



# ニューラルネットワークのCTへの応用

馬笑峰\* 竹田辰興†

\*電気通信大学 情報工学専攻 †電気通信大学 情報工学科

## Application of Neural Network to CT

Xiao Feng MA Tatsuoki TAKEDA

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND INFORMATION MATHEMATICS,  
THE UNIVERSITY OF ELECTRO-COMMUNICATIONS

### Abstract

This paper presents a new method for two-dimensional image reconstruction by using a multilayer neural network. Consider the general tomography problem illustrated in Fig.1. The goal is to determine the local spatial quantity  $f(x, y)$  from a number of line integral measurements

$$g(r_k, \theta_k) = \int_{(k)} f(x, y) ds$$

made along various lines of sight  $k$  through a given region of space.

Multilayer neural networks are extensively investigated and practically applied to solution of various problems such as inverse problems or time series prediction problems. From learning an input-output mapping from a set of examples, neural networks can be regarded as synthesizing an approximation of multidimensional function (that is, solving the problem of hypersurface reconstruction, including smoothing and interpolation). From this viewpoint, neural networks are well suited to the solution of CT image reconstruction.

Though a conventionally used object function of a neural network is composed of a sum of squared errors of the output data, we can define an object function composed of a sum of residue of an integral equation.

$$E = \sum_k \left( g_k^{NN} - g_k^{meas} \right)^2$$

where  $g_k^{NN}$  is line integration calculated from neural network output,  $g_k^{meas}$  is the observed projection data and  $k$  is the number of integral lines. By employing an appropriate line integral for this integral equation, we can construct a neural network that can be used for CT. We applied this method to some model problems and obtained satisfactory results.

As it is not necessary to discretize the integral equation using this reconstruction method, therefore it is application to the problem of complicated geometrical shapes is also feasible. Moreover, in neural networks, interpolation is performed quite smoothly, as a result, inverse mapping can be achieved smoothly even in case of including experimental and numerical errors. However, use of conventional back propagation technique for optimization leads to an expensive computation cost. To overcome this drawback, 2nd order optimization methods or parallel computing will be applied in future.

**Keywords:** computerized tomography, multilayer neural networks, error back propagation

# 1 はじめに

コンピュータトモグラフィ(Computerized Tomography, CT)は物体の外部で得られた信号から内部の物理量分布を非破壊的に計測する方法として精力的に研究され、色々な分野で実用的に使われている。CTの技術は対象によっては高い完成度を達成しているが、今後解決すべき課題も多い。その一つが比較的少数の観測データからなるべく簡便にCT再生像を得る方法の確立である。我々はこのような目的を満足する方法としてニューラルネットワークを使った新しいCT画像再構成法を提案し、モデル実験でその有効性を確認した。

CTの実行に当っては、まず物体を横切るいくつかの径路に沿う物理量の線積分値が観測データ(投影像)として与えられる。この投影像から逆変換により対象とする物体の内部の物理量の2次元あるいは3次元分布を再構成する。解を求めるには、例えば、対象とする空間をメッシュ分割し、未知物理量を離散化して、径路に沿った線積分として表現することで連立一次方程式を得て、これを解けばよい。しかし、この問題は典型的な悪条件問題であるので、上のような方法を単純に適用するのみでは、一般に解を得ることはできない。正しい解を得るためには対象や測定系の特性などに応じた種々の解析方法が用いられる。

ところで、多層ニューラルネットワークは $n$ 次元入力データ空間から $m$ 次元出力データ空間への連続写像である。多層ニューラルネットワークを用いて、CT解析を行うには、入力データとして対象とする物体内の座標( $n=2$ )、出力データとしてその位置での物理量の大きさ(像強度,  $m=1$ )、誤差評価関数として上記像強度の径路に沿う線積分値と観測データ(投影像強度)の差の二乗をとって学習すればよい。

比較的少数データからCT像再構成を行う具体例として円柱状あるいは軸対称トーラス状の核融合プラズマの内部の物理量の分布をCTにより解析することを考える[1]。

## 2 ニューラルネットワークを用いたCT像再構成法

### 2.1 問題の定式化

物理量の強度分布(原像) $z$ が2次元領域 $\Omega$ 内において位置座標 $(x, y)$ の関数として次式のように表されるものとする(Fig.1)。

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

この領域 $\Omega$ を横切る径路 $k(k=1, \dots, K)$ はパラメータ $(r_k, \theta_k)$ で表わすことができる。この時径路 $k$ に沿った $f(x, y)$ の積分が投影像 $g(r_k, \theta_k)$ である。即ち、

$$g(r_k, \theta_k) = \int_{(k)} f(x, y) ds \quad (2)$$

測定された投影像 $g_k^{meas}$ はこれにノイズ $n(r_k, \theta_k)$ が加わったもので次式で表わされる。

$$g_k^{meas} \equiv g^{meas}(r_k, \theta_k) = g(r_k, \theta_k) + n(r_k, \theta_k) \quad (3)$$

ここで、 $k$ についての $n$ の平均値は0であるとする。この積分方程式の逆変換を行ない、強度分布 $f(x, y)$ を再現する。ニューラルネットワークを用いて再現された強度分布を $f^{NN}(x, y)$ とする。

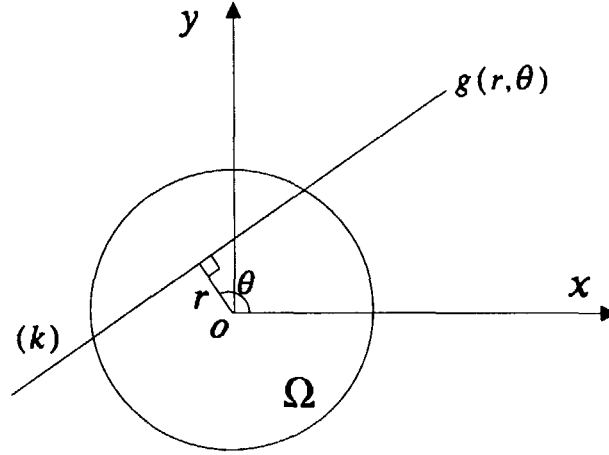


Fig.1: The computational domain for two-dimensional image reconstruction

## 2.2 CTのための誤差評価関数と学習

ニューラルネットワークによる写像を次式で表わす。

$$\bar{y} = \bar{y}(\bar{x}, \bar{w}) \quad (4)$$

ここで、 $\bar{x}$ 及び $\bar{y}$ は、それぞれニューラルネットワークの入力データと出力データを表す。また、ニューラルネットワークの内部のパラメータ(ウエイト及びオフセット)を $\bar{w}$ で表す。多層ニューラルネットワークでは、通常、学習の際、入力データ $\bar{x}$ に対する出力データが教師信号 $\bar{t}$ として与えられる(教師あり学習)。この場合、誤差評価関数として、全ての標本点に対する誤差の二乗和が採用される。

$$E = \sum_{n=1}^N E^n, \quad E^n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \{y_k(\bar{x}^n; \bar{w}) - t_k^n\}^2 \quad (5)$$

ここで、 $N$ は標本点数、 $K$ は出力層のニューロン数である。誤差逆伝播法では次式に従ってウエイトの更新が行われる。

$$\Delta w_{mn}^{(\tau)} = w_{mn}^{(\tau)} - w_{mn}^{(\tau-1)} = -\eta \left. \frac{\partial E}{\partial w_{mn}} \right|_{w^{(\tau-1)}} \quad (6)$$

ここで、 $\tau$ は更新ステップで、 $\eta$ は学習率である。

本研究で述べる方法では、通常の教師あり学習の場合と違って、構成されたネットワークでは既知の出力(教師データ)は存在しないので、ニューラルネットワークからの出力 $f^{NN}(x, y)$ そのものを教師データと比較するのではなく、積分径路に沿った積分値を観測された投影データ $g_k^{meas}$ と比較する。即ち、誤差評価関数は次のように定義される。

$$E = \sum_k \left( g^{NN}(r_k, \theta_k) - g_k^{meas} \right)^2 \quad (7)$$

ここで、 $g^{NN}(r_k, \theta_k)$ はニューラルネットワークの出力 $f^{NN}(x, y)$ から計算された線積分値であり、線積分の値は数値積分によって求める。

$$g^{NN}(r_k, \theta_k) = \int_{(k)} f^{NN}(x, y) ds \approx \sum_i \alpha_i^{(k)} f^{NN}(x_i, y_i) \quad (8)$$

ここで、 $\alpha_i^{(k)}$ は数値積分のウェイトである。この誤差評価関数に対して誤差逆伝播法(EBP法)によって、ニューラルネットワークのウェイト更新量は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta w_{mn}^{(\tau)} &= -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{mn}} \Big|_{w^{(\tau-1)}} \\ &= -2\eta \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I (g^{NN}(r_k, \theta_k) - g_k^{meas}) \frac{\partial g^{NN}(r_k, \theta_k)}{\partial f_i^{NN}} \frac{\partial f_i^{NN}}{\partial w_{mn}} \Big|_{w^{(\tau-1)}} \\ &\approx -2\eta \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I (g^{NN}(r_k, \theta_k) - g_k^{meas}) \alpha_i^{(k)} \frac{\partial f_i^{NN}}{\partial w_{mn}} \Big|_{w^{(\tau-1)}} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $f_i^{NN} \equiv f^{NN}(x_i, y_i)$ である。ネットワークに十分学習させれば、再現領域内任意の点の座標を入力すると、その点における像の強度が出力される。

### 3 モデル分布再現の数値実験

#### 3.1 モデル分布

ここでは、提案した方法によってCT像再構成が精度よく実行できることを確認するためにモデル分布再現の数値実験を行う。再現すべきモデル分布を解析的に与え、この分布について線積分を行い投影データを計算して模擬的な観測データを用意する。モデル分布としては以下に示すような井戸型分布[4]とガウス型二重ピーク分布[5]を採用する。

(1) 井戸型分布

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{x_0=1}^2 \sum_{y_0=1}^3 \exp(-(10x - 10x_0 + 15)^2/2.5 - (10y - 3y_0 + 6)^2/7) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{x_0=1}^3 \sum_{y_0=1}^2 \exp(-(10x - 3x_0 + 6)^2/7 - (10y - 10y_0 + 15)^2/2.5) \end{aligned} \quad (10)$$

(2) ガウス型二重ピーク分布

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= \exp(-(12.5x - 6)^2/7 - (12.5y - 0.5)^2/22) \\ &\quad + 0.35 \exp(-(12.5x + 0.5)^2/12 - (12.5y - 0.5)^2/22) \end{aligned} \quad (11)$$

再現領域は、 $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$ とする。これらのモデル分布の鳥瞰図と等高線図をそれぞれFig.2、Fig.3に示す。

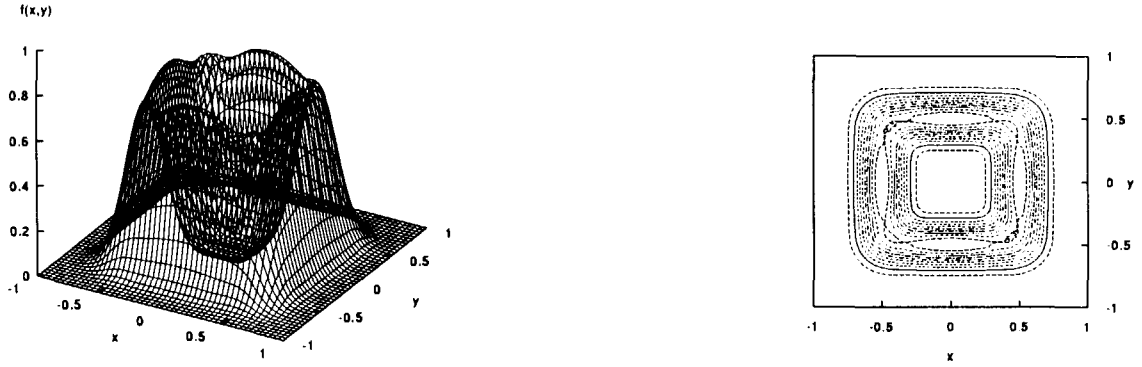


Fig.2: A bird-eye view and a contour diagram of the model distribution  $f_1$

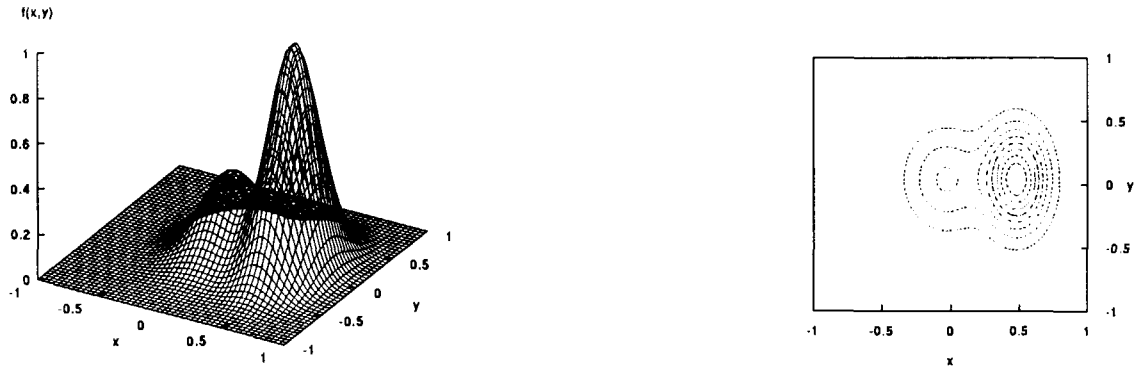


Fig.3: A bird-eye view and a contour diagram of the model distribution  $f_2$

### 3.2 投影測定の配位

投影データは以下に述べるように、Fig.4に示す積分径路に沿った積分を実行して求める。投影データの測定装置は半径  $r = 2$  の円周  $R_m$  上に設けるものとする。なお、投影データ計算のための積分範囲は半径  $r = \sqrt{2}$  の円  $R_o$  の中に限られるものとする。即ち、円  $R_o$  の内部(円周を含む)は式(11)及び式(10)で表した強度分布で、外部は0とする。Fig.4に示すように円  $R_m$  を6等分した点から円  $R_o$  を見込む角度( $\frac{\pi}{2}$ )を51等分して合計300本の積分径路を構成し、 $K = 300$ 個の投影データを得る。ここで、各径路についての線積分は20点の台形則によって数値的に求める。

### 3.3 誤差の評価

再現された強度分布が真のモデル分布にどれほど近いかを定量的に表す指標として投影データ誤差  $E_p$  及び平均関数値誤差  $E_s$  を次のように定義する。

$$E_p = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^K \left[ g^{NN}(r_k, \theta_k) - g_k^{meas} \right]^2}{K}} \quad (12)$$

$$E_s = \frac{\sum_{n=1}^N \left| f(x_n, y_n) - f^{NN}(x_n, y_n) \right|}{N} \quad (13)$$

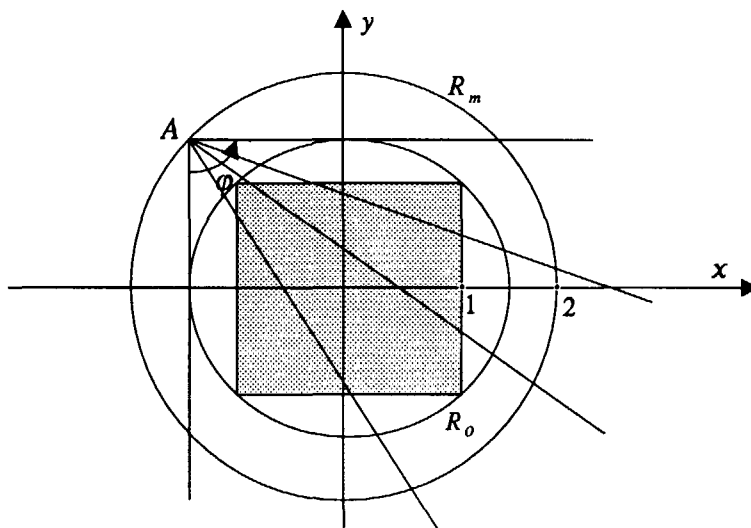


Fig.4: Paths of line integrals of the projection data

ここで、 $N$ は学習終了後にモデル分布再現計算を行う点(一般に未学習点)の数で、本実験では、 $N = 51^2 = 2601$ を用いた。

### 3.4 モデル分布再現実験の結果

4層のネットワーク(2 → 12 → 12 → 1)を用いて投影データにノイズ $n(r_k, \theta_k)$ が含まれていない場合について井戸型分布の再現実験を行った。再現された分布の鳥瞰図及び等高線図をFig.5に、また真のモデル分布とニューラルネットワークの出力データの相関図をFig.6に示す。この逆変換では、誤差として $E_p = 0.0042$ ,  $E_s = 0.0135$ が得られた。

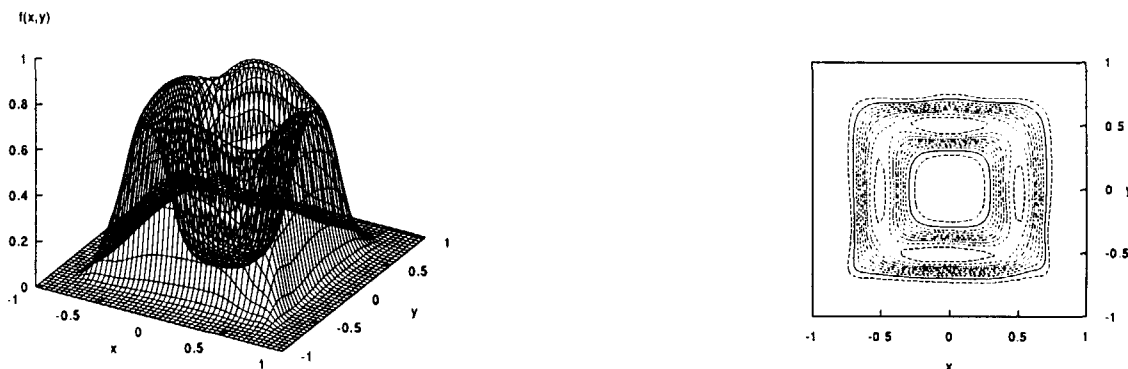


Fig.5: A bird-eye view and a contour diagram of the reconstructed distribution of  $f_1$

次に、投影データに有限のノイズ $n(r_k, \theta_k)$ が含まれる場合を想定してガウス型2重ピーク分布の再現実験を行った。投影データは、測定ノイズを模擬するために式(3)のように各 $g_k^{meas}$ に平均値零の正規乱数をを加えて作成する。乱数の大きさは平均投影強度 $K^{-1} \sum g_k^{meas}$ の5%(標準偏差)となるようにする。再現された分布の鳥瞰図及び等高線図をFig.5に、また真のモデル分布とニューラル・ネットワークの出力データの相関図をFig.6に示す。この逆変換では、誤差として $E_p = 0.007$ ,  $E_s = 0.022$ が得られた。

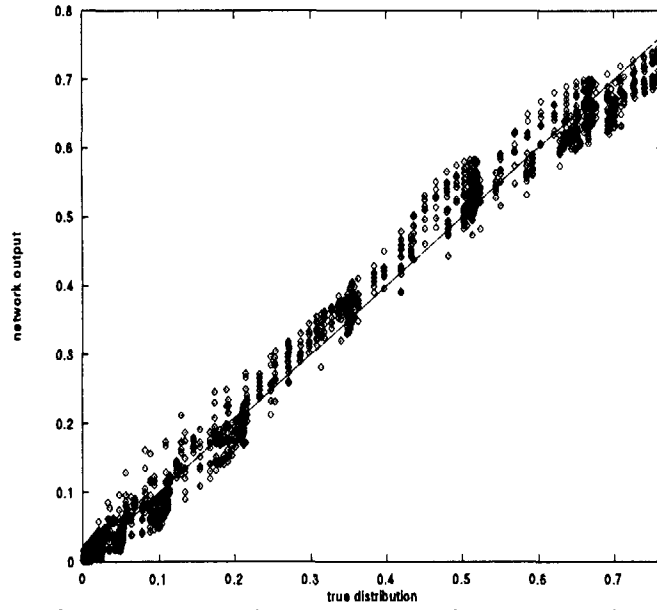


Fig.6: The correlation diagram between network output and true distribution

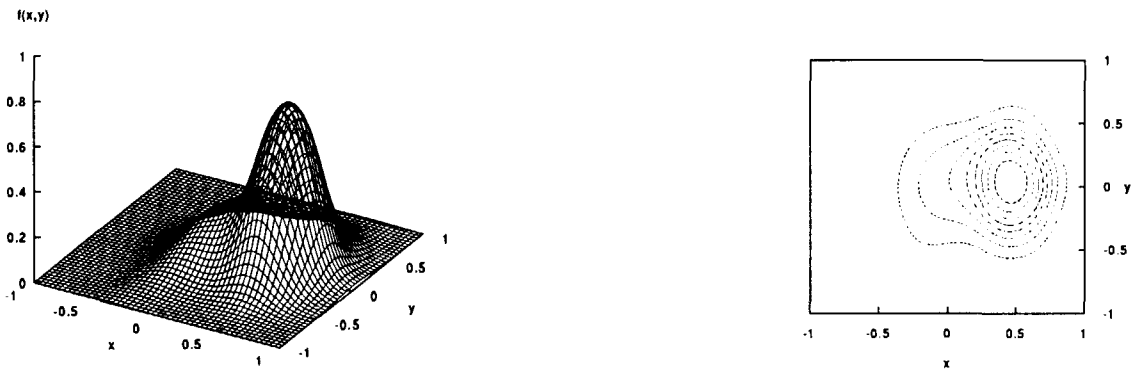


Fig.7: A bird-eye view and a contour diagram of the reconstructed distribution of  $f_2$

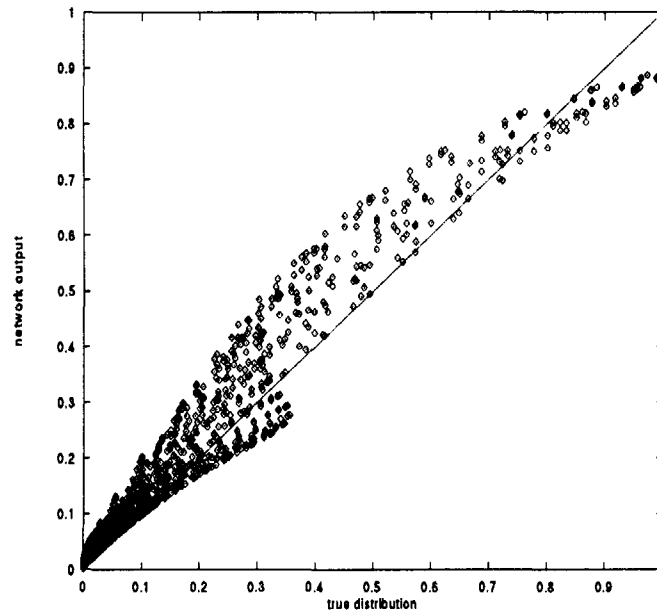


Fig.8: The correlation diagram between network output and true distribution

## 4 まとめと討論

本研究では、積分方程式の残差の二乗和を誤差評価関数とするニューラルネットワークをCT解析に応用する方法を提案した。投影データにノイズを含む場合と含まない場合についてモデル分布の再現実験を行い、満足すべき結果を得て、この方法が有効であることを確認した。

再現アルゴリズムとしては積分方程式を離散化する必要がないので、複雑な幾何形状の問題に対しても適用が容易である。また、ニューラルネットワークによって写像を構成する時には平滑化及び内挿が同時に行われているので、実験誤差や数値計算誤差を含む場合にも正則化について特別注意を払わなくとも滑らかな逆変換が簡単に得られる。得られた解は至る所連続で微分可能であるという特徴を持つ。

測定データが自由にかつ大量に得られる医療用CT等については高速で高精度で解析法が既に実用化されているが、物理実験や自然界の観測では測定装置の設定位置を自由に選べない等幾何学的拘束からデータ数が少ないことが多い。このような少数データのCT解析には本方法は有効である。

学習アルゴリズムとして通常の誤差逆伝播法を使う限り計算コストは高くなるのはやむを得ない。二次の最適化方法を用いる等採用する学習アルゴリズムの改善や並列化を行うことによって計算コストの削減するという課題が残されている。

線積分の代わりに面積分、体積分を考えれば、本方法は境界条件からポアソン方程式の源を求める逆問題の有力な手法として期待できる。

## 謝辞

本研究の全体を通じて有益な議論をしていただいた福原誠氏(電気通信大学)に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] 岩間尚文, プラズマ計測のための計算機トモグラフィ; 少数データからの像再構成, 核融合研究 **68**(1992) 586.
- [2] 長山好夫, プラズマ診断におけるCT(計算機トモグラフィ)の応用, 核融合研究 **62**(1989) 427.
- [3] C.Bishop, Neural networks and their diagnostic applications, Rev.Sci.Instr. **63**(1992)4772.
- [4] 沈雲, 高村秀一, 岩間尚文, 黒田勉, 奥田孝美, 可視光計算機トモグラフィによるプラズマ像の再生, 核融合研究 **59**(1988) 30.
- [5] 高見均, 岩間尚文, 高村秀一, 築島隆繁, スプライン関数によるトーラス接線方向投影からプラズマ像再生, 核融合研究 **56**(1986) 278.