# Estocasticidad de la absorción de energía en la resonancia electrón-ciclotrónica

MX0100285

**César Gutiérrez Tapia[1] y Omar Hernández Aguirre[2]**

[1]Departamento de Física, ININ,
[2]Facultad de Ciencias, UAEM.

**Resumen**

El mecanísmo de absorción de energía en la resonancia ciclotrónica de los electrones es un problema actual, ya que puede considerarse desde el punto de vista estocástico, o relacionado con la estructura espacial no homogénea pero periódica del plasma. En este trabajo, usando el método de promedios de Bogoliuvov para un sistema multiperiódico en presencia de resonancias se obtienen las ecuaciones de deriva en presencia de un campo de RF para el caso de la resonancia ciclotrónica de los electrones hasta términos de primer orden con respecto al inverso de su frecuencia ciclotrónica. Se obtiene la ecuación de la energía absorbida por parte de los electrones en un modelo simple y por el método de derivas. Se muestra el carácter estocástico de la absorción de energía.

## 1 Introducción

La transferencia de energía de una onda a una partícula en la resonancia ciclotrónica de los electrones en presencia de un campo magnético externo es un tema de gran actualidad. Se ha estudiado en relación con el calentamiento del plasma en los tokamaks en la resonancia ciclotrónica de los electrones e iones [1, 2] marco de la teoría de ondas. En el marco de la teoría de derivas propuesto por Bogoliuvov [3, 4] este problema se ha tratado en [5] considerando hasta términos de orden cero. Por otra parte, actualmente se estudian intensamente las fuentes de plasma en la resonancia ciclotrónica de los electrones por sus aplicaciones tecnológicas [6, 7, 8, 9, 10]. Uno de los problemas actuales es la determinación de los mecanismos de absorción de energía en la resonancia ciclotrónica de los electrones. Actualmente se investigan principalmente dos: El mecanismo estocástico de absorción de energía [11] y el colapso de cavitones de Langmuir [12].

En este trabajo, en el marco de la teoría de derivas propuesta en [4], se analiza el movimiento de las partículas relativistas que se localizan en la región de resonancia ciclotrónica electrónica hasta términos de primer orden. Se muestra que los efectos relativistas en la condición de resonancia llevan a un incremento en la energía de las partículas proporcional al cuadrado del tiempo. En base a la expresión de la energía obtenida por dos métodos se muestra el carácter estocástico de su absorción en la resonancia ciclotrónica de los electrones.

# 2 Modelo simplificado

Consideramos que la onda de radiofrecuencia tiene la forma

$$E_x = E\cos\omega t,$$
$$E_y = E\sin\omega t, \tag{1}$$

donde $\omega$ es la freceuncia de la onda.

Las ecuaciones para las componentes de la velocidad de un electrón tienen la forma

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= -\frac{e}{m}E\cos\omega t - \omega_c V_y, \\ \frac{dV_y}{dt} &= -\frac{e}{m}E\sin\omega t + \omega_c V_x, \end{aligned} \tag{2}$$

La solución del sistema (2) la vamos a buscar en la forma

$$V_x = V_\perp(t)\cos\Psi(t),$$
$$V_y = V_\perp(t)\sin\Psi(t), \tag{3}$$

donde $\Psi(t)$ es la fase variable y $V_\perp(t)$ es la velocidad en el plano $(X, Y)$. De donde obtenemos

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega\left[b(t) - W\right] - \frac{\sin\varphi}{T}. \tag{4}$$

$$\frac{d^2W}{dt^2} = \omega\left[b(t) - W\right]\left\{2g^2\omega^2 W - \left(\frac{dW}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + g^2\omega^2, \tag{5}$$

donde $g^2 = (eE/mc\omega)^2$.

La solución de (5), considerando que el campo magnético es estacionario ($b(t) = 0$), toma la forma

$$W = \frac{g^2\omega^2}{2}\left(t^2 + 2tt_0\cos\varphi_0 + t_0^2\right) \tag{6}$$

donde $\varphi_0 = -\Psi$ es la fase de giro inicial del electrón.

Introduciendo en (6) los valores de $g = eE/mc\omega$ y $t_0 = mV_{\perp 0}/eE$, obtenemos

$$W_\perp = \frac{1}{2}mV_{\perp 0}^2 + \frac{mc^2}{2}\left(\frac{E}{B}\right)^2(\omega_c t)^2 + mc\left(\frac{E}{B}\right)V_{\perp 0}\omega_c t\cos\varphi_0. \tag{7}$$

Considerando que los electrones retornan a la región de resonancia con una fase aleatoria con respecto al campo eléctrico y con una velocidad perpendicular lo suficientemente alta, tal que el cambio en la energía depende solamente del término dependiente de la fase en (7). Obtenemos

$$\Delta W_\perp = W_{\perp n+1} - W_{\perp n} = mc\left(\frac{E}{B}\right)\sqrt{\frac{2W_n}{m}}\omega_c t\cos\varphi_0, \tag{8}$$

donde, la energía perpendicular antes de entrar en la región de resonancia $W_{\perp n}$ y $\varphi_0$ son variables aleatorias independientes y $n$ es el número de veces que la partícula cruza la región de resonancia. De la expresión (8), observamos que la absorción de energía en un momento posterior $n+1$ depende de la cantidad de energía absorbida en el momento de tiempo anterior $n$; por lo que esta ecuación muestra que los electrones absorben energía de forma estocástica (proceso markoviano). Este resultado se muestra con otro formalismo en [13].

# 3 Ecuación de energía. Método de derivas

Consideremos que una partícula con velocidad relativista se mueve en presencia de los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{B}$, los cuales en general se pueden representar como la suma de campos que varían lentamente en el espacio y tiempo $\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t), \mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)$, y de campos que varían rápidamente $\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ y $\widetilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$, de tal forma, que los campos totales que actúan sobre la partícula son

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \sum_{1\leq i\leq 3}\mathbf{e}_i E_i\cos(\theta_2 + \varphi_i), \tag{9}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \sum_{1\leq i\leq 3}\mathbf{e}_i B_i\cos(\theta_2 + \chi_i). \tag{10}$$

Considerando los campos $\mathbf{E}$,$\mathbf{B}$ y la siguiente geometría

$$\begin{aligned} k_2 &= k_3 = 0, \mathbf{E}_0 = 0, E_1 = 0, \\ k_1 &= k_1(\mathbf{r},t), E_2 = E_2(\mathbf{r},t), E_3 = E_3(\mathbf{r},t), \end{aligned} \tag{11}$$

tenemos que las ecuaciones para las componentes de la fuerza de Lorentz, toman la forma compacta [5]

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{p_\parallel}{m_0\gamma}\mathbf{e}_1 + \frac{p_\perp}{m_0\gamma}\left(\mathbf{e}_2\cos\theta_1 + \mathbf{e}_3\sin\theta_1\right) \equiv \mathbf{f}_\mathbf{r}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_\parallel}{dt} &= a_0 + \left[a_1\exp\left(i\theta_1\right) + a_2\exp\left(2i\theta_1\right) + c.c\right] + a_3\cos\left(\theta_2 + \varphi_1\right) \\ &\quad + a_4\cos\theta_+ + a_5\sin\theta_+ + a_6\cos\theta_- + a_7\sin\theta_- \\ &\equiv f_\parallel, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_\perp}{dt} &= b_0 + \left[b_1\exp\left(i\theta_1\right) + b_2\exp\left(2i\theta_1\right) + c.c.\right] + b_3 \\ &\quad + b_4\cos\theta_+ + b_5\sin\theta_+ + b_6\cos\theta_- + b_7\sin\theta_- \\ &\equiv f_\perp, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 - \nu + \left[c_0 + c_1\exp\left(i\theta_1\right) + c_2\exp\left(2i\theta_1\right) + c.c.\right] + c_3\cos\left(\theta_2 + \chi_1\right) \\ &\quad + c_4\cos\theta_+ + c_5\sin\theta_+ + c_6\cos\theta_- + c_7\sin\theta_- \\ &\equiv f_\psi, \end{aligned} \tag{15}$$

La solución de las ecuaciones (12)-(15) por medio del método general de promediación de un sistema de ecuaciones diferenciales multiperiódico en presencia de resonancias [3], a orden cero con respecto al inverso de la frecuencia ciclotrónica de los electrones, toma la forma

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{p_\parallel}{m_0\gamma}\mathbf{e}_1, \tag{16}$$

$$\frac{dp_\parallel}{dt} = \frac{v_\perp p_\perp}{2}\left(\nabla\cdot\mathbf{e}_1\right) - \frac{ev_\perp k_1}{2\omega}\left\{E_2\cos\left(\psi - \varphi_2\right) + E_3\sin\left(\psi - \varphi_3\right)\right\}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_\perp}{dt} &= -\frac{v_\perp p_\parallel}{2}\nabla\cdot\mathbf{e}_1 + \\ &\quad + \frac{e}{2}\left(1 + \frac{v_\parallel k_1}{\omega}\right)\left\{E_2\cos\left(\psi - \varphi_2\right) + E_3\sin\left(\psi - \varphi_3\right)\right\}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 - \nu + \frac{1}{2i}\left(\mathbf{e}_-\cdot\mathbf{e}_+'\right) - \frac{v_\parallel}{2}\left(\mathbf{e}_1\cdot rot\mathbf{e}_1\right) + \\ &\quad + \frac{e}{2p_\perp}\left(1 + \frac{v_\parallel k_1}{\omega}\right)\left\{-E_2\sin\left(\psi - \varphi_2\right) + E_3\cos\left(\psi - \varphi_3\right)\right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

De (17) y (18) obtenemos

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)^{(0)} = \frac{ep_\perp}{2m_0}\left\{E_2\cos\left(\psi - \varphi_2\right) + E_3\sin\left(\psi - \varphi_3\right)\right\}, \tag{20}$$

de donde

$$W^{(0)} = \frac{K}{2}t^2 + \frac{ep_\perp(0)}{2m_0}\left\{E_2\cos\left(\psi_0 - \varphi_2\right) + E_3\sin\left(\psi_0 - \varphi_3\right)\right\}t + W(0), \tag{21}$$

donde $\Psi_0$ es la fase inicial. De forma análoga, al promediar el sistema de ecuaciones (12)-(15) hasta términos de primer orden, obtenemos para las componentes del momento expresiones más complejas que a orden cero, asi mismo para $\Psi$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 - \nu + \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial t} + \frac{e}{2m_0\gamma v_\perp}\left\{\frac{\nu}{\omega} + \frac{v_\perp^2}{c^2}\left(\frac{\omega + k_1^2c^2/\omega}{\omega_0 - \nu} - 1\right)\right\} \times \\
&\times \left[E_2\sin\left(\psi - \varphi_2\right) - E_3\cos\left(\psi - \varphi_3\right)\right] - \frac{v_\perp^2}{8\omega_0}\left(\mathbf{e}_-\mathbf{e}_- : \nabla\mathbf{e}_+\right)\left(\mathbf{e}_+\mathbf{e}_+ : \nabla\mathbf{e}_-\right) + \\
&+ \frac{e^2}{8m_0^2c^2\gamma^2\left(\omega_0 + \nu\right)}\left\{\left(1 - \frac{\nu}{\omega_0 + \nu}\right) + \frac{k_1^2c^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{2\omega + \nu}{\omega_0 + \nu}\right)\right\} \times \\
&\times \left[E_2^2 + E_3^2 - 2E_2E_3\sin\left(\varphi_2 - \varphi_3\right)\right] - \frac{e^2}{8m_0^2c^2\gamma^2\left(\omega_0 - \nu\right)}\left\{\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0 + \nu}\right) + \right. \\
&\left. + \frac{c^2}{v_\perp^2}\left(3 - \frac{2\nu}{\omega} + \frac{v_\perp^2k_1^2}{\omega^2}\right) + \frac{(\omega + \nu)^2}{\omega}\left[\frac{1}{\omega_0 - \nu} + \frac{c^2}{v_\perp^2\omega}\left(2 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)\right]\right\} \times \\
&\times \left[E_2^2 + E_3^2 + 2E_2E_3\sin\left(\varphi_2 - \varphi_3\right)\right],
\end{aligned} \tag{22}$$

de donde

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)^{(1)} = \frac{ep_\perp}{2m_0}\left\{E_2\cos\left(\psi - \varphi_2\right) + E_3\sin\left(\psi - \varphi_3\right)\right\}, \tag{23}$$

La diferencia entre las expresiones obteneidas a orden cero y a primer orden es que a orden cero las fases son constantes mientras que a primer orden las fases tienen un comportamiento mucho más complicado. Es importante selañar que las fórmulas obtenidas por el método de derivas son más generales ya que además de incluir el aspecto estocástico relacionado con el comportamiento temporal, incluyen el aspecto de heterogeneidad del plasma con el cual se relaciona la teoría de los cavitones.

# 4 Conclusiones

En conclusión, resumimos los resultados principales. El primer y segundo término de la expresión para la energía muestran el cambio secular de esta energía [ver (6) y (23)]; es decir, el valor de la energía crece con el tiempo en que las partículas permanezcan en la zona de resonancia. El segundo término nos muestra también, que la cantidad de energía absorbida depende de la fase inicial. Se muestra que las partículas absorben energía de forma estocástica (proceso markoviano). Este resultado concuerda con el reportado en [13]. Hay que hacer notar que el aumento en la energía absorvida no es ilmitado ya que surge una la limitante relacionada con el efecto relativista del aumento de masa.

# Referencias


[1] V. E. Golant and V. I. Fedorov, *RF plasma heating in toroidal fusion devices*, Consultant Bureau, New York, 1989.

[2] Ed. V. L. Granadstein and P. L. Colestock, *Wave heating and current drive in plasmas*, Gordon and Breach, New York, 1983.

[3] N. N. Bogolyuvov and Yu. Mitropolskii, *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscilations*, Gordon and Breach, New York, 1961.

[4] A. I. Morozov and L. S. Solov'ev, In: *Reviews of Plasma Physics*, Vol. 2, Consultants Bureau, New York, 1966.

[5] V. P. Milant'ev. *Sov. Physics.- JETP*, **45**, 84 (1977).

[6] E. Camps. O. Olea, C. Gutiérrez-Tapia and M. Villagrán, *Rev. Sci. Instrum.*, **66**, 3219 (1995).

[7] O. A. Popov, *J. Vac. Sci. Technol.*, **A8**, 2909 (1990)

[8] T. A. Grotjohn, *Rev Sci. Instrum.*, **65**, 1298 (1994).

[9] M. A. Liebermann and A. J. Lichtenberg, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*, Wiley, New York (1994).

[10] K. Ashtiani, J. L. Shohet, W. N. G. Hitchen, G. H. Kim and N. Hershkowitz, *J. Appl. Phys.*, **78**, 2270 (1995)

[11] F. Jaeger, A. J. Lichtenmerg and M. A. Lieberman, *Plasma Phys. and Contr. Fusion*, **14**, 1073 (1972).

[12] V. E. Zakharov, *Soviet phys.-JETP*, **35**, 908 (1972).

[13] A. J. Lichtenberg and M. J. Schwartz, *Plasma Phys. and Contr. Fusion*, **11**, 101 (1969).