matière*, en cherchant plus précisément quels sont les champs macroscopiques (B ou H ?, E ou D ?) qui agissent effectivement sur les monopoles et si la matière peut piéger un monopole. Nous généralisons ensuite les équations de Maxwell dans la matière au cas où des paires monopole-antimonopole ou dyon-antidyon présentes dans la matière pourraient se polariser et donner des courants et des distributions induits de charges magnétiques, analogues aux courants et charges électriques induits de la matière ordinaire.

Dans une troisième partie, nous montrons que ces équations s'appliquent également au cas de moments électriques dipolaires permis par le modèle standard, et nous étudions la possibilité de mesurer le moment électrique dipolaire des particules par leur effet de polarisation macroscopique dans la matière.

Chapitre 2

Le Monopole Magnétique

2.1 La théorie de Dirac

2.1.1 Symétrisation des équations de Maxwell

L'électromagnétisme classique est décrit par les équations de Maxwell¹

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho & \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

qui peuvent être mises sous forme covariante [7]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu \quad (2.2)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.3)$$

où $j^\nu = (\rho, \mathbf{j})$, $F^{0i} = E^i$, $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k$,
avec la conservation du courant

$$\partial_\mu j^\mu \equiv \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

Le tenseur du champ électromagnétique² est défini par

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

où $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ est le potentiel quadrivecteur et son dual³ est

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (2.4)$$

Dans le vide, les équations de Maxwell (2.2) et (2.3) sont symétriques sous transformation de *dualité*

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} \rightarrow -F^{\mu\nu}$$

1. En unités naturelles rationalisées, $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = 1$

2. La métrique est $\eta^{\mu\nu} = \{- + + +\}$, soit $\partial_0 \equiv \partial_t \equiv -\partial^0$ et $\partial_i \equiv \partial^i$

3. $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ est une permutation paire de } (0123) \\ -1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ est une permutation impaire de } (0123) \\ 0 & \text{si au moins 2 indices sont égaux} \end{cases}$

et $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$

ce qui correspond à $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$.

L'existence de charges électriques, $j^\mu \neq 0$ avec $\partial_\mu j^\mu = 0$, détruit cette invariance.

Mais si on introduit un quadrivecteur courant magnétique $k^\mu = (\sigma, \mathbf{k})$, on restaure l'invariance par dualité avec

$$j^\mu \rightarrow k^\mu, \quad k^\mu \rightarrow -j^\mu$$

et les équations de Maxwell s'écrivent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu \quad (2.5)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = -k^\nu \quad (2.6)$$

où (F, \tilde{F}) , (\mathbf{E}, \mathbf{B}) et (\mathbf{j}, \mathbf{k}) sont des tenseur et vecteurs duaux sous une rotation de 90° dans le plan (\mathbf{j}, \mathbf{k}) .

L'introduction du courant magnétique k^μ avec $\partial_\mu k^\mu = 0$ suggère l'existence de charges magnétiques g_i , appelées *monopoles magnétiques*, telles que

$$k^\mu(x) = \sum_i g_i \int dx_i^\mu \delta^4(x - x_i) \quad (2.7)$$

mais comme e est quantifié, on pourrait ainsi penser que g soit quantifié (cf. § 2.1.4).

On voit donc que le concept de charge magnétique répond à un désir de symétrie des lois de l'électromagnétisme.

2.1.2 La corde de Dirac

La présence de charges magnétiques conduit d'après (2.5) et (2.6) aux équations vectorielles suivantes

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho & & \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} = -\mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \sigma & & \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Il n'est donc plus possible de trouver un potentiel vecteur dont le rotationnel soit le champ magnétique à cause de la divergence non nulle de \mathbf{B} .

Par contre, on peut définir \mathbf{A} tel que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ partout sauf sur une ligne s'étendant de l'infini au monopole, la "corde de Dirac". En effet, si on prend un solénoïde infiniment long et fin placé le long de l'axe z négatif avec son pôle "nord" (de force $+g$) à l'origine, son champ magnétique est

$$\mathbf{B}_{sol} = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} + g\theta(-z)\delta(x)\delta(y)\hat{\mathbf{z}} \equiv \mathbf{B} + \mathbf{h} \quad (2.9)$$

où \mathbf{B} est le champ magnétique du monopole et où le second terme de (2.9), \mathbf{h} , est le champ singulier le long du solénoïde.

Considérons une surface fermée S quelconque enveloppant le monopole. On a

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = g \quad (2.10)$$

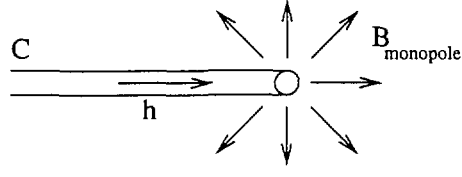


FIG. 2.1 – Champ du solénoïde $\mathbf{B}_{sol} = \mathbf{B}_{monopole} + \mathbf{h}(C)$.

et pour la même surface S , on a

$$\int_S \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S} = -g \quad (2.11)$$

donc le flux de \mathbf{B}_{sol} à travers S (plus généralement, à travers une surface fermée quelconque) est nul, $\nabla \cdot \mathbf{B}_{sol} = 0$, et on peut écrire $\mathbf{B}_{sol} = \nabla \times \mathbf{A}$,

On peut prendre pour le potentiel vecteur \mathbf{A} du solénoïde la forme suivante

$$\mathbf{A} = \frac{g}{4\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\phi} \quad (2.12)$$

qui est singulier sur l'axe z négatif⁴ ($\hat{\phi}$ est un vecteur unitaire azimuthal).

L'équation (2.9) montre que le champ du monopole peut être représenté par un potentiel vecteur et une corde, ce que l'on peut réécrire [8]

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{h}(C, \mathbf{r}) \quad (2.13)$$

où $\mathbf{h}(C, \mathbf{r})$ est un champ fictif à l'intérieur de la corde de Dirac qui décrit une courbe C allant de l'infini à l'origine, avec un flux de force g

$$\mathbf{h}(C, \mathbf{r}) = g \int_C d\mathbf{x} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \quad (2.14)$$

Or la position de la corde (ici choisie rectiligne et suivant l'axe z) est totalement arbitraire, alors que les observables physiques ne doivent justement pas dépendre de cette position.

Nous allons montrer comment une nouvelle position de la corde change \mathbf{A} sans changer \mathbf{B} .

Rappelons que \mathbf{A} n'est pas unique. Sous une transformation de jauge $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi$, le terme $\nabla \times \mathbf{A}$ de (2.13) reste inchangé.

Considérons une autre corde C' , non nécessairement rectiligne, et le chemin fermé⁵ $\Gamma = C' - C$.

Soit $\Omega(\mathbf{r})$ l'angle solide du cône reliant \mathbf{r} à une surface bordée par Γ .

Introduisons la transformation de jauge suivante (non définie sur Γ)

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{g}{4\pi} \nabla\Omega \quad (2.15)$$

Sauf sur C et C' , nous avons : $\mathbf{B} = g\hat{\mathbf{r}}/4\pi r^2 = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'$.

4. Il existe d'autres choix de \mathbf{A} comme celui de la corde de Schwinger, qui n'a pas d'extrémité et où $\mathbf{A} = -g\hat{\phi}(4\pi r)^{-1} \cot \theta$

5. On suppose pour simplifier que C et C' proviennent du même point à l'infini.

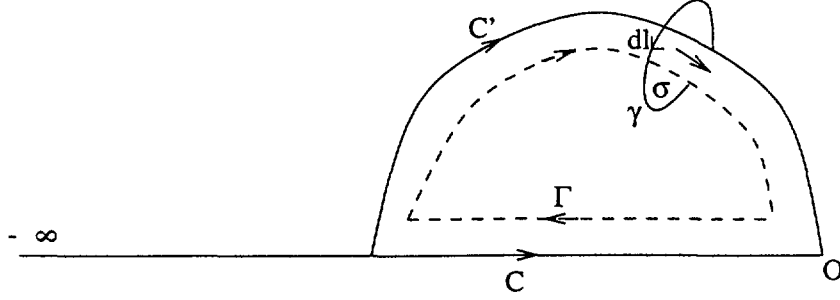


FIG. 2.2 – 2 cordes C et C' provenant de $-\infty$ et délimitant un contour Γ .

Le flux de $\nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A})$ à travers un petite disque σ limitée par un cercle γ , traversée par Γ est

$$\int_{\sigma} \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) \cdot d\sigma = \oint_{\gamma} (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{g}{4\pi} \oint_{\gamma} \nabla \Omega \cdot d\mathbf{l} = \frac{g}{4\pi} \oint_{\gamma} d\Omega = g \quad (2.16)$$

ceci étant valable pour σ arbitrairement petit, on déduit

$$\nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = \mathbf{h}(\Gamma, \mathbf{r}) = \mathbf{h}(C', \mathbf{r}) - \mathbf{h}(C, \mathbf{r}) \quad (2.17)$$

où $\mathbf{h}(\Gamma, \mathbf{r})$ et $\mathbf{h}(C', \mathbf{r})$ sont définis de manière analogue à (2.14).

En conclusion

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{h}(C, \mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}' - \mathbf{h}(C', \mathbf{r}) \quad (2.18)$$

et \mathbf{A}' est continu sur $\Gamma \cap C$ tandis que \mathbf{A} est continu sur $\Gamma \cap C'$.

Néanmoins, cette description du champ du monopole présente des inconvénients, \mathbf{A} est toujours singulier et on est obligé d'introduire un champ fictif dans la corde (bien que grâce à la transformation de jauge (2.15), la position arbitraire de la corde ne représente plus une situation physique).

C'est pour remédier à ces difficultés que Wu et Yang ont proposé une autre formulation que la corde.

2.1.3 Recouvrement de Wu-Yang

Si on considère 2 régions de l'espace, la région supérieure où $0 \leq \theta \leq \pi/2 + \varepsilon$, $0 \leq \phi < 2\pi$ et la région inférieure où $\pi/2 - \varepsilon \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, dont l'union représente tout l'espace, alors on peut définir un potentiel vecteur pour chacune d'elles [9], respectivement \mathbf{A} et \mathbf{A}' pour les régions supérieure et inférieure.

$$\mathbf{A} = \frac{g}{4\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\phi} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{A}' = \frac{-g}{4\pi r} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\phi} \quad (2.20)$$

De cette façon, aucun potentiel n'est singulier dans son hémisphère respectif, car la corde correspondante repose à l'extérieur de celui-ci.

On peut vérifier que dans la région de recouvrement les deux potentiels ne diffèrent que d'une jauge

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}' = \nabla \chi \quad (2.21)$$

où

$$\chi = \frac{2g}{4\pi} \phi \quad (2.22)$$

On obtient ainsi une description sans champ fictif ni singularité de \mathbf{A} le long d'une corde. Mais en pratique on utilise la description de Dirac car le fait de toujours devoir changer de jauge suivant la région de l'espace où l'on se trouve n'est pas économique.

2.1.4 La condition de quantification de Dirac

D'un point de vue quantique⁶, Dirac a montré que l'existence d'un monopole impose la relation

$$\frac{qg}{4\pi} = \frac{1}{2}n, \quad n \text{ entier} \quad (2.23)$$

Cette condition implique la quantification de la charge, c.-à-d. que la charge électrique q devient un multiple entier de $2\pi/g$, et inversement. D'où la valeur de la charge magnétique élémentaire

$$g = \frac{4\pi}{2e} = \frac{e}{2\alpha} \simeq \frac{137}{2}e \quad (2.24)$$

où $\alpha = e^2/4\pi$ est la constante de structure fine.

On peut retrouver la condition de quantification de Dirac à travers diverses méthodes.

- **par le moment angulaire**

A partir du mouvement d'une particule chargée dans le champ d'un monopole $m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$, on peut calculer le taux de variation du moment angulaire orbital $d/dt(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = d/dt(qg\hat{\mathbf{r}}/4\pi)$, qui permet de définir un moment angulaire total conservé

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} - \frac{qg}{4\pi}\hat{\mathbf{r}} \quad (2.25)$$

où le second terme de (2.25) peut être interprété comme le moment angulaire du champ électromagnétique $\mathbf{J}_{em} = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = qg\hat{\mathbf{r}}/4\pi$.

Or les valeurs propres de \mathbf{J} doivent être entières ou demi-entières et celles de $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$ sont entières⁷, ce qui implique

$$\frac{qg}{4\pi} = \frac{1}{2}n, \quad n \text{ entier}$$

qui est la condition de quantification de Dirac (2.23).

6. On se place en unités naturelles: $\hbar = 1$ et $c = 1$

7. Ce sont les valeurs de $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ qui sont quantifiées, mais en plaçant la corde et l'électron sur l'axe de quantification z , alors $\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{P}$

- par transformation de jauge

Avec le changement de jauge (2.21), la fonction d'onde se transforme comme

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(-iq\chi) \psi = \exp(-iq \cdot \frac{2g}{4\pi} \phi) \psi \quad (2.26)$$

Or le facteur de phase ψ'/ψ doit être monovalué, donc

$$qg = 2\pi n \quad , n \text{ entier}$$

qui est la condition de quantification de Dirac (2.23).

- par effet Aharanov-Bohm

On remplace le filament de l'expérience de Aharanov-Bohm par la corde de Dirac d'un monopole magnétique.

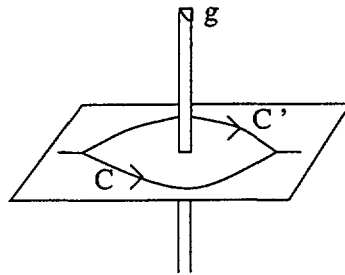


FIG. 2.3 – *Expérience Aharanov-Bohm avec une corde de Dirac.*

La différence de phase entre les chemins C et C' vaut

$$\Delta\varphi = e \oint_{C-C'} \mathbf{A}_{sol} \cdot d\mathbf{x} = e \int_S \mathbf{B}_{sol} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.27)$$

où $\mathbf{B}_{sol} = g\theta(-z)\delta(x)\delta(y)\hat{\mathbf{z}}$ dans la région de la corde.

La corde étant par construction inobservable $\Delta\varphi$ doit être un multiple entier de 2π , et on obtient

$$e \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = eg = 2\pi n$$

qui est la condition de quantification de Dirac (2.23).

2.2 Les monopoles non abéliens

Dans la théorie du monopole de Dirac (le monopole est supposé ponctuel), on ne s'est pas intéressé à sa structure interne. Dans les théories non-abéliennes il existe des monopoles étendus. La description de ces monopoles va se faire en deux étapes.

Dans un premier temps, on ne s'occupe toujours pas du coeur du monopole et on considère juste que celui-ci est entouré de champs de jauge non-abéliens sans masses⁸ (théories de jauge non brisée). Cela va nous conduire à la définition de la charge topologique.

8. Bien que ces champs n'existent pas asymptotiquement, cette situation est applicable aux monopoles magnétiques colorés dans la région située entre le coeur (10^{-28} cm) et la distance de confinement (10^{-13} cm).

Dans un second temps, en se plaçant dans le cadre de la brisure spontanée de symétrie, le coeur du monopole acquiert des champs non-abéliens massifs et on pourra vérifier à quelles conditions la structure découverte précédemment à large distance peut être prolongée à courte distance sans rencontrer de singularités.

2.2.1 Théorie de jauge non brisée

• Classification dynamique

L'analyse précédente des monopoles abéliens (de Dirac) peut être étendue pour des théories de jauge non abéliennes, c'est la classification dynamique (GNO) des monopoles [10].

Dans une jauge adéquate, le tenseur du champ électromagnétique se réduit à $F_{\theta\phi} = \partial_\theta A_\phi$. Si on résout les équations de Yang-Mills sans sources $\partial_\mu \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} F^{\mu\nu} + [A_\mu, \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} F^{\mu\nu}] = 0$, on trouve comme solution générale pour $\mu = \theta$,

$$A_\phi = \frac{Q}{4\pi} (1 - \cos \theta) \quad (2.28)$$

où Q est une fonction arbitraire de ϕ à valeur matricielle, et pour $\mu = \phi$,

$$-\partial_\phi Q = 0 \quad (2.29)$$

donc Q est constant.

A une transformation de jauge près, le champ du monopole est construit en multipliant le champ du monopole abélien par une matrice constante. Le potentiel (2.28) est une généralisation de (2.12) et est singulier sur une corde.

$$\mathbf{A}_{GNO} = Q \mathbf{A}_D \quad (2.30)$$

Les potentiels avec une corde pointant vers le pôle sud et vers le pôle nord sont respectivement

$$A_\phi = \frac{Q}{4\pi} (1 - \cos \theta) \quad (2.31)$$

et

$$A'_\phi = -\frac{Q}{4\pi} (1 + \cos \theta) \quad (2.32)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{A}' sont transformés l'un de l'autre par la transformation de jauge

$$\Lambda = \exp(2Q\phi) \quad (2.33)$$

qui est monovaluée si

$$\exp(4\pi Q) = 1 \quad (2.34)$$

Ceci est la condition de quantification du monopole non-abélien (dans le cas abélien, $\mathbf{A} \rightarrow -ie\mathbf{A}$ donc $Q \rightarrow -ieg$ et (2.34) devient la condition de quantification de Dirac (2.23)).

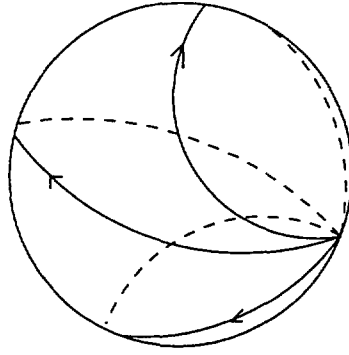


FIG. 2.4 – Boucles fermées provenant du même point s'enroulant autour de la sphère.

• Classification topologique

On va montrer que les monopoles apparaissent comme des singularités topologiques du champ de jauge.

On considère toujours des champs de jauge sans masse entourant une "boîte noire", mais qui ne sont plus solution d'équations dynamiques.

Soit une famille de boucles fermées $\{C_t\}$ indicées par un paramètre continu $t \in [0, 2\pi]$ et enveloppant une surface fermée Σ entourant la boîte noire.

On définit une application de l'ensemble des boucles fermées de \mathbb{R}^3 dans un groupe de jauge H ($C_t \rightarrow h(t) \in H$, $h(t)$ décrit une courbe fermée Γ dans H). Si on essaye de déformer continuellement la surface Σ jusqu'à un point mais que Γ dans H ne se contracte pas en un point, c'est qu'il y a quelque chose à l'intérieur de la surface Σ qui obstrue la contraction. Ce sera quelque chose d'inhérent à la structure topologique du champ de jauge : une charge topologique [11].

Les valeurs que cette charge peut prendre sont labellées par les différentes classes de boucles Γ (ou chemins) dans H qui ne peuvent pas être continuellement déformées l'une dans l'autre : ce sont des classes d'homotopie, labellées par un nombre d'enroulement.

Ces classes sont englobées dans une structure de groupe puisque la composition de 2 chemins peut être définie comme un nouveau chemin qui les parcourt à la suite. Ce groupe est appelé $\pi_1(H)$, le premier groupe d'homotopie de H , dont les valeurs définissent la charge topologique qui est invariante de jauge.

Pour chaque élément de π_1 , il y a une charge magnétique.

Un point de vue équivalent est le suivant: si on prend les potentiels de jauge non-singuliers (2.31) et (2.32) définis sur la sphère dans un groupe de Lie arbitraire H et la transformation de jauge monovaluée (2.33), alors $\Lambda(\phi)$ décrit une boucle dans le groupe de jauge H (une application du cercle en H) et la charge magnétique contenue dans la sphère est le nombre de fois que $\Lambda(\phi)$ s'enroule autour du groupe H quand ϕ varie de 0 à 2π . Or ce nombre d'enroulements est une constante indépendante du rayon de la sphère, donc la charge g est contenue dans une sphère arbitrairement petite: le monopole est un point singulier (monopole de Dirac). Telle est la situation dans le cas d'un groupe de jauge non brisé. Cependant, nous verrons plus loin que cette classification topologique peut également produire un coeur dans lequel des champs de jauge autres que les champs de jauge H sont excités (monopole non singulier dans le cas d'un groupe brisé spontanément).

On peut montrer qu'il n'existe qu'un monopole GNO stable pour chaque classe topologique (les autres champs de monopole GNO se désintègrent par émission de radiation non-abélienne, alors que la charge topologique qui est conservée ne peut pas être éliminée de cette façon).

- **Exemple de $SO(3)$**

Un élément de $SO(3)$ peut être représenté par un point de la 3-sphère, mais 2 points antipodaux correspondent au même élément du groupe.

Considérons un chemin de la 3-sphère qui commence en un point et qui termine en un point antipodal. Son image dans le groupe de jauge est un chemin fermé qui ne peut pas être continuellement déformé en un point. Un tel chemin a un nombre d'enroulement de 1.

Cependant, un chemin qui commence et finit au même point de la 3-sphère peut être continuellement déformé dans le groupe de jauge en un point et a un nombre d'enroulement de 0.

Ainsi la charge magnétique dans une théorie de jauge $SO(3)$ est 0 ou 1 ($\pi_1[SO(3)] = Z_2$). Un monopole est indistinguable d'un antimonopole, il existe un seul type de charge magnétique.

2.2.2 Brisure spontanée de symétrie

Nous allons maintenant montrer comment des monopoles peuvent apparaître dans des théories de jauge qui n'en contiennent pas au départ.

- **Soliton**

On suppose que l'on se place dans le cadre d'une théorie non-abélienne dans laquelle un groupe G est brisé par le mécanisme de Higgs et où $\pi_1(G)$ est trivial (sans monopoles de Dirac).

Si on cherche des solutions d'énergie finie indépendantes du temps autre que la solution du vide, on trouve qu'il en existe dites "solitons", qui ressemble à un monopole à grande distance [12].

Ces solutions existent si le groupe de jauge semi-simple G est brisé spontanément en un sous-groupe H qui contient un facteur $U(1)$.

En effet, à chaque configuration de champ d'énergie finie on associe une application de la sphère S^2 à l'infini dans la sphère des minima du potentiel $V(\Phi)$ (qui est équivalente aux variétés du vide de G/H). On a une configuration en hérisson.

On peut montrer que la classification topologique des transformations de S^2 dans G/H est équivalente à la classification topologique des boucles dans H (c.-à-d. $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$) où $\pi_2(G/H)$ est le second groupe d'homotopie de G/H .

Comme les éléments du groupe $\pi_1(H)$ spécifient les charges magnétiques possibles, alors la charge topologique d'un soliton coïncide avec sa charge magnétique.

Par analogie avec la méthode utilisée dans le §2.2.1, on peut voir les choses comme suit: on rétrécit la surface Σ autour du monopole vers un point et on regarde si l'on rencontre une singularité. Cependant, à l'intérieur de la "boîte noire", on trouve maintenant les champs de jauge de G et non plus seulement de H , et une boucle s'enroulant autour de H peut en fait se dérouler dans G . De cette façon, une boucle homotopiquement non triviale dans H peut l'être dans G (un noeud topologique se défait dans un espace supérieur). On a alors une charge topologique non triviale à l'infini sans singularité à l'origine.

• Exemple de $SU(5)$

T'Hooft [5] a travaillé initialement sur le groupe $SO(3)$, mais il est plus intéressant de regarder les monopoles qui apparaissent dans les théories de grande unification dont le modèle $SU(5)$ est le plus simple représentant: l'échelle de masse de l'unification est $v_1 \sim 10^{15}$ GeV et l'échelle de masse de la brisure de symétrie électrofaible est $v_2 \sim 250$ GeV.

$$G = SU(5) \xrightarrow{v_1} H_1 = \{SU(3)_c \times [SU(2) \times U(1)]_{ew}\} / Z_6 \quad (2.35)$$

$$\xrightarrow{v_2} H_2 = [SU(3)_c \times U(1)_{em}] / Z_3 \quad (2.36)$$

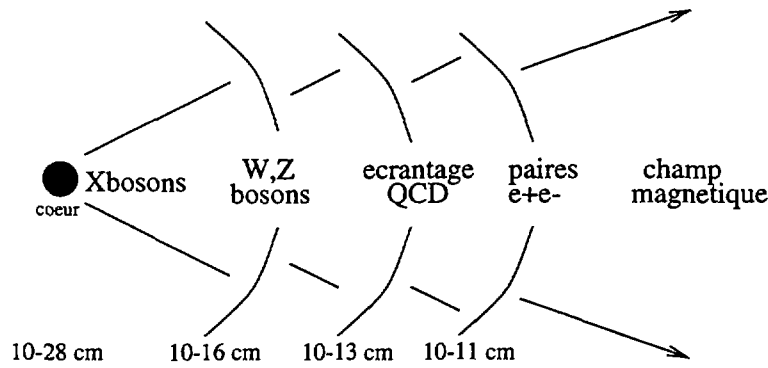


FIG. 2.5 – Structure d'un monopole grand unifié: bien que la masse soit concentrée dans le coeur de rayon M_X^{-1} , à différentes échelles de longueur, plusieurs structures voient le jour. Les bosons virtuels W et Z ont des effets importants sur son interaction avec les autres particules, puis l'interaction forte écran le champ magnétique coloré, enfin un nuage virtuel de paires e^+e^- entoure le monopole avant de laisser apparaître le champ long distance.

On montre qu'il existe pour la brisure v_1 un monopole magnétique avec la charge magnétique de Dirac $g = 1/2e$, mais aussi avec une charge magnétique colorée dans Z_3 et une charge magnétique $SU(2)$ dans Z_2 .

Par ailleurs, la structure du monopole $SU(5)$ n'est pas beaucoup affectée par la brisure de symétrie électrofaible car la charge magnétique portée par le monopole n'est pas changée par cette brisure.

Chapitre 3

La Dynamique d'un Monopole Magnétique dans la Matière

Soit un solénoïde dans le vide. Les lignes du champ \mathbf{B} créé par les spires se referment. Si un monopole suit ces lignes de champ, il va induire une force contre-électromotrice par spire $f = -d\phi/dt$. Le travail fourni par les générateurs est $\int -if dt = i\phi$ pour garder le courant dans les spires constant, et est identique au travail fourni par le champ extérieur sur le monopole, donc le bilan énergétique est correct.

Si maintenant on introduit de la matière ferromagnétique à l'intérieur du solénoïde, le champ \mathbf{B} va être changé d'un facteur de perméabilité magnétique μ ($\mathbf{B} \rightarrow \mu\mathbf{B}$), alors que le flux du monopole ne change pas ($\nabla \cdot \mathbf{B}_m = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)$), donc la f.c.e.m., donc le travail fourni par les générateurs reste inchangés. Par contre si c'est le champ \mathbf{B} qui agit, le travail de la force qui s'exerce sur le monopole devient $\mu i\phi$.

Si tel était le cas, le monopole pourrait gagner plus d'énergie à chaque passage que celle fournit par les générateurs et on aurait une source d'énergie infinie! Il se passe donc quelque chose dans la matière, ce n'est pas \mathbf{B} qui agit, mais $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, ce que nous allons nous attacher à démontrer dans les paragraphes suivants. Ce travail nous amènera également à généraliser les équations de Maxwell dans le cas d'un milieu contenant des charges magnétiques.

Par la suite on ne considérera que le cas d'un monopole magnétique lent ($v < 10^{-3}$) car les modèles théoriques du comportement de monopoles superlourds dans les champs magnétiques galactiques et dans le système solaire suggèrent des vitesses $10^{-4} < v < 10^{-3}$ et dans tous les cas supérieures à la vitesse d'échappement de la surface terrestre ($v \sim 3 \cdot 10^{-5}$). De plus l'étude des mécanismes d'interaction d'un monopole magnétique lent avec la matière est importante pour la conception et l'interprétation d'expériences de détection de monopoles piégés dans la matière.

La masse du monopole étant supposée très supérieure à celle des électrons et des noyaux de la matière, on peut assimiler la trajectoire du monopole à une ligne droite et traiter une collision électron-monopole comme l'interaction de l'électron avec un champ électromagnétique variable et classique.

3.1 Du macroscopique ...

En premier lieu, on peut estimer une limite grossière sur la masse maximale d'un monopole pour qu'il reste piégé dans la matière.

Sans s'intéresser au mécanisme de piégeage en lui-même, une fois capturé, le monopole va ressentir une force $\mathbf{F} = g\mathbf{H}$ (comme nous le verrons dans le paragraphe suivant) qui va combattre la force de gravité ma où a est l'accélération de la pesanteur. On doit donc avoir $|\mathbf{F}| > m|a|$, c.-à-d.

$$m < gH/a = 137eH/2a \quad (3.1)$$

La valeur de H dans un aimant permanent peut atteindre typiquement 10^4 Gauss, c.-à-d. $300 \cdot 10^4$ V/cm, et $a = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$\Rightarrow m < \frac{137}{2} \frac{1}{9.81 \cdot 10^2} 300 \cdot 10^4 \frac{\text{eV}}{\text{cm}^2} \cdot \text{s}^2$$

en utilisant $1 \text{ s} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm}$, on trouve en première approximation une limite pour la masse du monopole pour qu'il soit piégeable:

$$m < 2 \cdot 10^{26} \text{ eV} = 2 \cdot 10^{17} \text{ GeV} \quad (3.2)$$

Ce qui n'est pas incompatible avec les valeurs de la masse du monopole prédites par les théories grand unifiées ($m \sim 10^{16} \text{ GeV}$), donc il n'est pas absurde de parler du piégeage d'un monopole.

3.1.1 Force magnétique

Dans cette section, nous allons montrer que la force qui s'exerce sur un monopole dans un milieu magnétique est bien $\mathbf{F} = g\mathbf{H}$, comme le prévoit la conservation de l'énergie, et non pas $\mathbf{F} = g\mathbf{B}$.

• Dans la matière aimantée solide

On considère un cylindre de matière aimantée à l'intérieur d'un solénoïde, traversé dans la longueur par un monopole (fig 3.1).

Un milieu aimanté peut être représenté par du vide plus des boucles de courants d'aimantation d'échelle atomique qui forment des petits dipôles magnétiques de moment $\boldsymbol{\mu} = i\boldsymbol{\sigma}$ où i est le courant qui circule dans la boucle et $\boldsymbol{\sigma}$ la surface orientée de cette boucle.

Supposons que le monopole traverse indifféremment la matière (c.-à-d. sans éviter les boucles). Le travail du champ microscopique sur le monopole est alors

$$W_0 = gBL \quad (3.3)$$

Calculons la contribution à ce travail des moments magnétiques microscopiques dont les boucles ont été traversées.

Pour une boucle traversée, le travail effectué par les forces magnétiques est

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int g \mathbf{b} \cdot d\mathbf{r} = ig \cdot \text{sign}(\sigma_z) \quad (3.4)$$

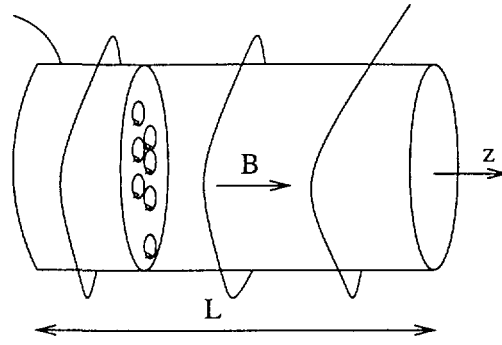


FIG. 3.1 – Coupe latérale d'un cylindre aimanté représentant les boucles de courant.

Il existe une magnétisation résultante $\mathbf{M} = \mathcal{N} \langle \boldsymbol{\mu} \rangle$ à cause de l'orientation des dipôles par \mathbf{B} . Le "nombre de boucles traversées"¹ par le monopole est en moyenne $N = L \langle \sigma_z \rangle \mathcal{N}$, soit un travail

$$W_{\text{boucles}} = igL \langle \sigma_z \rangle M / \langle \mu \rangle = gML \quad (3.5)$$

Par soustraction, on en déduit, en utilisant $\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}$ (cf §3.3.1), que pour une trajectoire qui évite les boucles, le travail est

$$W = gHL \quad (3.6)$$

Dans ce dernier cas, la conservation de l'énergie n'est pas violée. Par contre si on n'évite pas les boucles de courant, le travail total $W_0 = gBL$ viole la conservation de l'énergie. Nous devons alors postuler que le monopole ne doit pas traverser les boucles de courant.

Une description quantifiée microscopique de l'interaction semble nécessaire pour justifier ce postulat.

• Argument en faveur de H

Soit un ferro-fluide dans lequel le monopole poursuit sa trajectoire.

On suppose que le monopole est entouré d'une gaine de matière. Celle-ci l'empêche en particulier de traverser les boucles de courant.

Si on considère que la gaine est aplatie perpendiculairement à \mathbf{B} (fig 3.2), le monopole subit le champ $\mathbf{B}_0 = B_{0z} \hat{\mathbf{z}}$ donc une force $\mathbf{F} = F_z \hat{\mathbf{z}} = gB_{0z} \hat{\mathbf{z}}$.

Par ailleurs le champ total $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_m$ (où \mathbf{B}_m est le champ du monopole) est renforcé à droite de la gaine, et diminué à gauche, il va y avoir accumulation de dipôles à droite, ceci va créer une force de pression en sens inverse du champ.

La force qui s'exerce sur un magnéton est $f_i = \mu_j \partial_i B_j$, on en déduit la force qui s'exerce par unité de volume

$$dF_i/dV = M_j \partial_i B_j = \gamma B_j \partial_i B_j = \frac{1}{2} \gamma \partial_i \mathbf{B}^2 \quad (3.7)$$

où $\mathbf{M} = \gamma \mathbf{B}$ est la magnétisation (cf §3.3.1).

1. Plus exactement le nombre de boucles traversées dont $\sigma_z > 0$ moins le nombre de boucles traversées dont $\sigma_z < 0$.

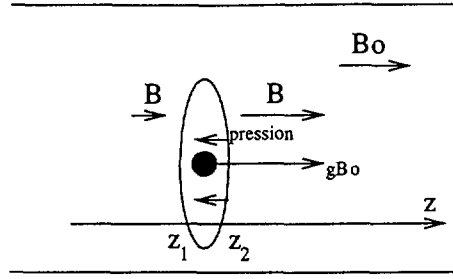


FIG. 3.2 – Monopole entouré de sa gaine dans un ferro-fluide, il subit une force du champ B_0 et une force de pression, dont la somme donne une force $\mathbf{F} = g\mathbf{H}_0$.

La force de pression qu'une colonne de ferro-fluide exerce sur la partie droite de la gaine est

$$F_{z/droite} = \frac{1}{2}\gamma \int_{z>z_2} \partial_z B^2 dV \quad (3.8)$$

et sur la partie gauche de la gaine

$$F_{z/gauche} = \frac{1}{2}\gamma \int_{z<z_1} \partial_z B^2 dV \quad (3.9)$$

soit une force de pression

$$F_z = F_{z/droite} + F_{z/gauche} \quad (3.10)$$

$$= -\frac{1}{2}\gamma \int (B_2^2 - B_1^2) dS \quad (3.11)$$

$$= -\gamma B_{0z} \int dS (B_{m2} - B_{m1}) \quad (3.12)$$

$$= -\gamma g B_{0z} = -g M_{0z} \quad (3.13)$$

On en déduit la force totale s'exerçant sur le monopole et sa gaine

$$F_z = g B_{0z} - g M_{0z} = g H_{0z} \quad (3.14)$$

Si on utilise une gaine aplatie parallèle à \mathbf{B} , le monopole est sensible à \mathbf{H} et la résultante des forces de pression est nulle. La force s'exerçant sur le monopole est encore $\mathbf{F} = g\mathbf{H}$. On admettra que ce résultat reste le même pour une gaine de forme intermédiaire.

Cependant la gaine n'est qu'un artefact et ne devrait pas influencer le comportement du monopole, donc celui-ci ressent bien une force $\mathbf{F} = g\mathbf{H}$ et doit s'arranger pour ne pas traverser de boucles de courant.

3.1.2 Force électrique

On se place cette fois-ci dans un diélectrique et on va montrer que la force de Laplace appliquée à un monopole en mouvement est $\mathbf{F} = -g\mathbf{v} \times \mathbf{D}$, bien que la transformation duale de $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (pour une particule chargée électriquement) semble indiquer une force en $-g\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ pour le monopole [13].

• **Cas d'un monopole dans le vide**

On suppose tout d'abord que le monopole se déplace entre les 2 plaques d'un condensateur sans diélectrique (d'où $\mathbf{E} \equiv \mathbf{D}$).

L'équation de Maxwell (3.36) donne le champ \mathbf{D} en fonction de la densité superficielle de charge du condensateur

$$D_{0x} = -\rho_s \quad (3.15)$$

En calculant la force exercée par le monopole sur les plaques, on pourra par réaction en tirer la force exercée sur le monopole.

Le monopole possède un champ \mathbf{B}_m radial, et par son mouvement, il induit un champ \mathbf{E}_m dont les lignes de force forment des boucles autour de sa trajectoire.

Si au lieu d'un seul monopole, on considère un fil parcouru par un courant continu \tilde{l} de charges magnétiques, on a

$$\mathbf{E}_m = -\frac{\tilde{l}}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (3.16)$$

où $\hat{\phi}$ est le vecteur unitaire azimutal.

Un élément de surface dS d'une plaque subit une force

$$d\mathbf{F} = \rho_s dS \mathbf{E}_m \quad (3.17)$$

où ρ_s est une densité surfacique de charge.

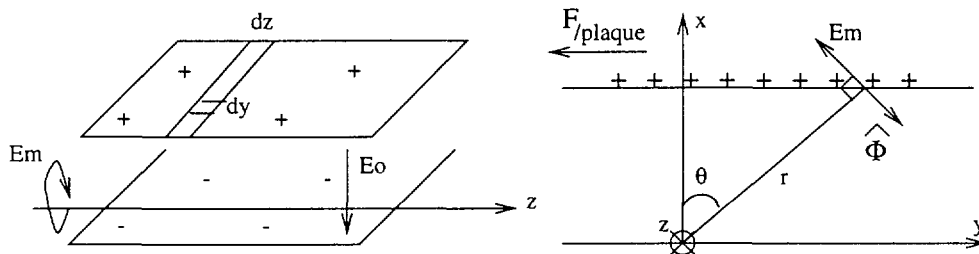


FIG. 3.3 – Vues dans l'espace et en coupe selon z d'un fil parcouru par un courant magnétique entre les plaques d'un condensateur.

Calculons la force appliquée sur la plaque supérieure. Seule la composante selon y est non nulle, et en utilisant $\hat{\phi} \cdot \hat{y} = \cos \theta$,

$$\mathbf{F}_{/sup} = \int d\mathbf{F} = -\hat{y} \rho_s \int dz \int dy \cos \theta \frac{\tilde{l}}{2\pi r} \quad (3.18)$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \theta = x/r$ et l'intégration sur y s'effectue de $-\infty$ à $+\infty$ car on prend un condensateur étendu pour éviter les effets de bord.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{r} \cos \theta = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{x}{r^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{x}{x^2 + y^2} = \pi$$

$\Rightarrow \mathbf{F}_{/sup} = -\hat{y} \rho_s \tilde{l} / 2 \int dz$ pour la plaque supérieure. Pour la plaque inférieure, la densité de charges est $-\rho_s$ et $\hat{\phi} \cdot \hat{y}$ change de signe, on a donc $\mathbf{F}_{/sup} = \mathbf{F}_{/inf}$.

Soit une force totale appliquée sur les 2 plaques

$$\mathbf{F}_{/plaques} = \mathbf{F}_{/sup} + \mathbf{F}_{/inf} = -\hat{y}\rho_s\tilde{l} \int dz \quad (3.19)$$

Par réaction, le fil de courant magnétique ressent une force

$$\mathbf{F} = \hat{y}\rho_s\tilde{l} \int dz \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{F}}{dz} = \hat{y}\rho_s\tilde{l} \quad (3.20)$$

En utilisant (3.15), on peut écrire (3.20) comme suit

$$d\mathbf{F} = \tilde{l} dl (-D_x) \hat{z} \times \hat{x} = -\tilde{l} dl \times \mathbf{D} \quad (3.21)$$

Par analogie avec les charges électriques, où

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \longleftrightarrow \quad d\mathbf{F} = idl \times \mathbf{B}$$

on en déduit la force électrique appliquée au monopole

$$\mathbf{F} = -g\mathbf{v} \times \mathbf{D} \quad (3.22)$$

• Cas d'un milieu diélectrique

Si maintenant on rajoute de la matière entre les plaques du condensateur, alors les charges liées vont se polariser, et on rassemble par la pensée les dipôles ainsi créés en feuillets de charges (constitués de 2 plaques) parallèles aux plaques du condensateur, avec un champ dépolarisant à l'intérieur en sens inverse du champ extérieur appliqué \mathbf{D}_0 .

Deux situations peuvent alors se présenter:

cas a) Si le fil de courant de charges magnétiques se trouve à l'extérieur d'un tel feuillet, les forces exercées par le champ \mathbf{E}_m sur les charges positives et négatives de ce feuillet s'annulent, et on se retrouve avec les seules contributions des plaques du condensateur, donc $\mathbf{F} = -g\mathbf{v} \times \mathbf{D}$.

cas b) Par contre, si le fil se trouve dans un feuillet, bien que tous les autres feuillets du milieu ne contribueront pas, celui-ci donnera une force due aux charges induites du feuillet traversé. En moyennant sur les cas a) et b), on obtient une force $\mathbf{F} = -g\mathbf{v} \times \mathbf{E}$.

On se retrouve devant un choix entre 2 formules différentes, soit $\mathbf{F} = -g\mathbf{v} \times \mathbf{D}$, soit $\mathbf{F} = -g\mathbf{v} \times \mathbf{E}$.

• Argument en faveur de D

Par analogie avec le traitement effectué dans le cas d'un milieu magnétique, on entoure par la pensée le fil de courant magnétique (ou le monopole) d'une gaine et on considère le champ total $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_m$. Si la gaine est aplatie parallèle à \mathbf{E}_0 (fig3.5b) (donc fil sensible au champ \mathbf{E}), le champ total \mathbf{E} est renforcé à gauche de la gaine et diminué à droite, ce qui entraîne une accumulation de dipôles sur la gauche. Ceci va exercer une force de pression dans le même sens que $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$. Les contributions de \mathbf{E} et de la pression vont donner une force $\mathbf{F} = -g\mathbf{v} \times \mathbf{D}$.

Si la gaine est aplatie perpendiculairement à \mathbf{E} (fig3.5c), le fil est sensible au champ \mathbf{D} et la résultante des forces de pression est inexistante, la force est encore en $-g\mathbf{v} \times \mathbf{D}$.

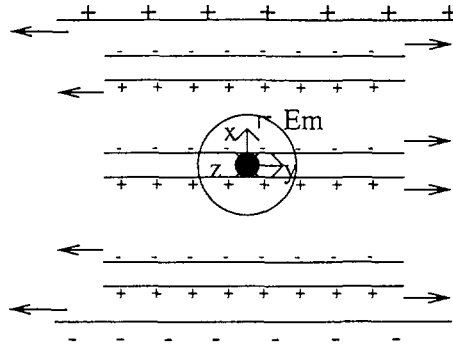


FIG. 3.4 – Forces s'exerçant sur les différents feuillets. Seules les forces sur les plaques du condensateur et du feuillet où se trouve le fil ne s'annulent pas. Le point au centre représente le fil de courant magnétique.

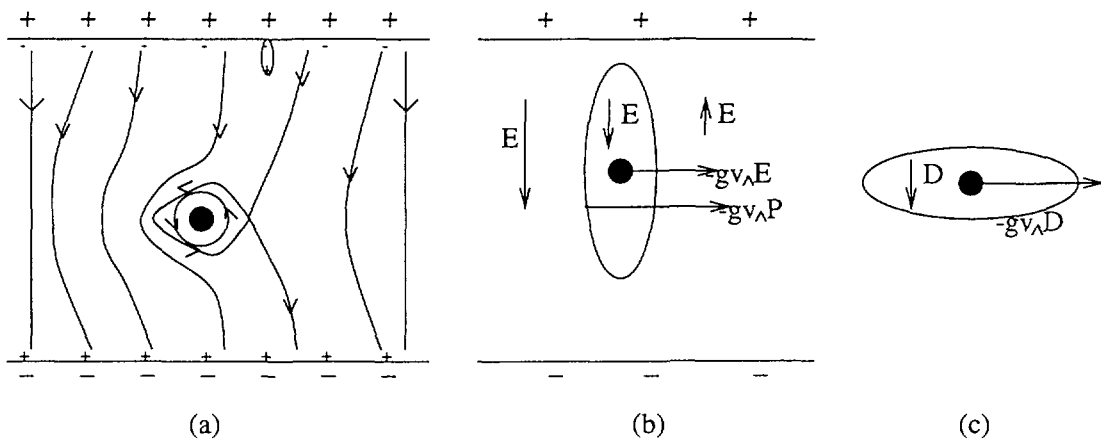


FIG. 3.5 – Différentes gaines entourant le fil de courant magnétique (ou un monopole): (a)-cylindrique de révolution, (b)-aplatie verticale, (c)-aplatie horizontale. Dans ces 3 cas, la force exercée sur le fil est $\mathbf{F} = -g\mathbf{v} \times \mathbf{D}$.

Nous admettrons que dans un cas intermédiaire (fig3.5a), les champs et les pressions se combinent de façon à donner la même force que précédemment.

On en conclut que si le fil parcouru par \vec{i} balaie une surface, celle-ci ne doit pas intersecter les dipôles microscopiques.

3.2 ... au microscopique

D'un point de vue macroscopique, on a vu que le monopole devait éviter de traverser les boucles de courant et qu'un fil de courant magnétique devait éviter de traverser les dipôles, bien que boucles et dipôles microscopiques soient réellement présents dans la matière.

Si le monopole ne doit pas traverser les boucles de courant, quel est le mécanisme qui l'en empêche? Est-ce-que par exemple celles-ci peuvent s'orienter de telle façon à éviter le monopole? Sinon que se passe-t-il si le monopole traverse une boucle?

Une description microscopique et quantifiée de l'interaction électron-monopole est alors nécessaire [14][15][16].

2. $g\mathbf{v} \longleftrightarrow \vec{i}d\mathbf{l}$

3.2.1 Equation de Pauli

Le problème se ramène à celui d'un monopole en mouvement lent qui traverse la fonction d'onde d'un électron atomique sous un champ \mathbf{B} extérieur. Le passage du monopole ne peut être considéré comme une perturbation à cause de la condition de Dirac (l'interaction électron-monopole est "forte". De plus elle crée des effets relativistes). Cependant, pour une étude qualitative, nous utilisons l'équation de Pauli en théorie des perturbations, pour regarder comment réagit la fonction d'onde de l'électron (par exemple dans une onde s) à l'approche du monopole. Si par exemple deux niveaux d'énergie viennent à se croiser, on aurait une évolution non adiabatique de la fonction d'onde de l'électron.

Nous considérons donc le hamiltonien

$$H_{Pauli} = \frac{e}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})]^2 + V(r) = H_S + \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (3.23)$$

où $H_S = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + V(r)$ est le hamiltonien de Schrödinger et $V(r) = -Z\alpha/r_e$ le potentiel coulombien.

Le potentiel vecteur $\mathbf{A} = \mathbf{A}_g(t) + \mathbf{A}_{ext}$ se décompose en

$$\mathbf{A}_g = \frac{g}{4\pi r} \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \hat{\phi} \quad , \quad \mathbf{A}_{ext} = \frac{B}{2} \hat{z} \times \mathbf{r}$$

avec la condition de quantification $eg = n/2$ et

$$\mathbf{B}_g = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad , \quad \mathbf{B}_{ext} = B\hat{z} = \nabla \times \mathbf{A}_{ext}$$

L'équation de Pauli ne peut pas être résolue analytiquement, mais peut servir de guide pour étudier qualitativement ce qui se passe.

3.2.2 Considérations semi-classiques

Lorsque le monopole traverse la matière, un atome situé à une distance $b \gg a$ de la trajectoire du monopole³ voit le champ de ce dernier qui varie avec le temps avec des fréquences de Fourier s'étendant jusqu'à⁴ $w_m \sim v/b \equiv 1/\tau$ [17]. La théorie des perturbations appliquée au premier ordre prédit que l'atome pourra être excité lorsque la séparation entre le fondamental et le premier niveau excité, ΔE , sera inférieure à $1/\tau$. Dans le cas contraire ($v/b < \Delta E$), l'atome restera dans l'état fondamental.

Maintenant, si $b < a$, le monopole traverse l'atome, et la charge magnétique de Dirac g est suffisamment importante pour que le champ magnétique du monopole cause de profonds changements dans les fonctions d'onde⁵. La théorie des perturbations n'est plus applicable et on assiste à un fort déplacement des niveaux, un mélange de fonctions d'onde et des croisements possibles.

Si le monopole est très lent, on aura une évolution adiabatique avec croisement évité (fig3.6 - trait plein) et dans le cas contraire, l'électron changera de niveau d'énergie (fig3.6 - lignes pointillées).

3. b est le paramètre d'impact et a le "rayon" de l'atome.

4. $\beta \sim 10^{-4}$ et $a \sim 0.5\text{Å} \Rightarrow w_m \sim 0.4\text{eV}$

5. Au premier ordre de la théorie des perturbations, le terme $e(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_g)/2m$ à lui seul donne $\Delta E = eg/2ma^2 \sim 7\text{eV}$. Ce décalage en énergie n'est que qualitatif car on ne peut justement pas appliquer un développement perturbatif.

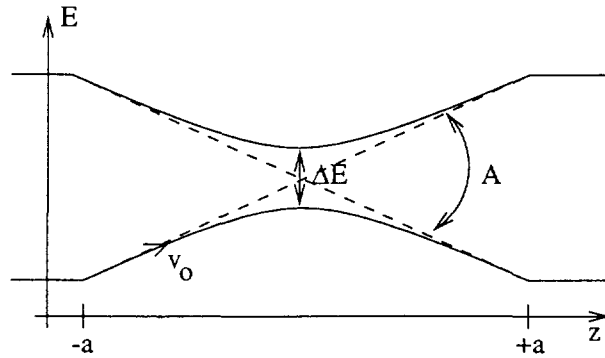


FIG. 3.6 – Niveaux d'énergie atomique sous le champ perturbateur du monopole. En trait plein, évolution adiabatique avec "croisement évité". En pointillé, changement brusque du champ magnétique et changement de niveau.

Pour des vitesses intermédiaires l'électron pourra être excité avec une probabilité donnée par la formule de Landau-Zener⁶

$$P_t = \exp\left(-\frac{\pi \Delta E^2}{2A\hbar v_0}\right) \quad (3.24)$$

où ΔE est la séparation minimum en énergie de 2 niveaux⁷, A la différence de pente entre les courbes en pointillés et v_0 la vitesse du monopole.

En conclusion, le monopole ne retire ni ne cède de l'énergie à une boucle de courant s'il se déplace suffisamment lentement, ce qui ne peut être montré que dans une description quantique du phénomène d'interaction. Il n'est donc ni accéléré ni freiné par la boucle de courant, ce qui se traduit par une force en $g\mathbf{H}$.

3.3 Généralisation des équations de Maxwell

On se place, sauf mention contraire, dans un milieu homogène et isotrope, avec une polarisation qui dépend linéairement des champs.

3.3.1 Retour aux propriétés macroscopiques dans la matière ordinaire

A l'échelle atomique, le champ électromagnétique (\mathbf{e} , \mathbf{b}) obéit aux équations de Maxwell microscopiques [18]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{e} &= \eta & \nabla \times \mathbf{b} - \partial_t \mathbf{e} &= \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0 & \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Or dans la matière, le nombre de sources individuelles est extrêmement grand et de plus, dans une observation macroscopique, le comportement détaillé des champs au niveau atomique n'est pas essentiel.

6. Nous tenons à remercier Do Dang Giu pour nous avoir indiqué cette formule

7. $\Delta E \neq 0$ sauf si le monopole, l'atome et le champ magnétique extérieur sont alignés, ce qui représente un cas exceptionnel.

L'information importante est la moyenne du champ ou d'une source sur un volume grand par rapport aux dimensions atomiques: ces *moyennes locales* [19] sont les champs macroscopiques, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \rangle$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \rangle$.

En moyennant localement les équations (3.25), on obtient

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \langle \eta \rangle & \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= \langle \mathbf{j} \rangle \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

La matière contient des charges libres et des charges liées à des molécules neutres:

$$\eta(\mathbf{r}, t) = \eta^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \eta^{(b)}(\mathbf{r}, t) \quad (3.27)$$

où

$$\eta^{(f)}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i^{(f)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (3.28)$$

$$\eta^{(b)}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \eta_n^{(b)}(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \eta_n^{(b)}(\mathbf{r}, t) = \sum_j q_{nj}^{(b)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{nj}(t)) \quad (3.29)$$

$\eta^{(f)}$ provient des charges $q_i^{(f)}$ libres, et $\eta_n^{(b)}$ provient des charges $q_{nj}^{(b)}$ des constituants aux points \mathbf{r}_{nj} de la n^e molécule.

On peut montrer⁸ que $\langle \eta_n^{(b)} \rangle = \langle q_n^{(b)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle$, où $\mathbf{p}_n(t)$ est le moment dipolaire de la molécule n , ce qui permet de calculer la valeur moyenne locale de la densité de charge

$$\begin{aligned} \rho^{tot} &\equiv \langle \eta \rangle = \langle \sum_i q_i^{(f)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle - \nabla \cdot \sum_n \langle \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle + \dots \\ &= \rho(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \equiv \rho + \rho^{induit} \end{aligned} \quad (3.30)$$

où $\rho = \langle \sum_i q_i^{(f)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle$ et $\mathbf{P} = \sum_n \langle \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle$ est la densité de moment dipolaire (polarisation macroscopique).

Si on reprend la première équation de Maxwell de (3.26), alors

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P} \Rightarrow \rho = \nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (3.31)$$

De la même façon, on peut séparer la densité de courant \mathbf{j} en une densité de courant de charges libres $\mathbf{j}^{(f)}$ et une densité de courant des charges liées dans la n^e molécule $\mathbf{j}^{(n)}$, soit $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \sum_n \mathbf{j}_n^{(b)}(\mathbf{r}, t)$, avec

$$\mathbf{j}^{(f)} = \sum_i q_i^{(f)} \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3.32)$$

$$\mathbf{j}_n^{(b)} = \sum_j q_{nj}^{(b)} \mathbf{v}_{nj} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{nj}) \quad (3.33)$$

et on montre que $\langle \mathbf{j}_n^{(b)} \rangle = \langle q_n^{(b)} \mathbf{v}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle + \partial_t \langle \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle + \langle \nabla \times \mathbf{m}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle$, où \mathbf{m}_n est le moment magnétique dipolaire causé par les charges de la molécule n . On peut alors calculer $\langle \mathbf{j} \rangle$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{tot} &\equiv \langle \mathbf{j} \rangle = \langle \sum_i q_i^{(f)} \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle \\ &\quad + \partial_t \sum_n \langle \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle + \nabla \times \sum_n \langle \mathbf{m}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{J} + \mathbf{J}^{induit} \end{aligned} \quad (3.34)$$

8. en négligeant les termes multipolaires d'ordre supérieur

où \mathbf{J} est le courant produit par les transporteurs de charges libres et \mathbf{M} est la magnétisation, i.e. la somme des moments magnétiques des systèmes liés individuels par unité de volume. Si on reprend la seconde équation de Maxwell de (3.26), alors

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{P} + \nabla \times \mathbf{M} \\ \Rightarrow \mathbf{J} &= \nabla \times (\mathbf{B} - \mathbf{M}) - \partial_t (\mathbf{E} + \mathbf{P}) \equiv \nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D}\end{aligned}\quad (3.35)$$

On peut alors écrire les équations de Maxwell macroscopiques dans la matière ordinaire

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{J} \quad (3.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.38)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (3.39)$$

ainsi que l'équation de conservation de la charge

$$\partial_t \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.40)$$

où $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ est le déplacement électrique, $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$ le champ magnétique, \mathbf{E} le champ électrique, \mathbf{P} la polarisation électrique, \mathbf{B} l'induction magnétique et \mathbf{M} la magnétisation. A grande distance d'une molécule, les 2 types de champs dipolaires créés respectivement par \mathbf{p}_n et \mathbf{m}_n sont similaires, mais au niveau moléculaire, ils présentent 2 structures différentes, un dipole de charges ou une boucle de courant.

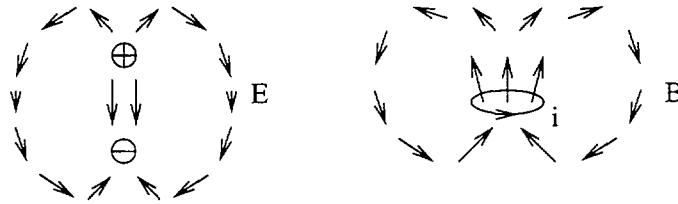


FIG. 3.7 – Champs créés par un dipole de charges et par une boucle de courant. Dans le cas d'un dipole, le champ \mathbf{E} entre les charges est opposé à \mathbf{p}_n (sa divergence est non nulle), alors que le champ \mathbf{B} à l'intérieur d'une boucle est dans le même sens que \mathbf{m}_n .

Si le milieu est isotrope, il va y avoir alignement des dipôles: $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$, et $\mathbf{M} \parallel \mathbf{B}$. Pour des champs pas trop importants, la réponse est linéaire et l'on a

$$\mathbf{P} = \alpha' \mathbf{E} = \alpha \mathbf{D} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{M} = \gamma' \mathbf{H} = \gamma \mathbf{B} \quad (3.42)$$

Il apparait ainsi 2 paramètres α et γ , d'où par définition

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + \mathbf{P} = (1 - \alpha)^{-1} \mathbf{E} \equiv \epsilon \mathbf{E} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - \mathbf{M} = (1 - \gamma) \mathbf{B} \equiv \mathbf{B} / \mu \quad (3.44)$$

3.3.2 Généralisation avec des charges magnétiques: la matière symétrique duale

Si en plus des charges électriques il existe des charges magnétiques libres et induites, on a au lieu de (3.26)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e^{tot} \quad (3.45)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m^{tot} \quad (3.46)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}_e^{tot} \quad (3.47)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} - \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{J}_m^{tot} \quad (3.48)$$

avec $\rho_i^{tot} = \rho_i + \rho_i^{induit}$ et $\mathbf{J}_i^{tot} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_i^{induit}$, $i = e, m$.

Les charges et courants induits sont dus à des dipôles microscopiques. Au niveau macroscopique on doit introduire 4 densités de dipôles : \mathbf{P} et \mathbf{M} qui proviennent des charges et courants électriques de l'électrodynamique classique et $\tilde{\mathbf{P}}$ et $\tilde{\mathbf{M}}$ qui proviennent des charges et courants magnétiques, telles que

$$\rho_e^{ind} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{J}_e^{ind} = \nabla \times \mathbf{M} + \partial_t \mathbf{P} \quad (3.50)$$

$$\rho_m^{ind} = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{J}_m^{ind} = -\nabla \times \tilde{\mathbf{M}} + \partial_t \tilde{\mathbf{P}} \quad (3.52)$$

D'une manière analogue à (3.31) et (3.35), (3.46) et (3.48) deviennent

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}} \\ -\nabla \times \mathbf{E} - \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{J}_m - \nabla \times \tilde{\mathbf{M}} + \partial_t \tilde{\mathbf{P}} \end{cases}$$

soit

$$\rho_m = \nabla \cdot (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{P}}) \equiv \nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{J}_m = -\nabla \times (\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{M}}) - \partial_t (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{P}}) \equiv -\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - \partial_t \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.54)$$

d'où les équations générales de Maxwell "symétriques duales" dans la matière

| | | | | |
|--|---|---|-----|--------|
| $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$ | , | $\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + \mathbf{P}$ | (a) | (3.55) |
| $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \rho_m$ | , | $\tilde{\mathbf{D}} \equiv \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{P}}$ | (b) | |
| $\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{J}_e$ | , | $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - \mathbf{M}$ | (c) | |
| $-\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - \partial_t \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{J}_m$ | , | $\tilde{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{M}}$ | (d) | |

qui décrivent l'influence des charges sur les champs, et nous pouvons aussi écrire l'influence des champs sur les charges qui sont donné par les forces de Lorentz que nous avons déterminées au §3.2.2, la force agissant sur les charges magnétiques étant la duale de celle agissant sur les charges électriques.

| | |
|--|--------|
| $\mathbf{F}_m = q_m (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D})$ | (3.56) |
| $\mathbf{F}_e = q_e (\tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{D}})$ | |

Dans ce paragraphe, nous supposons que les dipôles ordinaires (\mathbf{P} , \mathbf{M}) ne sont pas liés aux dipôles duaux ($\tilde{\mathbf{P}}$, $\tilde{\mathbf{M}}$). Par conséquent, \mathbf{P} et $\tilde{\mathbf{M}}$ restent indépendants du champ magnétique, alors que $\tilde{\mathbf{P}}$ et \mathbf{M} restent indépendants du champ électrique, et on peut généraliser (3.41) par

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{D} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{M} = \gamma \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.58)$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.59)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\gamma} \mathbf{D} \quad (3.60)$$

et (3.43) et (3.44) par

$$\mathbf{D} = (1 - \alpha - \tilde{\gamma})^{-1} \tilde{\mathbf{H}} \equiv \epsilon \tilde{\mathbf{H}} \quad (3.61)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = (1 - \tilde{\alpha} - \gamma)^{-1} \mathbf{H} \equiv \mu \mathbf{H} \quad (3.62)$$

3.3.3 Polarisation créée par des dyons

• Si on ne considère qu'une seule espèce de dyon (particule composée d'une charge électrique et d'une charge magnétique), c.-à-d. avec un rapport e/g fixé, on a un moment dipolaire dyonique dont les parties électrique $\mathbf{p}_e = e\mathbf{r}$ et magnétique $\mathbf{p}_g = g\mathbf{r}$ sont liées l'une à l'autre par $\mathbf{p}_e = (e/g)\mathbf{p}_g$, où \mathbf{r} est la dimension du dipôle. En moyennant par unité de volume, on a donc

$$\mathbf{P} = \frac{e}{g} \tilde{\mathbf{P}} \quad (3.63)$$

Un champ \mathbf{D} crée donc une polarisation, non seulement une polarisation du type \mathbf{P} , mais également du type $\tilde{\mathbf{P}}$, car la contribution de la charge électrique est indissociable de celle de la charge magnétique. De même pour \mathbf{M} et $\tilde{\mathbf{M}}$, et nous généralisons (3.57) à (3.60) comme suit

| | |
|--|--------|
| $\mathbf{P} = \alpha_{ee} \mathbf{D} + \alpha_{eg} \tilde{\mathbf{D}} \quad (a)$ | (3.64) |
| $\mathbf{M} = \gamma_{ee} \tilde{\mathbf{D}} + \gamma_{eg} \mathbf{D} \quad (b)$ | |
| $\tilde{\mathbf{P}} = \alpha_{ge} \mathbf{D} + \alpha_{gg} \tilde{\mathbf{D}} \quad (c)$ | |
| $\tilde{\mathbf{M}} = \gamma_{ge} \tilde{\mathbf{D}} + \gamma_{gg} \mathbf{D} \quad (d)$ | |

On aurait pu postuler $\mathbf{P} = \alpha_{ee} \tilde{\mathbf{H}} + \alpha_{eg} \mathbf{H}$, etc... en se basant sur $\mathbf{F}_e = e\tilde{\mathbf{H}}$ et $\mathbf{F}_m = g\mathbf{H}$, mais ce serait négliger les interactions dipôles-dipôles. Si on minimise Θ^{00} , on s'aperçoit que ce sont les champs \mathbf{D} et $\tilde{\mathbf{D}}$ qui imposent la polarisation (cf Annexe A).

Les équations (3.64) peuvent alors se mettre sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{ee} & \alpha_{eg} \\ \alpha_{ge} & \alpha_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \equiv [\alpha] \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{gg} & \gamma_{ge} \\ \gamma_{eg} & \gamma_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \equiv [\gamma] \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} - \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{H} \end{pmatrix} = ([\alpha] + [\gamma]) \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

et on peut relier les champs entre eux

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{pmatrix} = (1 - [\alpha] - [\gamma])^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \equiv [\varepsilon] \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}} \quad (3.68)$$

où la matrice $[\varepsilon]$ est donnée par

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{gg} - \gamma_{ee} & \alpha_{eg} + \gamma_{ge} \\ \alpha_{ge} + \gamma_{eg} & 1 - \alpha_{ee} - \gamma_{gg} \end{pmatrix} / \det(1 - [\alpha] - [\gamma]) \quad (3.69)$$

La présence de dyons introduit des coefficients non diagonaux dans les matrices $[\alpha]$ et $[\gamma]$, tandis que les coefficients diagonaux sont la généralisation de ceux définis en (3.57) - (3.60) dans le cadre de charges indépendantes.

Comme on ne considère qu'une seule espèce de dyons, on a d'après (3.63)

$$\frac{\alpha_{ee}}{\alpha_{ge}} = \frac{\alpha_{eg}}{\alpha_{gg}} = \frac{e}{g} \quad (3.70)$$

D'autre part un champ \mathbf{D} ou un champ $\tilde{\mathbf{D}}$ tels que $g\tilde{\mathbf{D}} = e\mathbf{D}$ exercent le même couple sur chaque dipole dyonique, donc produisent le même \mathbf{P} et le même $\tilde{\mathbf{P}}$, d'où

$$\frac{\alpha_{ee}}{\alpha_{eg}} = \frac{\alpha_{ge}}{\alpha_{gg}} = \frac{e}{g} \quad (3.71)$$

En comparant (3.70) et (3.71), on obtient

$$\alpha_{eg} = \alpha_{ge} \quad (3.72)$$

On peut effectuer le même traitement pour \mathbf{M} et $\tilde{\mathbf{M}}$, mais cette fois-ci les moments dipolaires sont $\boldsymbol{\mu}_e = (e/m) \mathbf{S}$ et $\boldsymbol{\mu}_g = -(g/m) \mathbf{S}$ (si on suppose que le dyon est une particule de Dirac), c.-à-d. $\boldsymbol{\mu}_e = -(e/g)\boldsymbol{\mu}_g$ et en moyennant par unité, de volume, on obtient les relations suivantes

$$\frac{\gamma_{ee}}{\gamma_{ge}} = \frac{\gamma_{eg}}{\gamma_{gg}} = -\frac{e}{g} = \frac{\gamma_{ee}}{\gamma_{eg}} = \frac{\gamma_{ge}}{\gamma_{gg}} \quad (3.73)$$

d'où

$$\gamma_{eg} = \gamma_{ge} \quad (3.74)$$

D'après (3.69), on obtient

$$\boxed{\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}} \quad (3.75)$$

- Si on a plusieurs espèces de dyons, avec des rapports e/g différents, les équations (3.70), (3.71) et (3.73) ne sont plus valables. Les matrices $[\alpha]$ et $[\gamma]$ ne sont plus à déterminant nul. Cependant elles restent symétriques: les équations (3.72) et (3.74) sont toujours utilisables, et la matrice $[\varepsilon]$ reste symétrique.

- En fait, on se rend compte que (3.55), (3.56) et (3.68) ne dépendent que de $(\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{M}})$, $(\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{M})$ et de la matrice $([\alpha] + [\gamma])$ (les équations encadrées sont les plus générales). Les champs à l'intérieur des dipôles n'interviennent pas. On ne peut distinguer entre $\tilde{\mathbf{M}}$ et \mathbf{P} d'une part et \mathbf{M} et $\tilde{\mathbf{P}}$ d'autre part.

3.3.4 Particules avec moment dipolaire électrique

On se replace dans le cadre du modèle standard, sans charges magnétiques extérieures, mais où les particules peuvent posséder un moment dipolaire électrique⁹ colinéaire au spin.

Ce moment dipolaire électrique est du à des corrections radiatives de la forme $\sigma_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv i\gamma_5\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ et ne fait donc pas intervenir de charges magnétiques, c'est donc une contribution de type $\tilde{\mathbf{P}}$ ou \mathbf{M} et on a $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{M}} = 0$.

Nous pouvons cependant utiliser (3.67)-(3.68) avec $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{E}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{ee} & \alpha_{eg} \\ \gamma_{eg} & \gamma_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

et

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_{ee} & \alpha_{eg} \\ \gamma_{eg} & 1 - \alpha_{ee} \end{pmatrix} / [(1 - \alpha_{ee})(1 - \gamma_{ee}) - \alpha_{eg}\gamma_{eg}] \quad (3.77)$$

Contrairement au cas des dyons, $[\alpha]$ et $[\gamma]$ ne sont pas symétriques séparément mais on a $\alpha_{eg} = \gamma_{eg}$, et la matrice $[\varepsilon]$ reste symétrique.

Or ε_{12} est très petit car provenant du moment électrique dipolaire, donc $\det[\varepsilon] \simeq (1 - \alpha_{ee})(1 - \gamma_{ee})$ et $[\varepsilon]$ se réécrit

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \alpha_{ee}} & \frac{\alpha_{eg}}{(1 - \alpha_{ee})(1 - \gamma_{ee})} \\ \frac{\gamma_{eg}}{(1 - \alpha_{ee})(1 - \gamma_{ee})} & \frac{1}{1 - \gamma_{ee}} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \varepsilon_{mat} & \varepsilon_{mat}\mu_{mat} \alpha_{eg} \\ \varepsilon_{mat}\mu_{mat} \alpha_{eg} & \mu_{mat} \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

car $1 - \alpha_{ee} \equiv 1/\varepsilon_{mat}$ d'après (3.43) et $1 - \gamma_{ee} \equiv 1/\mu_{mat}$ d'après (3.44).

Si le moment dipolaire électrique est porté par l'électron, nous avons d'après (3.76)

$$\frac{\alpha_{eg}}{\gamma_{ee}} = \frac{d_e}{\mu_e} = \frac{d}{e/(2m_e)} < 5 \cdot 10^{-16} \quad \text{si } d < 10^{-26} \text{ e} \cdot \text{cm} \quad (3.79)$$

donc

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{mat}(\mu_{mat} - 1) \frac{d_e}{\mu_e} \quad (3.80)$$

9. Les données expérimentales indiquent une limite supérieure $\sim 10^{-26} \text{ e} \cdot \text{cm}$ pour l'électron.

3.3.5 Quadri-potentiel vecteur

Si on suppose qu'il n'existe pas de charges magnétiques à l'état libre, mais que la matière contienne des paires monopole-antimonopole ou dyon-antidyon liées, il peut exister une densité de charges magnétiques induite non nulle ($\rho_m^{ind} \neq 0$), ainsi qu'une densité de courants de charges magnétiques induite non nulle ($\mathbf{j}_m^{ind} \neq 0$).

En imposant $\rho_m = 0$, $\mathbf{J}_m = 0$ dans (3.55) on obtient

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{D}} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.81)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} + \partial_t \tilde{\mathbf{D}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{H}} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi \quad (3.82)$$

à partir desquels on peut définir un potentiel vecteur régulier \mathbf{A} et un potentiel scalaire ϕ .

S'il existe des charges magnétiques extérieures ponctuelles, on est amené à introduire des cordes de Dirac sur lesquelles \mathbf{A} devient singulier.

Ceci est à comparer au cas standard, avec ou sans moment électrique dipolaire:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi$$

3.3.6 Vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans la matière symétrique duale

On reprend les équations de Maxwell dans la matière (3.55) mais sans sources extérieures

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (3.83)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = 0 \quad (3.84)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = 0 \quad (3.85)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} + \partial_t \tilde{\mathbf{D}} = 0 \quad (3.86)$$

• Avec des charges induites électriques et magnétiques indépendantes

On utilise les expressions (3.61) et (3.62) des champs \mathbf{D} et $\tilde{\mathbf{D}}$ en fonction de \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$. Après décomposition en ondes planes ($e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$), les équations de Maxwell deviennent

$$(3.83) \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{H}} = 0$$

$$(3.84) \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$(3.85) \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{H} + \omega \varepsilon \tilde{\mathbf{H}} = 0$$

$$(3.86) \Rightarrow \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}} - \omega \mu \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}) = -\mathbf{k}^2 \tilde{\mathbf{H}} = \omega \mu \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega^2 \varepsilon \mu \tilde{\mathbf{H}}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu} \mathbf{k}^2 \quad (3.87)$$

La vitesse de phase dans la matière avec des monopoles liés (en unité $c_{vide} = 1$) vaut

$$c_{milieu} = \omega / |\mathbf{k}| = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \mu}} = \sqrt{(1 - \alpha - \tilde{\gamma})(1 - \tilde{\alpha} - \gamma)} \quad (3.88)$$

on retrouve la formule habituelle $\varepsilon \mu c^2 = 1$.

• Cas général

On utilise cette fois les équations matricielles du §3.3.3 pour écrire les équations (3.83) à (3.86) en représentation de Fourier en fonction des seuls champs \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{H}} + \varepsilon_{12}\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \varepsilon_{21}\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{H}} + \varepsilon_{22}\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} + \omega\varepsilon_{11}\tilde{\mathbf{H}} + \omega\varepsilon_{12}\mathbf{H} = 0 \\ \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}} - \omega\varepsilon_{21}\tilde{\mathbf{H}} - \omega\varepsilon_{22}\mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations de Maxwell donnent

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{H}} = 0 \quad (3.89)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.90)$$

Prenons $\mathbf{k} \parallel \hat{\mathbf{z}}$. Si on introduit les complexes $u \equiv \tilde{\mathbf{H}}_x + i\tilde{\mathbf{H}}_y$ et $v \equiv \mathbf{H}_x + i\mathbf{H}_y$, alors on a $\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}} = iku$ et $\mathbf{k} \times \mathbf{H} = ikv$ et les deux dernières équations de Maxwell s'écrivent

$$iku + \omega\varepsilon_{11}v + \omega\varepsilon_{12}u = 0 \quad (3.91)$$

$$ikv - \omega\varepsilon_{21}v - \omega\varepsilon_{22}u = 0 \quad (3.92)$$

Le calcul du déterminant

$$\begin{vmatrix} ik + \omega\varepsilon_{12} & \omega\varepsilon_{11} \\ -\omega\varepsilon_{22} & ik - \omega\varepsilon_{21} \end{vmatrix} = 0$$

est immédiat et on obtient la relation de dispersion suivante

$$k^2 + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{21} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22})\omega^2 - (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21})ik\omega = 0 \quad (3.93)$$

Le terme en $ik\omega$ s'annule car $[\varepsilon]$ est symétrique (sinon on aurait atténuation ou amplification de l'onde), et la vitesse de la lumière dans le milieu est

$$c_{\text{milieu}} = 1/\sqrt{\det[\varepsilon]} \quad (3.94)$$

Dans le cas du monopole où seuls les coefficients diagonaux ε_{11} et ε_{22} subsistent, on retrouve bien la relation (3.87) : $k^2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\omega^2$,

Dans le cas d'un moment dipolaire électrique, la relation de dispersion (3.93) devient avec les valeurs de (3.79) : $\omega^2/k^2 = (1 - \alpha_{ee})(1 - \gamma_{ee}) - \alpha_{eg}^2$.

3.3.7 Invariance sous CPT

Pour la conjugaison de charge, la parité et le renversement du temps, on a

| C | P | T | idem pour |
|--|--|--|--------------------------------------|
| $t \rightarrow t$ | $t \rightarrow t$ | $t \rightarrow -t$ | ∂_t |
| $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$ | $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ | $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$ | ∇ |
| $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$ | $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ | $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ | \mathbf{v} |
| $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l}$ | $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l}$ | $\mathbf{l} \rightarrow -\mathbf{l}$ | \mathbf{s} |
| $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$ | $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$ | $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ | \mathbf{D} et $\tilde{\mathbf{H}}$ |
| $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ | $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ | $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ | \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{D}}$ |
| $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ | $\mathbf{F} \rightarrow -\mathbf{F}$ | $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ | |
| $e \rightarrow -e$ | $e \rightarrow e$ | $e \rightarrow e$ | ρ_e |
| $g \rightarrow -g$ | $g \rightarrow g$ | $g \rightarrow g$ | ρ_m |
| $\mathbf{J}_e \rightarrow -\mathbf{J}_e$ | $\mathbf{J}_e \rightarrow -\mathbf{J}_e$ | $\mathbf{J}_e \rightarrow -\mathbf{J}_e$ | \mathbf{J}_m |

Ainsi par renversement du temps, la force s'exerçant sur monopole devient

$$\mathbf{F} = g(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{F} = -g(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D})$$

soit $\mathbf{F} \rightarrow -\mathbf{F}$. On a aussi une violation de la parité avec $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$.

De la même façon P et T sont violés dans les équations de Maxwell (3.55) (b) et (d).

Les équations concernant le monopole ne sont donc pas invariantes par renversement du temps et de la parité.

Par contre, PT semble être une bonne symétrie. En effet, $\mathbf{D} \rightarrow -\mathbf{D}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$ et $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{F} \rightarrow -\mathbf{F}$, idem pour les équations de Maxwell symétrique duale dans la matière.

C reste une bonne symétrie. Le théorème CPT est donc respecté.

3.4 Condition de quantification pour les dyons

Nous avons montré que les équations de Maxwell se généralisent pour des charges électriques et magnétiques indépendantes (monopoles) mais aussi liées (dyons). Il reste à déterminer si la condition de quantification pour le monopole se généralise elle aussi au cas des dyons.

Nous allons reprendre la méthode heuristique de quantification par le moment angulaire du §2.1.4 en considérant le mouvement d'un dyon 2 dans le champ d'un dyon 1 fixe.

Les champs créés par le dyon 1 fixe

$$\mathbf{D}_1 = \frac{e_1}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.95)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_1 = \frac{g_1}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.96)$$

exercent une force sur le dyon 2 en mouvement

$$\mathbf{F}_{e_2} = e_2(\tilde{\mathbf{H}}_1 + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{D}}_1) \quad (3.97)$$

$$\mathbf{F}_{m_2} = g_2(\mathbf{H}_1 - \mathbf{v} \times \mathbf{D}_1) \quad (3.98)$$

Soit une force totale s'exerçant sur le dyon 2

$$\mathbf{F} = \text{force radiale} + (e_2 g_1 - e_1 g_2) \mathbf{v} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \quad (3.99)$$

Si maintenant on calcule le taux de variation du moment angulaire orbital

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) &= \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (e_2g_1 - e_1g_2)\left(\dot{\mathbf{r}} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left((e_2g_1 - e_1g_2) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi}\right)\end{aligned}\quad (3.100)$$

C'est donc $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} - (e_2g_1 - e_1g_2)\frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi}$ qui est conservé, et avec la même position de la corde que dans §2.1.4, on montre que les valeurs de $(e_2g_1 - e_1g_2)/4\pi$ doivent être demi-entières, c.-à-d.

$$\frac{e_2g_1 - e_1g_2}{4\pi} = \frac{1}{2}n, \quad n \text{ entier} \quad (3.101)$$

qui est la condition de quantification pour les dyons.

3.5 Tenseur énergie-impulsion dans la matière symétrique duale

Le tenseur d'énergie-impulsion $\Theta^{\mu\nu}$ se présente sous la forme suivante

| | énergie | impulsion |
|------------|---------------|---------------|
| densité de | Θ^{00} | Θ^{0i} |
| courant de | Θ^{i0} | Θ^{ij} |

On rappelle les forces qui s'exercent sur les charges magnétiques élémentaires dans l'hypothèse où un fil de courant magnétique ne croise pas de dipôles de charges électriques et une particule de charge magnétique ne traverse pas une boucle de courant

$$\mathbf{F}_m = q_m(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}) \quad (3.102)$$

et sur les charges électriques élémentaires, que l'on obtient par dualité

$$\mathbf{F}_e = q_e(\tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{D}}) \quad (3.103)$$

Pour calculer le *courant* d'énergie-impulsion $\Theta^{i\mu}$, on va considérer 2 plaques dyoniques immobiles parallèles orthogonales à l'axe z , immergées dans de la matière symétrique duale, entre lesquelles il existe les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} constants et à l'extérieur desquelles les champs sont nuls.

Pour annuler les champs à l'extérieur des 2 plaques, on introduit:

- une distribution surfacique de charge électrique $\sigma_e = \pm D_z$
 - une distribution surfacique de charge magnétique $\sigma_m = \pm \tilde{D}_z$
 - une distribution surfacique de courant électrique $\mathbf{j}_{s,e}^x = \mp H_y \hat{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{j}_{s,e}^y = \pm H_x \hat{\mathbf{y}}$
 - une distribution surfacique de courant magnétique $\mathbf{j}_{s,m}^x = \pm \tilde{H}_y \hat{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{j}_{s,m}^y = \mp \tilde{H}_x \hat{\mathbf{y}}$
- où le signe + représente la plaque de gauche et le signe - la plaque de droite.

L'énergie-impulsion arrivant sur une portion dS de la plaque de gauche pendant un intervalle de temps dt est

$$dp^\mu = dS_i dt \Theta^{i\mu} \quad S_i = (0, 0, 0, -S) \quad (3.104)$$

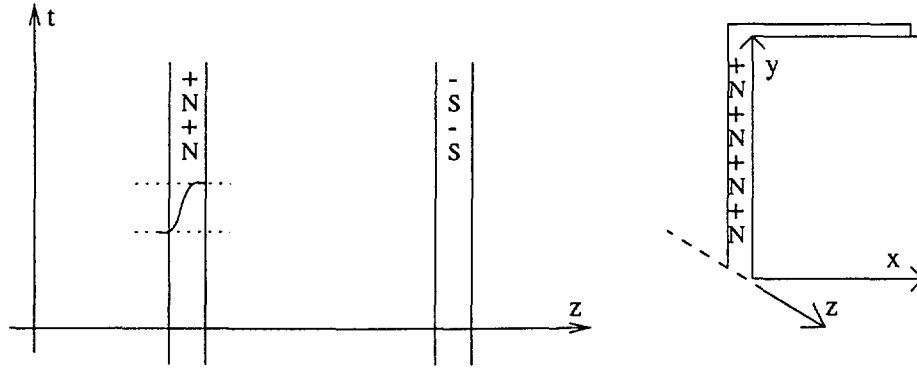


FIG. 3.8 – plaques dyoniques statiques créant un champ (\mathbf{H}, \mathbf{D}) entre elles. Les plaques ont une petite extension en z qui représente l'intervalle d'établissement de la valeur non nulle des champs.

- Calculons d'abord les composantes d'espace:

$$dp^j = -\Theta^{zj} dS dt = dF^j dt \quad (3.105)$$

On calcule les différentes actions des champs :

$$\tilde{\mathbf{H}} \text{ sur } \sigma_e : dF/dS = \frac{1}{2} D_z (\tilde{H}_x \hat{x} + \tilde{H}_y \hat{y} + \tilde{H}_z \hat{z}) \quad (a)$$

$$\mathbf{H} \text{ sur } \sigma_m : dF/dS = \frac{1}{2} \tilde{D}_z (H_x \hat{x} + H_y \hat{y} + H_z \hat{z}) \quad (a')$$

$$\tilde{\mathbf{D}} \text{ sur } \mathbf{j}_{s,e}^x : dF/dS = -\frac{1}{2} H_y (\tilde{D}_y \hat{z} - \tilde{D}_z \hat{y}) \quad (b)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} \text{ sur } \mathbf{j}_{s,e}^y : dF/dS = \frac{1}{2} H_x (\tilde{D}_z \hat{x} - \tilde{D}_x \hat{z}) \quad (b')$$

$$\mathbf{D} \text{ sur } \mathbf{j}_{s,m}^x : dF/dS = -\frac{1}{2} \tilde{H}_y (D_y \hat{z} - D_z \hat{y}) \quad (c)$$

$$\mathbf{D} \text{ sur } \mathbf{j}_{s,m}^y : dF/dS = \frac{1}{2} \tilde{H}_x (D_z \hat{x} - D_x \hat{z}) \quad (c')$$

Nous avons introduit un facteur $1/2$ dans l'expression des forces appliquées car la valeur effective d'un champ est la moyenne de ce champ à l'extérieur des plaques (nul) et entre les plaques (constant).

Ce qui conduit finalement, en sommant les contributions (a, a', b, b', c, c') , à

$$dF/dS = \Theta^{zj} \hat{j} = -\frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{H}}) \hat{z} + D_z \tilde{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{H}) \hat{z} + \tilde{D}_z \mathbf{H} \quad (3.106)$$

Ce qui se généralise comme suit:

$$\Theta^{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{H}} \delta^{ij} - D^i \tilde{H}^j + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{H} \delta^{ij} - \tilde{D}^i H^j \quad (3.107)$$

où les champs $\mathbf{D}, \tilde{\mathbf{D}}, \mathbf{H}, \tilde{\mathbf{H}}$ sont reliés entre eux ainsi qu'à \mathbf{E} et \mathbf{B} par les équations matricielles du §3.3.3.

- Le courant d'énergie, quittant la surface S dans la direction z provient de générateurs fictifs qui débitent de l'énergie pour maintenir les courants constants sur la plaque, est

$$\frac{dp^0}{dt dS} = -\frac{1}{2} (\mathbf{j}_{s,e} \cdot \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{j}_{s,m} \cdot \mathbf{H}) \quad (3.108)$$

soit

$$\begin{aligned}\frac{dp^0}{dt dS} = \Theta^{z0} &= -\frac{1}{2}(\mathbf{j}_e^x \tilde{H}_x + \mathbf{j}_e^y \tilde{H}_y + \mathbf{j}_m^x H_x + \mathbf{j}_m^y H_y) \\ &= \tilde{H}_x H_y - \tilde{H}_y H_x = [\tilde{\mathbf{H}} \times \mathbf{H}]_z\end{aligned}\quad (3.109)$$

que l'on généralise pour toutes les directions par

$$\Theta^{i0} = (\tilde{\mathbf{H}} \times \mathbf{H})^i \quad (3.110)$$

La méthode précédente nous a donné les *courants* d'énergie-impulsion. Pour calculer la *densité* d'énergie-impulsion nous allons effectuer une rotation dans l'espace-temps des plaques de telle façon que celles-ci soient "orthogonales à l'axe t ".

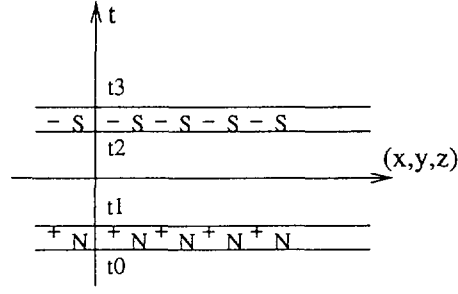


FIG. 3.9 – plaques dyoniques "orthogonales à l'axe t ". Pour $t < t_0$ les champs sont nuls, pour $t_0 < t < t_1$ il existe des densités de courants non nulles qui établissent les champs à une valeur constante entre t_1 et t_2 , puis ces mêmes courants mais changés de signe annulent les champs pour $t > t_3$.

Dans ce cas, il n'y a plus de densités de charge, mais uniquement des courants $\mathbf{J}_e(t)$ et $\mathbf{J}_m(t)$, qui sont uniformes dans tout l'espace. D'après (3.55) (c) et (d), $\mathbf{J}_e = -\partial_t \mathbf{D}$ et $\mathbf{J}_m = -\partial_t \tilde{\mathbf{D}}$. Selon l'axe t , il y a transfert d'impulsion

$$dp^\mu = \Theta^{0\mu} dV \quad (3.111)$$

- La puissance volumique apportée par les générateurs de courant est

$$\frac{dp^0}{dt dV} = -(\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{J}_e + \mathbf{H} \cdot \mathbf{J}_m) \quad (3.112)$$

soit

$$\frac{dp^0}{dt dV} = \frac{d}{dt} \Theta^{00} = \tilde{\mathbf{H}} \cdot \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.113)$$

Or, en tenant compte de la symétrie de la matrice $[\varepsilon]$ du §3.3.3

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}} \cdot \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{D}} &= \varepsilon_{11} \tilde{\mathbf{H}} \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{H}} + \varepsilon_{12} \tilde{\mathbf{H}} \cdot \partial_t \mathbf{H} + \varepsilon_{21} \mathbf{H} \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{H}} + \varepsilon_{22} \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{H} \\ &= \mathbf{D} \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{D}} \cdot \partial_t \mathbf{H}\end{aligned}\quad (3.114)$$

soit

$$\tilde{\mathbf{H}} \cdot \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \partial_t (\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{D}}) \quad (3.115)$$

En intégrant (3.113) et (3.115) entre le début et la fin de la première plaque, on obtient pour la densité d'énergie

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{D}}) \quad (3.116)$$

• L'échange d'impulsion entre le milieu et le champ électromagnétique est par unité de temps et par unité de volume

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt dV} \equiv \frac{d}{dt} \Theta^{0i} = -(\mathbf{J}_e \times \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{J}_m \times \mathbf{D}) \quad (3.117)$$

$$= (\partial_t \mathbf{D}) \times \tilde{\mathbf{D}} - (\partial_t \tilde{\mathbf{D}}) \times \mathbf{D} \quad (3.118)$$

$$= \partial_t (\mathbf{D} \times \tilde{\mathbf{D}}) \quad (3.119)$$

soit en intégrant

$$\Theta^{0i} = (\mathbf{D} \times \tilde{\mathbf{D}})^i \quad (3.120)$$

En résumé, le tenseur énergie-impulsion dans la matière symétrique duale est

$$\Theta^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{D}}) & \mathbf{D} \times \tilde{\mathbf{D}} \\ \hline \tilde{\mathbf{H}} \times \mathbf{H} & \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{H}} \delta^{ij} - D^i \tilde{H}^j + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{H} \delta^{ij} - \tilde{D}^i H^j \end{array} \right) \quad (3.121)$$

On peut vérifier que, si on se replace dans la matière ordinaire, $\tilde{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{B}$ et $\tilde{\mathbf{H}} \rightarrow \mathbf{E}$. Les expressions (3.107), (3.110), (3.116) et (3.120) se ramènent aux expressions classiques

$$\Theta^{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \delta^{ij} - D^i E^j + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \delta^{ij} - B^i H^j$$

$$\Theta^{i0} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$$

$$\Theta^{0i} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

du tenseur énergie-impulsion dans la matière [20].

Chapitre 4

Moment Dipolaire Electrique

Nous avons introduit le moment dipolaire électrique (EDM) dans le chapitre précédent car il pouvait être inclus dans les équations de Maxwell généralisées. Cependant, l'EDM, qui apparait dans le modèle standard, donc accessible à nos échelles d'énergie, semble violer¹ l'invariance par renversement du temps T et la parité P [21].

En se basant sur la violation de CP qui apparait dans la matrice de Kobayashi-Maskawa (c.-à-d. une violation de T pour respecter le théorème CPT), l'EDM de l'électron doit être inférieur à $10^{-37} e \cdot \text{cm}$ [22], mais d'autres modèles pour la violation de CP prédisent des valeurs plus grandes ($d_e < 10^{-26} e \cdot \text{cm}$).

4.1 Méthodes de détection

Pour détecter un moment dipolaire électrique \mathbf{d} , on place la particule à étudier dans un champ électrique \mathbf{E} et on mesure son augmentation d'énergie $W = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$.

Un effort expérimental important pour la recherche de l'EDM d'une particule élémentaire a été entrepris sur le neutron [23], car celui-ci n'est pas chargé.

$$|d_n| < 11 \cdot 10^{-26} e \cdot \text{cm} \quad (4.1)$$

Pour la mesure de l'EDM de l'électron, 2 techniques sont principalement utilisées:

- initialement, observation de la précession du spin de l'électron dans des champs électrique et magnétique externes

$$|d_e| < 3 \cdot 10^{-15} e \cdot \text{cm} \quad (4.2)$$

- actuellement, l'EDM de l'électron induit un EDM mesurable dans les atomes [24][25]

$$|d_e| < 3 \cdot 10^{-24} e \cdot \text{cm} \quad (4.3)$$

Dans ce dernier type d'expériences, on utilise la résonance magnétique nucléaire. Il existe un champ \mathbf{B} uniforme qui définit l'axe de quantification. On prépare le faisceau incident dans un

1. dans un système avec symétrie sphérique, on a $\mathbf{d} \sim \mathbf{J}$, or \mathbf{d} et \mathbf{J} se transforment inversement sous P et T , donc $\mathbf{d} = 0$ si on veut conserver P et T .

état $F = 1$, $m_F = \pm 1$ d'un niveau atomique donné, puis le faisceau passe entre les plaques d'un condensateur où règne un fort champ \mathbf{E} et sa fonction d'onde se transforme proportionnellement à l'EDM des atomes d_a . A la sortie du condensateur, on provoque une nouvelle transition dans un état déterminé dont la mesure de l'intensité de désintégration qui sera proportionnelle à d_a . En observant les variations d'intensité quand \mathbf{E} ou \mathbf{B} sont renversés, on mesure d_a et avec $R = d_a/d_e$ [26], on a une mesure de d_e car R est connu. Ces expériences ont été menées principalement sur le thallium [29], le fluorure de thallium [30] et le césium [31].

4.2 Conception d'un détecteur et ordre de grandeur du signal

Nous avons essayé de concevoir le principe d'une expérience permettant de mettre en évidence un EDM par effet de polarisation macroscopique dans la matière.

Nous n'avons pas pris en considération les erreurs systématiques et statistiques, car nous ne nous intéressons qu'à un ordre de grandeur du signal obtenu. et de la même façon, on considère que les champs extérieurs variables sont écartés par un moyen quelconque.

On place un morceau de matière isolante dont on veut mesurer le moment électrique dipolaire macroscopique entre les plaques d'un condensateur. Deux méthodes de mesure se présentent alors:

soit on entoure le condensateur d'un solénoïde qui crée un fort champ \mathbf{B} uniforme. Sous ce champ les dipôles électriques vont réagir à \mathbf{B} et créer un champ \mathbf{E} . En renversant le champ \mathbf{B} , on mesurera les variations de \mathbf{E} au voltmètre.

soit un générateur de tension crée un fort champ \mathbf{E} entre les plaques du condensateur. Sous ce champ, les dipôles magnétiques vont réagir à \mathbf{E} et créer un champ \mathbf{B} . En renversant le champ \mathbf{E} , on mesurera les variations de \mathbf{B} grâce à un squid² qui encercle le matériau.

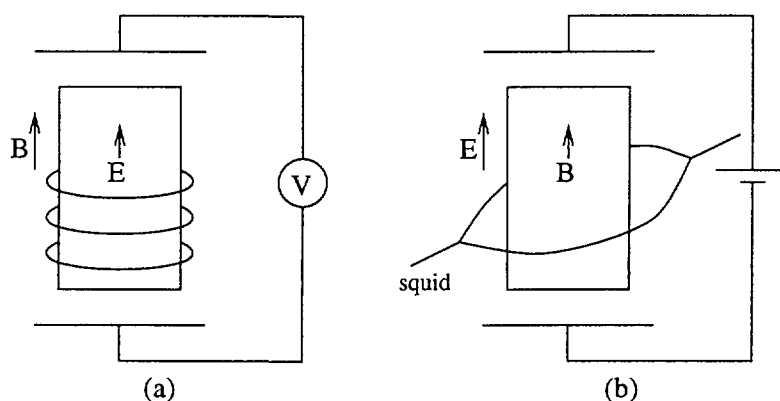


FIG. 4.1 – (a)-matériau plongé dans un champ \mathbf{B} , on mesure les variations de \mathbf{E} . (b)-matériau plongé dans un champ \mathbf{E} , on mesure les variations de \mathbf{B} .

Expérimentalement, il est plus facile de créer de gros champs magnétiques que de gros champs électriques, mais le squid est plus sensible aux petites variations de champs qu'un voltmètre.

2. Superconducting Quantum Interfering Device

Il nous reste à comparer les deux systèmes pour déterminer lequel est le plus performant. Dans tous les cas, le signal doit être supérieur à kT pour être mesurable.

• Dans le premier cas, d'après (3.68) et avec $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{B}$ et $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{E}$, on va induire un champ $\mathbf{E} = -\varepsilon_{12}\mathbf{B}/\det[\varepsilon] = -\alpha_{eg}\mathbf{B}$ car $\varepsilon_{12} = \alpha_{eg}\det[\varepsilon]$, donc d'après (3.79)

$$\frac{E}{B} = \frac{d}{\mu_e} \gamma_{ee} = 5 \cdot 10^{-16} \left(1 - \frac{1}{\mu_{mat}}\right) \quad (4.4)$$

or on suppose que $\mu_{mat} \gg 1$, donc

$$\frac{E}{B} \sim 5 \cdot 10^{-16} \quad (4.5)$$

Si on applique un champ magnétique de $1T$ (on peut monter sans difficulté jusqu'à $10 T$), alors

$$E \sim 5 \cdot 10^{-16} * 3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \sim 1.5 \cdot 10^{-9} \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \quad (4.6)$$

ce qui représente une différence de potentiel mesurée en Volt, si les plaques sont éloignées de 1 m , de

$$U = EL \simeq 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ Volt} \quad (4.7)$$

c.-à-d. une charge en Coulomb, pour une surface de 1m^2 avec $\varepsilon_{mat} \sim 1$, de

$$Q = CU = \varepsilon_{mat} \frac{S}{L} U = \frac{1.5 \cdot 10^{-7}}{36\pi \cdot 10^9} \text{ C} \simeq 1.3 \cdot 10^{-18} \text{ C} \quad (4.8)$$

soit environ 8 électrons qui s'accumulent en plus sur une plaque, et on peut calculer l'énergie stockée en prenant un volume de 1 m^3 , avec (en unités $\hbar = 1$) $1 \text{ T} \simeq 200 \text{ eV}^2$ et $1 \text{ m} = 5 \cdot 10^6 \text{ eV}^{-1}$

$$W_{elec} = \frac{1}{2} \varepsilon_{mat} E^2 \cdot Vol = \varepsilon_{mat} \left(\frac{E}{B}\right)^2 \frac{B^2}{2} \cdot Vol = 6.25 \cdot 10^{-7} \text{ eV} \quad (4.9)$$

c.-à-d. avec $1 \text{ eV} = 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$

$$W \sim 6.25 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{K} \quad (4.10)$$

Ce qui suppose un refroidissement de l'appareil de mesure au moins de l'ordre du milli Kelvin (à cause du terme quadratique en d).

• Dans le second cas, on applique un champ électrique par exemple de $10^4 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$, ce qui va induire un champ $\mathbf{B} = \varepsilon_{21} \mathbf{E}$, soit en unités $\hbar = 1$ avec $\mu_{mat} \simeq 10$

$$B = 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{Volt} \quad (4.11)$$

On aura donc un flux $\phi = BS$, et le squid va mesurer une différence de phase $\Delta\varphi = e\phi$, soit en prenant une surface de 1 m^2

$$\Delta\varphi = 10^{-15} \text{ eV}^2 \cdot \text{m}^2 = 2.5 \cdot 10^{-2} \quad (4.12)$$

soit

$$\Delta\varphi \sim 10^{-2} \quad (4.13)$$

ce qui est mesurable car la sensibilité de certains squid est de l'ordre de 1/1000 rad.
On peut aussi calculer l'énergie emmagasinée

$$W_{magn} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_{mat}} \cdot Vol \quad (4.14)$$

Ce qui nous donne une idée du rapport de l'énergie stockée entre les 2 méthodes

$$\frac{W_{magn}^{(2\text{ème méthode})}}{W_{elec}^{(1\text{ère méthode})}} = \varepsilon_{mat} \mu_{mat} \left(\frac{E_2}{B_1} \right)^2 = \varepsilon \mu \frac{10^{-4}}{9} \quad (4.15)$$

par exemple, pour $\mu = 10$

$$\Rightarrow W_{elec}^{(1)} > 10^4 W_{magn}^{(2)} \quad (4.16)$$

Du point de vue de l'énergie du signal, la première méthode de détection apparait plus intéressante, mais il faudrait aussi comparer les sensibilités des détecteurs (voltmètre et squid) pour apporter une réponse définitive.

Finalement, ces propositions de mesure pourraient donner un signal mesurable à la limite de la technologie actuelle. Cependant, si on augmente les valeurs des champs appliqués, qu'on optimise la géométrie du détecteur, on doit pouvoir gagner un ou plusieurs ordres de grandeur et s'attendre à un signal détectable (il faut toutefois tenir compte du bruit de fond ou d'autres effets induits dans le système de détection).

Chapitre 5

Conclusion

La littérature sur les monopoles magnétiques [32] est très importante, mais malgré cette abondance, peu d'articles traitent du comportement du monopole dans la matière (force d'arrêt, perte d'énergie, piégeage, interactions) et parmi ceux-ci, beaucoup moins discutent des interactions électromagnétiques macroscopiques entre le monopole et la matière.

Dans ce travail de stage, en abordant d'abord une approche macroscopique, nous avons démontré que ce sont bien les champs \mathbf{H} et \mathbf{D} qui rentrent en compte dans la force de Lorentz $\mathbf{F} = g(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D})$ qui agit sur le monopole. Tout se passe alors comme si ce dernier ne doit pas traverser de boucles de courant ou croiser de dipôles dans une approche macroscopique.

Cela nous a amené à reconsidérer l'interaction du monopole avec les dipôles du matériau, et nous avons alors abordé une approche microscopique et quantique de l'interaction pour voir si l'atome passe ou non dans un état excité. La formule ci-dessus est valable dans une approximation adiabatique, c.-à-d. pour des vitesses du monopole très petites.

Puis nous avons généralisé les équations de Maxwell dans la matière symétrique duale pour le cas le plus général des dyons. Nous avons ainsi déterminé certaines propriétés qui en découlent, vitesse de la lumière dans le milieu, invariance sous CPT , ..., avant de généraliser à son tour le tenseur énergie-impulsion.

Enfin, nous avons appliqué pour le cas particulier du moment électrique dipolaire, les résultats précédents pour avoir un ordre de grandeur du signal attendu dans une expérience de détection par des polarisations macroscopiques.

Les résultats et les problèmes rencontrés montrent que même au niveau semi-classique, les monopoles magnétiques représentent un sujet très vaste, et dans ce cadre il serait intéressant de le prolonger par l'étude des expériences de mise en évidence des monopoles. Il pourrait aussi s'intégrer dans les problèmes de la catalyse de la désintégration du proton, du confinement en QCD, ou de l'univers primordial, ce qui pourrait constituer une extension de ce travail.

Annexe A

Minimisation de la densité d'énergie

En (3.116) nous avons calculé la densité d'énergie du champ électromagnétique

$$\Theta_{em}^{00} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{D}}) \quad (\text{A.1})$$

Les équations (3.55) permettent d'écrire

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{D} - (\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{M}}) \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{D}} - (\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{M}) \quad (\text{A.3})$$

qui transforment (A.1) en

$$\begin{aligned} \Theta^{00} \equiv \Theta_{em}^{00} + \Theta_{int \ dip-dip}^{00} &= -\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot (\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{M}}) - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}} \cdot (\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{M}) \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{D}^2 + \text{termes quadratiques} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où on définit

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{M}} = \lambda_1 \mathbf{s}_1 + \lambda_2 \mathbf{s}_2 + \dots \quad (\text{A.5})$$

$$\tilde{\mathbf{d}} \equiv \tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{M} = \mu_1 \mathbf{s}_1 + \mu_2 \mathbf{s}_2 + \dots \quad (\text{A.6})$$

avec \mathbf{s}_i l'orientation moyenne¹ d'une espèce i ,
et les termes quadratiques qui dépendent des interactions dipole-dipole sont choisis de la forme

$$\frac{1}{2} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \cdot c_{ij} \quad (\text{A.7})$$

c_{ij} étant une matrice symétrique (à \mathbf{D} et $\tilde{\mathbf{D}}$ fixés).

Si on minimise Θ^{00} par rapport à \mathbf{s}_i , (A.4) devient

$$0 = \frac{\partial \Theta^{00}}{\partial \mathbf{s}_i} = -\frac{1}{2} \lambda_i \mathbf{D} - \frac{1}{2} \mu_i \tilde{\mathbf{D}} + \frac{1}{2} c_{ij} \mathbf{s}_j \quad (\text{A.8})$$

c.-à-d.

$$\mathbf{s}_i = (c^{-1})_{ij} (\lambda_j \mathbf{D} + \mu_j \tilde{\mathbf{D}}) \quad (\text{A.9})$$

1. ce modèle n'est plus valable si une molécule a plusieurs axes d'orientation de ses dipôles

On peut alors reprendre les expressions de \mathbf{d} et $\tilde{\mathbf{d}}$

$$\mathbf{d} = \lambda_i \mathbf{s}_i = (\lambda_i (c^{-1})_{ij} \lambda_j) \mathbf{D} + (\lambda_i (c^{-1})_{ij} \mu_j) \tilde{\mathbf{D}} \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mu_i \mathbf{s}_i = (\mu_i (c^{-1})_{ij} \lambda_j) \mathbf{D} + (\mu_i (c^{-1})_{ij} \mu_j) \tilde{\mathbf{D}} \quad (\text{A.11})$$

que l'on met sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i (c^{-1})_{ij} \lambda_j & \lambda_i (c^{-1})_{ij} \mu_j \\ \mu_i (c^{-1})_{ij} \lambda_j & \mu_i (c^{-1})_{ij} \mu_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Ainsi les densités de dipôles s'expriment en fonction de $\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \text{matrice} \\ \text{symétrique} \end{pmatrix}$

On aurait pu effectuer le même traitement pour \mathbf{P} , $\tilde{\mathbf{P}}$, \mathbf{M} , $\tilde{\mathbf{M}}$ séparément, mais ce sont les seuls champs $(\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{M}})$ et $(\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{M})$ qui contribuent.

Bibliographie

- [1] P.A.M. DIRAC. Quantized singularities in the electromagnetic field. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 133:60–72, 1931. premier papier sur les monopoles magnétiques.
- [2] P.A.M. DIRAC. The theory of magnetic monopoles. *Phys. Rev.*, 74:817–830, 1948. étend son idée originale pour y inclure la relativité.
- [3] B. CABRERA. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1378, 1982.
- [4] D.E. GROOM. In search of the supermassive magnetic monopole. *Phys. Lett.*, 140(6):323–384, February 1986.
- [5] G. 'T HOOFT. Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nucl. Phys. B*, 79:276–283, 1974.
- [6] A.M. POLYAKOV. Particle spectrum in quantum field theory. *JETP Lett.*, 20:194–195, 1974.
- [7] Edgard ELBAZ. *De l'Electromagnétisme à l'Electrofaible*. Ellipses, 1989.
- [8] X. ARTRU. Monopoles, duality, triality. *Nucl. Phys. B*, 129:415–428, 1977.
- [9] Ta-Pei CHENG and Ling-Fong LI. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, 1984.
- [10] Sidney COLEMAN. The magnetic monopole fifty years later. In *International School of Subnuclear Physics, 19th*, pages 21–117, Erice, Italy, 1981.
- [11] Chan HONG-MO and Tsou Sheung TSUN. *Some Elementary Gauge Theory Concepts*. Lecture Notes in Physics 47. World Scientific, 1993.
- [12] J. PRESKILL. Magnetic monopoles. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 34:461–530, May 1984.
- [13] Y. HARA. Electromagnetic force on a magnetic monopole. *Phys. Rev. A*, 32(2):1002–1006, August 1985.
- [14] P.V. VOROB'EV I.V. KOLOKOLOV and V.V. IANOVSKI. Interactions of a massive slow magnetic monopole with matter. hep-ph/9809420 v2, 22p., September 1998.
- [15] C.N. YANG Y. KAZAMA and A.S. GOLDHABER. Scattering of a Dirac particle with charge Ze by a fixed magnetic monopole. *Phys. Rev. D*, 15(8):2287–2299, April 1977.
- [16] C. KITTEL and A. MANOLIU. Interaction of a magnetic monopole with a ferromagnetic domain. *Phys. Rev. B*, 15(1):333–336, January 1977.

- [17] S.D. DRELL et al. Energy loss of slowly moving magnetic monopoles in matter. *Phys. Rev. Lett.*, 50(9):644–648, February 1983.
- [18] John David JACKSON. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1975.
- [19] Josef HONERKAMP and Hartmann RÖMER. *Theoretical Physics, A Classical Approach*. Springer-Verlag, 1993.
- [20] L. LANDAU and E. LIFCHITZ. *Théorie des Champs*. Physique Théorique tome 2. Mir Moscou, 1989, 4th edition.
- [21] Robert G. SACHS. *The Physics of Time Reversal*. The University of Chicago Press, 1987.
- [22] F. HOOGEVEEN. The standard model prediction for the electric dipole moment of the electron. *Nucl. Phys. B*, 341:322–340, 1990.
- [23] I.S. ALTAREV et al. New measurement of the electric dipole moment of the neutron. *Phys. Lett. B*, 276:242–246, February 1992.
- [24] L.I. SCHIFF. Measurability of nuclear electric dipole moments. *Phys. Rev.*, 132(5):2194, December 1963.
- [25] P.G.H. SANDARS. The electric dipole moment of an atom. *Phys. Lett.*, 14(3):194–196, February 1965.
- [26] P.G.H. SANDARS. Enhancement factor for the electric dipole moment of the valence electron in an alkali atom. *Phys. Lett.*, 22(3):290–291, August 1966.
- [27] V.V. FLAMBAUM and D.W. MURRAY. Limits on the monopole magnetic field from measurements of the electric dipole moments of atoms, molecules and the neutron. *atom-ph/9604005 v2*, 16p., July 1996.
- [28] Werner BERNREUTHER and Mahiko SUZUKI. The electric dipole moment of the electron. *Rev. Mod. Phys.*, 63(2):313–340, April 1991.
- [29] Eugene B. COMMINS, Stephen B. ROSS, David DEMILLE, and B.C. REGAN. Improved experimental limit on the electric dipole moment of the electron. *Phys. Rev. A*, 50(4):2960–2977, october 1994.
- [30] D. SCHROPP Jr., D. CHO, T. VOLD, and E.A. HINDS. New limits on time-reversal invariance from the hyperfine structure of thallium fluoride. *Phys. Rev. Lett.*, 59(9):991–994, august 1987.
- [31] S.A. MURTHY, D. KRAUSE Jr., Z.L. LI, and L.R. HUNTER. New limits on the electron electric dipole moment from cesium. *Phys. Rev. Lett.*, 63(9):965, August 1989.
- [32] A.S. GOLDHABER and W.P. TROWER. Resource Letter MM-1 : Magnetic Monopoles. *Am. J. Phys.*, 58(5):429–439, May 1990. guide sur la littérature concernant les monopoles magnétiques.