

CNIC-01458
IAPCM-0025

光学速调管自由电子激光的理论研究
**THE THEORETICAL STUDY OF THE OPTICAL
KLYSTRON FREE ELECTRON LASER**
(In Chinese)

中国核情报中心
China Nuclear Information Centre

CNIC-01458
IAPCM-0025

光学速调管自由电子激光的理论研究

杨震华

(北京应用物理与计算数学研究所, 100088)

摘 要

该项目由国家 863 计划和国家自然科学基金资助的理论研究和数值模拟课题。其目的是对光学速调管紫外波段自由电子激光进行理论研究和数值模拟,从而达到对光学速调管自由电子激光规律的认识和掌握实验方案的理论设计能力。研究的内容包括光学速调管内磁场的计算,电子束的能量调制,电子束的密度调制,光学速调管的自发辐射谱和增益谱的计算,谐波超辐射的计算,磁场误差对能量调制的影响和对自发辐射谱的影响等。所有这些工作对实验方案的设计是有实际应用价值的。

The Theoretical Study of the Optical Klystron Free Electron Laser

(In Chinese)

YANG Zhenhua

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, 100088)

ABSTRACT

The work of the theoretical study and numerical simulation of optical klystron free electron laser is supported by National 863 Research Development Program and National Science Foundation of China. The object of studying UV band free electron laser (FEL) is to understand the physical law of optical klystron FEL and to gain experience for design. A three-dimensional code OPFEL are made and it is approved that the code is correct completely. The magnetic field of the optical klystron, the energy modulation of the electron beam, the density modulation of the electron beam, spontaneous emission of the electron beam in optical klystron, the harmonic super-radiation of the electron beam, and the effects of the undulator magnetic field error on modulation of the electron beam energy are simulated. These results are useful for the future experiments.

引言

向超紫外波段，特别是软 X 射线波段发展，是自由电子激光当前的主要研究方向之一。从目前已获得的相干光源的分布情况看，从超紫外波段到 X 射线波段是一空白区。而这一波段的相干光源在材料科学、生物物理以及其他领域的科学研究和应用中，具有十分重要的价值。因此利用自由电子激光频率的连续可调性来填补这一空白，也就成了科学家们热切关注的研究领域之一。

自由电子激光对电子束的参数具有严格的要求。例如波长 λ_s 与电子的能量 γ^2 (γ 以 $m_e c^2$ 为单位，全文同) 成反比，要获得超紫外波段的相干光源，一般要求有数百 MeV，甚至 GeV 量级的电子束；电子束的能散度要小于 10^{-3} ；电子束的发射度 ϵ 要小于激光的波长 λ_s ，例如波长 100 nm 的自由电子激光，要求电子束的发射度 ϵ 要小于 $10^{-5} \text{ cm} \cdot \text{rad}$ 。就目前使用的加速器而言，所产生的电子束要同时满足上述三项指标还有相当距离。只有电子储存环的束流才能同时满足这些条件，因此采用电子储存环开展超紫外波段自由电子激光的研究，就成了当前研究的主要手段。

法国 Orsay 和俄罗斯 Novosibirsk 的实验成功，为储存环自由电子激光研究提供了大量的资料^[1, 2]。近年来全世界已有近 20 台电子储存环正在开展自由电子激光的研究工作。在这些实验研究项目中，只有少数几台是专门为研究自由电子激光而设计的，而大多数是利用原来的同步辐射环进行研究工作的。从这些研究项目的设计结构来看，大体上可以分成两种工作方式：一种是两端带有反射镜的振荡器方式；另一种是利用外激光源对电子束能量和密度进行调制，然后在波荡器 (Undulator) 内产生谐波超辐射，以获得三阶、五阶或更高阶的相干谐波辐射。振荡器工作方式的主要困难是工作波长短于 100 nm 时，有效的反射镜制作十分困难。第二种方式正是避开这个困难，只要有较强的外激光源，例如法国 Orsay 的 Super-ACO 储存环，准备用 100 MW 波长为 250~300 nm 的可调脉冲燃料激光器作为外激光源，通过谐波超辐射的办法，可望获得 30~50 nm 的相干光源。也有些储存环准备用两者结合的办法，以获得几十纳米高亮度软 X 射线波段的自由电子激光^[3]。

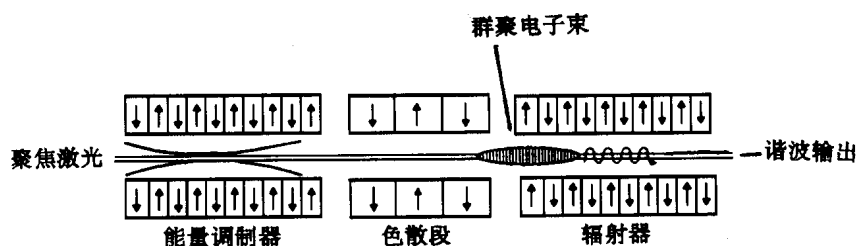


图 1 光速调管结构及电子群聚示意图

无论采用哪种工作方式，目前储存环上开展自由电子激光研究的 Undulator 绝大部分是采用 Vinokurov 和 Skrinsky^[4] 提出的光速调管 (optical klystron) 设计。光速调管由三部分组成，第一部分和第三部分是两个普通的 Undulator，其间由三个磁极组成的色散段隔开，如图 1 所示。光速调管的工作原理是：电子束和强激光同时进入第一个 Undulator，

即能量调制段，电子能量 γ ，激光波长 λ_s 和 Undulator 的无量纲均方根磁场 a_u 和波长 λ_u ，严格满足共振关系 $\lambda_s = \lambda_u(1+a_u^2)/2\gamma^2$ ，因此电子和光场之间可以有效地交换能量。由于电子初始相位的不同，在一个波长 λ_s 范围内，相位处于 $(-\pi, 0)$ 内的电子将获得能量，相位处于 $(0, \pi)$ 范围内的电子将损失能量。其结果是在第一个 Undulator 的出口处，入射电子束的能量将在 λ_s 的尺度内受到调制，因此常把第一个 Undulator 称为能量调制段。色散段由三个磁极组成，为了加强电子的横向色散运动，磁极的尺寸和磁场强度都是大大增加了，其目的是使能量受到调制的电子束，在进入色散段后受到一个特强的横向磁场的作用力，使它们受到一个较大距离的横向偏转。电子偏转的曲率半径 $R = m_e\gamma/eB_d$ ， B_d 是色散段磁场强度。能量大的电子偏转半径较大，因此在色散段经过的路程较短；能量小的电子偏转的半径也要小些，在通过色散段的路程就较长。这样，当电子束在 λ_s 长度内能量受到调制后，经过色散段的时间就不相同。处在前半 λ_s 内的电子要经过较长的时间；处在后半 λ_s 内的电子只经过较短的时间，于是在色散段的出口处就形成电子束在 λ_s 尺度内的群聚（bunching）现象，即电子束的密度压缩。群聚后的电子束进入第三段即第二个 Undulator，在摇摆磁场的激励下会产生相干的同步辐射，这就是光速调管的基本原理。

光速调管的主要特点是在较短的色散段能使电子束达到有效的密度群聚，在辐射段实现高增益的自由电子激光输出。采用光速调管设计比相同长度的 Undulator 激光增益要提高 5~10 倍^[5]，能散度小的电子束增益提高的倍数要大些。现有的大部分储存环自由电子激光并非专门为之设计的，因此它的直线段比较短，采用光速调管设计可以弥补因此而引起的局限性，这就是储存环自由电子激光普遍采用光速调管的根本原因。

本报告的内容主要包括：电子束能量调制的计算；电子束密度调制的计算；光学速调管自发辐射的计算；光学速调管谐波超辐射的计算；磁场误差对电子束能量调制的影响等内容。本报告的主要内容是结合合肥国家同步辐射环上光学速调管自由电子激光项目进行的。

1 电子束能量调制的计算

本节重点讨论外强激光源对电子束能量调制的物理过程，其方法和结论同样适用于振荡器方式工作的储存环自由电子激光。采用光速调管的方法来产生相干辐射，关键是外激光源能否对电子束产生有效的能量调制。因此精确地计算电子束在能量调制段的调制情况，以及电子束参数和光速调管参数对能量调制的影响是十分必要的。储存环产生的电子束能量在超相对论区，电子束流强又比较弱，因此在描述电子的运动时可以忽略空间电荷效应。电子束在 Undulator 内的横向电子感应加速器（Betatron）运动周期长度 $\lambda_\beta \approx \sqrt{2}\lambda_u\gamma/a_u \approx 20\text{ m}$ ，对于不到 2 m 的光速调管，特别是对于能量调制段，完全可以忽略电子横向位置的变化。在上述简化模型下，描述电子状态的能量和相位的三维方程组可以表述如下^[6]：

$$\frac{d\gamma_j}{dz} = -\frac{a_u(r_j)}{\gamma_j} e_s(r_j, z) [J_0(\xi) - J_1(\xi)] \sin\psi_j, \quad (1)$$

$$\frac{d\psi_j}{dz} = (k_s + k_u) - \frac{\omega_s}{c\beta_{zj}} + \frac{d\phi_s}{dz} \quad (2)$$

这里 γ_j 是第 j 个电子的能量（以 $m_e c^2$ 为单位）， $\psi_j = (k_s + k_u)z_j - \omega_s t_j + \varphi_s(z, r)$ ， $J_0(\xi)$ 和 $J_1(\xi)$ 是 Bessel 函数， $\xi = a_{u0}^2 / [2(1 + a_{u0}^2)]$ ， $r_j = x_j e_x + y_j e_y$ 是第 j 个电子的横向位置，Undulator 无量纲均方根磁场 $a_u(r_j) = a_{u0}(1 + k_u^2 y_j^2 / 2)$ ， $a_{u0} = |e| B_u^0 / (\sqrt{2} m_e c^2 k_u)$ ， $k_u = 2\pi / \lambda_u$ ，是 Undulator 的波数， B_u^0 是对称轴上的磁场值， $k_s = \omega_s / c$ 是外激光场的波数， $\varphi_s(z, r_j)$ 和 $e_s(r_j, z)$ 由下面的公式确定（高斯光束）：

$$e_s(r_j, z) = \frac{eE_0}{\sqrt{2}m_e c^2} \frac{W_x(0)W_y(0)}{W_x(z)W_y(z)} e^{-\left(\frac{x^2}{w_x^2(z)} + \frac{y^2}{w_y^2(z)}\right)} \quad (3)$$

$$\varphi_s(r_j, z) = \frac{\omega_s}{4c} \left(\frac{x^2}{R_x(z)} + \frac{y^2}{R_y(z)} \right) - \frac{1}{2} \left[\arctg\left(\frac{z - Z_{\omega x}}{Z_{Rx}}\right) + \arctg\left(\frac{z - Z_{\omega x}}{Z_{Rx}}\right) \right] \quad (4)$$

$$R_x(z) = z - Z_{\omega x} + \left[1 + \frac{Z_{Rx}^2}{(z - Z_{\omega x})^2} \right] \quad (5)$$

$$R_y(z) = (z - Z_{\omega y}) + \left[1 + \frac{Z_{Ry}^2}{(z - Z_{\omega y})^2} \right] \quad (6)$$

$$Z_{Rx} = \pi \frac{W_x^2(0)}{\lambda_s}, \quad Z_{Ry} = \pi \frac{W_y^2(0)}{\lambda_s} \quad (7)$$

$$W_x^2(z) = W_x^2(0) \left[1 + \left(\frac{2(z - Z_{\omega x})}{k_s W_x^2(0)} \right)^2 \right] \quad (8)$$

$$W_y^2(z) = W_y^2(0) \left[1 + \left(\frac{2(z - Z_{\omega y})}{k_s W_y^2(0)} \right)^2 \right] \quad (9)$$

其中 Z_{Rx} ， Z_{Ry} ， $W_x(0)$ ， $W_y(0)$ 是光束参数， $Z_{\omega x}$ ， $Z_{\omega y}$ 是束腰位置纵向坐标， $W_x(0)$ 和 $W_y(0)$ 是束腰的横向半径， E_0 是外激光源的电场振幅，这些量由初始分布给出。

由于实际电子束除了有空间 (x, y, z) 分布外，还有因发射度引起的 V_x 和 V_y 的分布和因能散度引起的 γ_j 的分布。此外 Undulator 内的磁场和外激光源也是空间三维分布。因此严格求解方程(1)和(2)是一个空间三维问题。但是在不同的近似条件下可以得到不同的近似解，下面将分别进行讨论。

1.1 零级近似解

在能量调制段，电子和光场之间的相互作用比较弱，特别是激光场比较弱电子能量比较高的情况下。此时可以把（1）式右端各量看成常数，然后把（1）式从 Undulator 的入口到出口处积分得

$$\Delta\gamma_i = \gamma_i - \gamma_{i0} = \frac{e^2 \lambda_u B_u^0 E_0}{4\pi \gamma_{i0} (m_e c^2)^2} L_u [J_0(\xi) - J_1(\xi)] \sin\psi_{j0} \quad (10)$$

其中 ψ_{j0} 是电子在 Undulator 入口处的初始相位， $L_u = N_u \lambda_u$ 是 Undulator 的总长度， N_u 是

周期数。这样知道了每一个电子的初始相位 ψ_{j0} 和其他有关参数就可以求出每一个电子在经过能量调制后相应的能量增量 $\Delta\gamma_j$ 。(10)式显然是一个粗略的估算,原因是电子和光场之间存在着能量交换,这种能量的变化又反过来影响它们之间的相互作用。

1.2 一级近似解

假定电子的能量及相应的速度,因相互作用而发生变化且变化又不太大。因此令 $\gamma_j = \gamma_{j0} + \Delta\gamma_j$, $\Delta\gamma_j \ll \gamma_{j0}$ 是电子在和光场相互作用过程中引起的能量改变,则由(1)式可以求得

$$\frac{d\Delta\gamma_j}{dz} \approx -\frac{a_u(r_j)e_s(r_j,z)}{\gamma_{j0}} [J_0(\xi) - J_1(\xi)] \sin\psi_j \quad (11)$$

电子的纵向坐标和时间之间应满足下列关系,

$$t_j = t_{0j} + \int_0^{z_j} \frac{dz}{c\beta_{z_j}} \quad (12)$$

其中 t_{0j} 是第 j 个电子进入 Undulator 的时间, β_{z_j} 是它的纵向无量纲速度(以光速 c 为单位)。把(12)式代入 ψ_j 的表达式,并对 $1/\beta_{z_j}$ 展开取一级量后可得

$$\psi_j \approx (k_s + k_u)z_j - k_s \int_0^{z_j} \frac{dz}{\beta_{z_j}^0} + k_s \int_0^{z_j} \Delta\beta_{z_j} dz + \varphi_s \quad (13)$$

上式对 z 求导,并利用共振关系可得 $\Delta\beta_{z_j} \approx (1 + a_{u0}^2)\Delta\gamma_j/\gamma_{j0}^3$,并略去小量 $d\varphi_s/dz$ 后可以求得

$$\frac{d\psi_j}{dz} = \frac{(1 + a_{u0}^2)}{\gamma_{j0}^3} k_s \Delta\gamma_j \quad (14)$$

由(11)式和(14)式可以求得

$$\frac{d^2\psi_j}{dz^2} = -k_{sy}^2 \sin^2\psi_j \quad (15)$$

其中

$$k_{sy} = 2 \left\{ [J_0(\xi) - J_1(\xi)] \frac{a_{u0}e_s}{(1 + a_{u0}^2)k_s} \right\}^{1/2} k_u \quad (16)$$

是电子在有质动力势中作同步振荡的波数。方程(15)的初始条件是: $z=0$, $\psi_{j0} = -\omega_s t_{0j}$, $\psi'_j = 0$ 。采用文献[7]的办法,(15)式的解为

$$\sin\left(\frac{\psi_j}{2}\right) = k_j \operatorname{sn}[k_{sy}z_j + K(k_j)] \quad (17)$$

其中 $\operatorname{sn}(u)$ 是雅氏椭圆函数, $K(k_j)$ 为全椭圆积分, $k_j = \sin(\psi_{ji}/2)$ 。对(16)式求导数,并利用椭圆函数关系,代入(14)式可以求得第 j 个电子在调制段末端的能量为

$$\gamma_j = \gamma_{j0} + \frac{k_{sy}}{k_u} \frac{2\pi\gamma_{j0}}{K(k_j)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q_j^{n-1/2}}{(1+q_j^{2n-1})} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi k_{sy}L_u}{2K(k_j)}\right] \quad (18)$$

其中

$$q_j = \varepsilon_j + 2\varepsilon_j^5 + 15\varepsilon_j^9 + 150\varepsilon_j^{13} + \dots$$

$$\varepsilon_j = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \sqrt{k'_j}}{1 + \sqrt{k'_j}} \right], \quad k'_j = (1 - k_j^2)^{1/2} \quad (19)$$

这样就可以从给定的初始参数求出每一个电子的能量。

2 电子束密度调制的计算

2.1 理想电子束的密度调制

一般把能散度、发射度为零和无空间分布的电子束称理想电子束。设电子束的能量为 γ ，进入色散段的初始时间为 t_0 ，出色散段的时间为 t ，色散段的长度为 L_d ，磁场为 $B_y(z)$ ， z 为电子运动方向的纵向坐标，则应有

$$t = t_0 + \int_0^{L_d} dz / (c\beta_{\parallel}) \quad (20)$$

β_{\parallel} 是电子在色散段以光速 c 为单位的无量纲纵向速度，由电子在磁场中的运动方程求解，把结果代入并完成积分可得

$$t = t_0 + L_d / (c\bar{\beta}_{\parallel}) - (2\lambda_s N_d) / (c)(\Delta\gamma / \gamma_0) \quad (21)$$

这里的 λ_s 是能量调制段外激光源的波长， γ_0 是能量调制段满足共振关系的电子能量， $\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma$ ， $\Delta\gamma$ 是能量调制后电子能量的增量， $\bar{\beta}_{\parallel} = 1 - \lambda_s N_d / L_d$ ，其中

$$N_d = \frac{L_d}{2\gamma_0^2 \lambda_s} \left[1 + \frac{e^2}{L_d m_e^2 c^4} \int_0^{L_d} \left(\int_0^z B_y(z') dz' \right)^2 dz \right] \quad (22)$$

称色散段参数，在给定的装置中这是一个可调参数。由于储存环电子束的纵向尺度 $\sigma_z \gg \lambda_s$ ，因此我们可以只讨论一个 λ_s 内的电子群聚问题，并且在相位空间讨论更为方便。在理想电子束的情况下， $\Delta\gamma$ 可以得到解析解^[8]。(21)式可以写成为

$$\omega_s t = \omega_s t_0 + \Phi - \eta \sin \omega_s t_0 \quad (23)$$

其中 $\Phi = L_d \omega_s / (c\bar{\beta}_{\parallel})$ 称为色散段的渡越相位， $\eta = 4\pi N_d \Delta\gamma_{\max} / \gamma_0$ 称为色散段的密度群聚参数， $\Delta\gamma_{\max}$ 由文献[8]给出，电子在经过色散段后主要由 η 形成新的相位分布。

设电子束在色散段入口处的电流为 $I_0(t_0)$ ，在色散段出口处的电流为 $I(t)$ ，由电流连续性方程可以求得 $I(t) = edn_e / dt = (edn_e / dt_0)(dt_0 / dt) = I_0 dt_0 / dt$ ，由(23)式可以求得 dt_0 / dt 的表达式，于是电流 $I(t)$ 可以写为

$$I(t) = \frac{I_0}{1 - \eta \cos(\omega_s t_0)} \quad (24)$$

t_0 与 t 的函数关系由(23)式给出。由(24)式可知，当 $\eta \leq 1$ 时，可以出现电流 $I(t)$ 的极大值，即出现所谓理想的密度群聚。在弱场能量调制情况下，即 $\eta \ll 1$ ，(24)式可以近似为 $I(t) \approx I_0 [1 + \eta \cos(\omega_s t - \Phi)]$ 。在储存环自由电子激光中，要求光速调管是强调制，即要求 $\eta \leq 1$ ，此时可以对(24)式按弱场调制函数的正交完备系进行 Fourier 级数展开得

$$I(t) = I_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\eta) \cos \eta(\omega_s t - \Phi) \right] \quad (25)$$

其中 $J_n(n\eta)$ 是贝塞函数。由此可见，密度调制后的电流可以分解为一系列谐波电流的叠加。由(24)式可知，要达到最佳的电流密度调制，则要求 $\eta = 4\pi N_d \times \Delta\gamma_{\max} / \gamma_0 \leq 1$ ，在能量调

制段 $\Delta\gamma_{\max}$ 是已知的，因此对色散段参数 N_d 的选取就有了一个半定量的判据，这在实际应用中是极有参考价值的。

2.2 非均匀效应的影响

实际电子束比上节讨论的理想电子束要复杂得多，有表征电子能量分散的能散度，表征电子方向分散的角散度，表征束流粗细长短的空间尺度等。这些非理想因素都会使上节讨论的密度群聚效率下降，为了获得具体的定量结果，我们逐个因素来进行具体分析。

首先讨论束流能散度的影响。由公式 (21) 知道，不同能量电子抵达色散段出口处的时间是不同的。如果按能量调制段获得的有序能量分散，则 $\Delta\gamma$ 越大越好。相反，如果在初始电子束上叠加一个无序的固有的能量分散，正如我们在文献[8]看到的，调制后电子能量分布的有序性明显下降而无序性则大大上升，结果会导致密度调制率的下降。同样的道理，电子入射方向的分散相当于改革了电子通过色散段的路径，因而也就无序地改变了电子通过色散段的时间。Kincaid^[9]研究了上述两个效应对电子密度调制的影响，其结果是在 (25) 式调制系数 $J_n(n\eta)$ 上乘以能散度衰减因子 δ_γ 和角散度衰减因子 δ_ϕ ，其表达式分别为

$$\delta_\gamma = \exp\left[-\frac{1}{2}(n\gamma_0/4\pi N_d\sigma_\gamma)^2\right] \quad (26)$$

$$\delta_\phi = [(1+b)/2b^2]^{1/2}, \quad b = [1+(2\pi L_d\sigma_\phi^2 n/\lambda_s)^2]^{1/2} \quad (27)$$

其中 (σ_γ/γ_0) 是电子束固有的均方根能散度， σ_ϕ 是电子束固有的有均方根角度分散，从 (26) 式可知，电子束的能散度 (σ_γ/γ_0) 对密度群聚的影响是十分敏感的。

下面讨论电子束的空间分布对密度群聚的影响。色散段的磁铁 x 方向的宽度约 10 cm，因此磁场沿 x 方向有一个接近 10 cm 的平台，而电子在 x 方向的摆动不到 1 cm，这样可以认为 x 方向经受的磁场是均匀分布的。由于色散段间隙内的磁场要满足拉普拉斯方程，因此 y 方向磁场分量 B_y 沿 y 方向有一个分布^[6]

$$B_y(y, z) = B_y(z)\cosh(k_d y) \approx B_y(z)\left(1 + \frac{1}{2}k_d^2 y^2 + \dots\right) \quad (28)$$

其中 $k_d = 3\pi/L_d$ 是色散段磁场的结构参数。如果入射电子束在 y 方向有一个分布，根据 (22) 式不同 y 值的电子会有不同的色散参数 N_d ，也就直接影响密度群聚参数 η_0 ，把 (28) 式代入 (22) 式则可以求得

$$\begin{cases} N'_d = N_d + \sigma^2 y^2 \\ \sigma^2 = \left[\frac{2\lambda_s \gamma_0^2 N_d}{L_d} - 1 \right] \frac{k_d^2 L_d}{2\gamma_0^2 \lambda_s} \approx N_d k_d^2 \end{cases} \quad (29)$$

把 (29) 式代入 (21) 式，只考虑电子 y 方向分布引起的效应时可得

$$t = t_0 + \frac{L_d}{c\beta_\parallel} + \frac{\lambda_s}{c}\sigma^2 y^2 \quad (30)$$

上式右端第三项 $\lambda_s \sigma^2 y^2 / c$ 就是因为电子 y 方向分布不同引起时间增长。假定电子束的横向分布呈高斯分布，则电子束横向分布引起的衰减因子可以通过 (25) 式的谱分布表达为

$$\delta_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(y/\sigma_y)^2\right] \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda_s} \lambda_s \sigma_y^2 y^2\right) dy \quad (31)$$

$$= \left\{ \frac{1 + [1 + (4\pi n \sigma_y^2)^2]^{1/2}}{2[1 + (4\pi n \sigma_y^2)^2]} \right\}^{1/2}$$

其中 σ_y 是电子横向高斯分布的均方根值。

下面以合肥同步辐射环的电子束参数为例^[10]，对上述三类非均匀效应作一些半定量的估算，其结果对实际应用是有用处的。电子能量 $\gamma_0 = 1000$ ，能散度 $\sigma_\gamma/\gamma_0 = 1.633 \times 10^{-4}$ ，束团尺度均方根值为 $\sigma_x = 0.473 \text{ mm}$ ， $\sigma_y = 0.187 \text{ mm}$ ， $\sigma_z = 11.3 \text{ mm}$ ，发射度 $\varepsilon = 0.207 \times 10^{-2} \cdot (\text{mm} \cdot \text{mrad})$ ， $\sigma_\phi = 0.5491 \times 10^{-5} \text{ rad}$ 。设调制激光波长 $\lambda_s = 0.353 \mu\text{m}$ ，功率 100 MW 。波振荡器参数 $\lambda_u = 7.2 \text{ cm}$ ， $N_u = 20$ ， $L_u = 144 \text{ cm}$ ， $a_u = 2.97$ ， $L_d = 21.6 \text{ cm}$ ，由群聚参数 $\eta \approx 1$ 判据确定的 $N_d \approx 76$ 。表 1 中分别计算了三种不同能散度 σ_γ/γ_0 ，角分算 σ_ϕ 和束流横向分布 σ_y 情况下群聚因子 δ_γ ， δ_ϕ ， δ_y 的值。从中可以看到，能散度 σ_γ/γ_0 的增加将会使 δ_γ 迅速下降，这主要是因为 (σ_γ/γ_0) 对 δ_γ 的影响是按指数平方下降的，而 δ_ϕ 和 δ_y 与非均匀参数 σ_ϕ ， σ_y 呈正比关系 ($n \gg 1$ 时)。就合肥储存环电子束而言，由于束流的发射度已经很小，因此即使呈量级增加也不会对密度群聚造成任何影响，而束流横向尺度 σ_y 的增加将会明显降低电子束的密度群聚。

表 1 不同的非均匀参数对密度群聚的影响

谐波 阶数 (n)	δ_γ			δ_ϕ			δ_y		
	$\frac{\sigma_\gamma}{\gamma_0} = 1.6 \times 10^{-4}$	$\frac{\sigma_\gamma}{\gamma_0} = 3 \times 10^{-4}$	$\frac{\sigma_\gamma}{\gamma_0} = 5 \times 10^{-4}$	$\frac{\sigma_\phi}{\text{rad}} = 0.5 \times 10^{-5}$	$\frac{\sigma_\phi}{\text{rad}} = 1 \times 10^{-4}$	$\frac{\sigma_\phi}{\text{rad}} = 5 \times 10^{-4}$	$\frac{\sigma_y}{\text{mm}} = 0.187$	$\frac{\sigma_y}{\text{mm}} = 0.3$	$\frac{\sigma_y}{\text{mm}} = 0.5$
3	0.9003	0.6910	0.3424	1.000	1.000	0.9996	0.9784	0.9434	0.6872
5	0.7469	0.3584	0.0509	1.000	1.000	0.9991	0.9708	0.8295	0.5326
7	0.5644	0.1338	0.0029	1.000	1.000	0.9983	0.9458	0.7395	0.4424

3 光学速调管自发辐射的计算

3.1 光学速调管的自发辐射谱

第 j 个电子通过光学速调管时产生的自发辐射强度谱分布为^[11, 12]

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = 2 \left(\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right)_j (1 + \cos \alpha_j) \quad (32)$$

式中 $j = 1, 2, \dots, N_j$ 是电子束中电子的标号； $\left(\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right)_j$ 是第 j 个电子在单个波荡器内的自发辐射强度谱分布， ω 是自发辐射的频率。式中 α_j 在只考虑基模辐射时可写为

$$\alpha_j = 2\pi \left[\frac{1}{2\gamma_j^2 \lambda_r} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma_j^2 \theta^2 \right) + N_d(\lambda_r, \gamma_r) \left(\frac{\gamma_r}{\gamma_j} \right)^2 \right] \quad (33)$$

式(33)中的 γ_j 为第 j 个电子的能量； γ_r 和 λ_r 分别是波荡器内满足共振关系的电子能量和波长； K 是波荡器磁场参数。如果波荡器内的 K 值变化不大又能满足共振关系，则可以得到 α_j 的近似表达式 $\alpha_j \approx 2\pi(N_u + N_d)(\gamma_r/\gamma_j)^2$ ，其中 N_u 是单个波荡器磁场周期数， N_d 称色散段参数，由光学速调管和电子束的参数确定

$$N_d = \frac{d}{2\gamma_r^2 \lambda_r} \left[1 + \frac{e^2}{dm_e^2 c^4} \int_{z_0}^{z_0+d} \left(\int_{z_0}^z B_y(z') dz' \right)^2 dz \right] \quad (34)$$

式中 d 是色散段长度； z_0 是色散段起始位置； $B_y(z)$ 是色散段的实测磁感应场。波荡器内第 j 个电子的自发辐射强度谱由下式确定^[13]

$$\left(\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right)_j = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 m_e^2 c^7} \left[\int_0^\infty \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_j) e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_j / c)} dt \right]^2 \quad (35)$$

式中 \mathbf{n} 是电子在磁感应场中作加速运动时产生辐射方向上的单位矢量； \mathbf{r}_j 和 \mathbf{u}_j 分别是第 j 个电子的位置和速度矢量；其余各量皆为通常使用的物理常数。

3.2 色散段参数的计算

色散段介于两个波荡器之间，在接头处会出现场的相互叠加，因此从几何结构上来确定色散段的长度 d 并不准确。从物理上讲，色散段的主要作用是起电子束的密度调制，因此要求轴上电子的轨迹在通过色散段前后准确地保持在两个波荡器的同一轴线上，要做到这一点色散段必须满足

$$\begin{cases} \int_{-d/2}^{d/2} B_y(z) dz = 0 \\ \int_{-d/2}^{d/2} \left[\int_{-d/2}^z B_y(z') dz' \right] dz = 0 \end{cases} \quad (36)$$

这里的积分自变量 z ，是以色散段几何中心为 0 点计算的。把合肥国家同步辐射实验室的光学速调管实际测量的磁感应场 $B_y(z)$ 代入(36)式，即可以求得 $d = 24.2 \text{ cm}$ ，比几何结构 21.6 cm 要长一些，这是由于色散段磁感应远大于波荡器场造成的。由此根据(3)式可以求得色散段参数 N_d 。当取共振能量 $\gamma_r = 316$ ，共振波长 $\lambda_r = 1.06 \mu\text{m}$ 时，相应的 $N_d \approx 80$ ，由 N_d 和波荡器的周期数 N_u 可以给出(33)式中的 α 值。

3.3 波荡器的自发辐射谱

现在根据(35)式来讨论电子在波荡器内的自发辐射谱分布。采用通常的做法^[14]，(35)式可以写成远处轴上观测点的表达式(略去电子脚标 j)

$$\frac{I^2 I_0}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^7 m_e^2} \left[\int_0^{L_u} dz \int_0^{L_u} B_y(z') dz' \exp \left\{ \frac{ik_s z}{\gamma^2} \left[1 + \frac{e^2}{2m_e^2 c^4} \left(\int_0^z B_y(z') dz' \right)^2 + \frac{e^2}{2zm_e^2 c^4} \int_0^z \left(\int_0^{z'} B_y(z'') dz'' \right)^2 dz' \right] \right\} \right]^2 \quad (37)$$

上式指数中第三项，是电子在波荡器内横向摆动一次引起的电子纵向振荡两次的所谓

横 8 字效应，其结果直接导致高阶谐波的产生。这一点，从文献[13]中可以十分清楚地看出来。如果我们不考虑高阶谐波效应时，此项可以忽略。(37) 式指数中第二项是电子横向摆动速度的贡献，可以用无量纲均方根值来表示。再利用共振关系，此时 (37) 式可以简化为

$$\frac{I^2 I_0}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^7 m_e^2} \left| \int_0^{L_u} dz \left[\int_0^z B_y(z') dz' \right] e^{i k_u \frac{k_s}{k_r} z} \right|^2 \quad (38)$$

式中 I_u 是波荡器的长度， k_u ， k_s 和 k_r 分别是波荡器、自发辐射和共振波的波数。在得到 (38) 式时作了近似，即认为每一个周期的电子横向均方根速度是一样的，而且和 k_u ， k_r 和 γ_r 满足共振关系。这是一种近似，目的是为了简化计算，从实际计算结果看，这个近似是可以接受的。不作近似同样可以求得 (7) 式的表达式，不过形式略为复杂些。

3.4 单能电子的自发辐射谱和增益谱

根据以上分析及获得的公式和参数，就可以算出单能电子束的自发辐射强度谱分布。由实测的磁感应场数据，可以求得无量纲均方根值 $a_u \approx 1.41$ ，若取共振波长 $\lambda_r = 1.06 \mu\text{m}$ ，则相应的共振能量 $\gamma_r \approx 613$ 。取 $N_u = 12$ ， $N_d = 8$ ，则可以由 (32)、(33) 和 (38) 式计算得到单能电子的自发辐射谱分布如图 2(a)，纵坐标是以最大值归一的相对谱强度，横坐标 k_s 是自发辐射的波数，这是一个典型的自发辐射谱。根据 Madey 定理，可以由自发辐射谱直接求出光学速调管的增益谱^[11]，其结果如图 2(b)，这里的增益 G 也是相对值。图 2 的结果是典型的单能电子束自发辐射谱和增益谱。

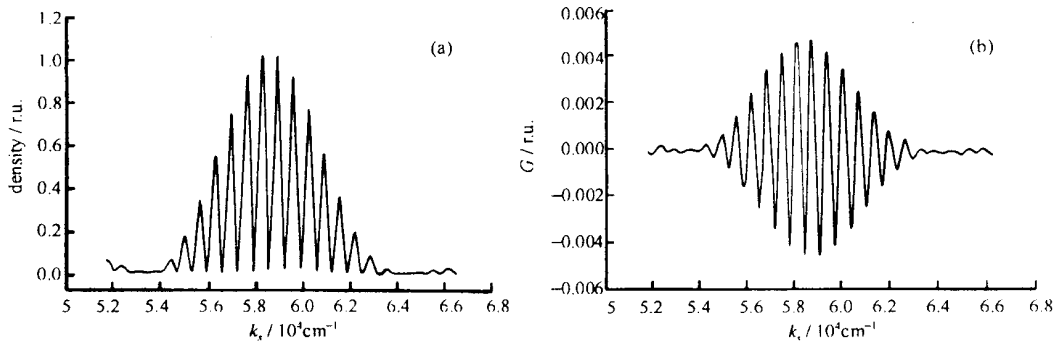


图 2 单能电子束的自发辐射谱(a)和小信号增益谱(b)

3.5 电子束能散度的影响

电子储存环提供的电子束仍有一定的能量分散度，由于能量分散对自发辐射谱和增益谱的影响十分敏感，因此考察电子束能散度的影响是有实际意义的。电子束的自发辐射谱强度是单个电子谱强度的简单叠加，因此能量分散电子束的自发辐射谱强度可由下式求得

$$\frac{I^2 I_0}{d\omega d\Omega} = A \sum_{j=1}^{N_j} \frac{1}{\gamma_j^2} \left| \int_0^{L_u} dz \left[\int_0^z B_y(z') dz' \right] e^{i k_u \frac{k_s}{k_r} z} \right|^2 \left[1 + \cos(N_u + N_d) \left(\frac{\gamma_r}{\gamma_j} \right)^2 \right] \quad (39)$$

根据 (39) 式，只要给出每个电子的能量就可以求出自发辐射的谱分布以及相应的增益分布。这种方法是有帮助的，因为单个电子的自发辐射谱计算是比较可靠的，而且只要准确

地算出模拟电子的能量分布，就可以保证 (39) 式计算结果的可靠性，而且也比较简单。在我们的计算中取 $N_j = 2048$ ，根据数值检验表明此值已经足以代表实际电子束的状态。 A 是一个与参数有关的常数，由于我们只关心自发辐射相对谱强度，因此 A 的具体数值可以不考虑。设电子束的能散度呈高斯分布，且由均方根宽度 σ 确定能散度的大小，给定 σ 即可由特定的随机抽样办法，求得 2048 个电子的 γ_j 。我们取 $\sigma/\gamma_r = 0.001$ 和 0.005 ，即均方根能散度 $1/1000$ 和 $5/1000$ ，根据 (39) 式即可求出相对谱强度及对应的增益分布，结果如图 3(a)、(b) 和图 4(a)、(b)。从中可以看到 $\sigma/\gamma_r = 0.001$ 时最大增益 G 要比单能电子束下降近 20%，而 $\sigma/\gamma_r = 0.005$ 时则要下降 65%。由此可见电子束能散度对光学速调管自由电子激光的增益起着十分重要的作用。

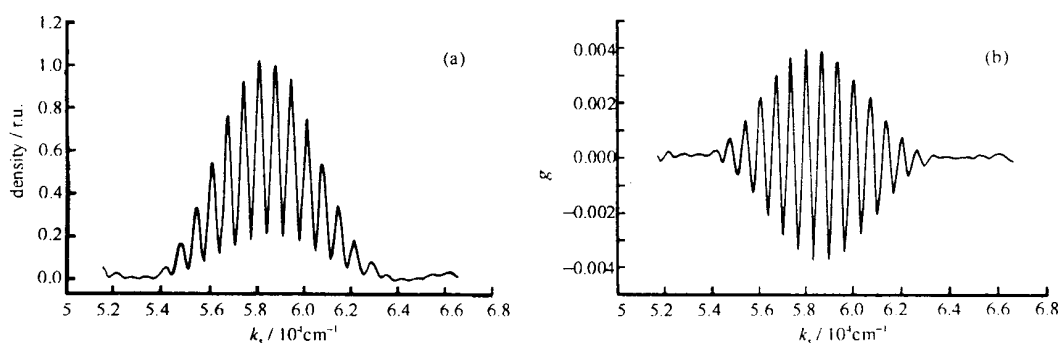


图 3 能散度为 $\sigma/\gamma_r = 0.001$ 的电子束的自发辐射谱(a)和小信号增益谱(b)

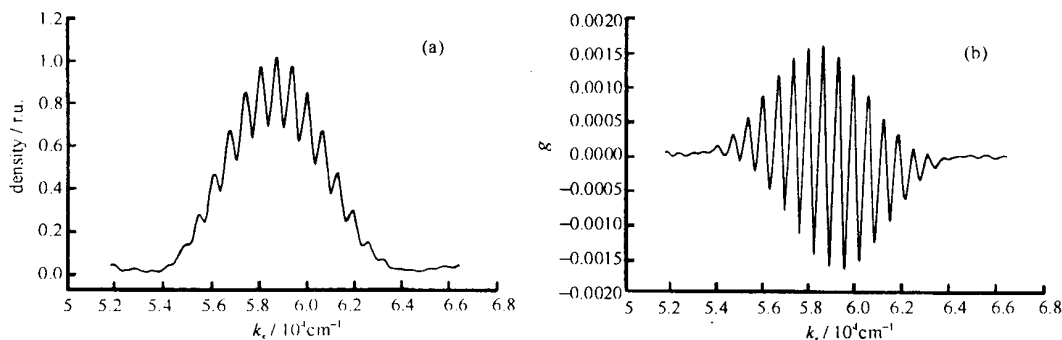


图 4 能散度为 $\sigma/\gamma_r = 0.005$ 的电子束的自发辐射谱(a)和小信号增益谱(b)

4 光学速调管谐波超辐射的计算

本节重点讨论密度已群聚的电子束在辐射段的谐波超辐射。

4.1 理论公式

根据于敏院士的单粒子理论，预聚束的电子束在辐射段 Undulator 内产生的谐波辐射

其无量纲电场振幅可以用下式描述^[7]

$$\begin{aligned} \frac{da_n(z)}{dz} = & i(-1)^m \frac{\omega_b^2}{4c\omega_n} \cdot \frac{a_u}{\gamma_0} \left[J_{m+1} \left(\frac{k_n a_u^2}{k_u 8\gamma_0^2} \right) \right] \\ & \cdot e^{-i \left[(2m+1)k_n + k_n \left(1 - \frac{1}{\beta_{\parallel}^{(0)}} \right) \right] z} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{i\omega_n t_0} f(t_0) dt_0 \end{aligned} \quad (40)$$

式中 z 是轴向空间自变量, m 是 Undulator 的谐波阶数, a_n 是 n 阶谐波超辐射的无量纲振幅(以 $|e|/2\pi\sqrt{2}m_e c^2 \lambda_u$ 归一化), a_u 是 Undulator 内无量纲磁场振幅(以 $|e|/2\pi\sqrt{2}m_e c^2 \lambda_u$ 归一化), λ_u 和 k_u 分别是 Undulator 的波长和波矢, $\omega_b^2 = 4\pi n_0 e^2 / m_e$, n_0 是电子束平均数密度, γ_0 是电子在 Undulator 内的共振能量, ω_0 和 $\omega_n = n\omega_0 = ck_n$ 分别是基波和 n 阶谐波的频率, ω_0 , λ_u , γ_0 满足共振关系。 $\beta_{\parallel}^{(0)} = [1 - (1 + a_u^2)/\gamma_0^2]^{1/2}$ 是电子在 Undulator 内的无量纲纵向速度(以 c 为单位)。在 (40) 式的解中, 我们感兴趣的是不稳定解, 即满足下列条件的解

$$(2m+1)k_u + \left(1 - \frac{1}{\beta_{\parallel}^{(0)}} \right) k_n \approx 0 \quad (41)$$

对固定的 k_n (或 ω_n), 只有一个 m 值 能满足(41)式, 由(41)式可以导出 $n=(2m+1)$, $m=1, 2, 3, \dots$ 。由此可知只能产生奇次谐波辐射。对 (40) 式求积分可以求的 Undulator 末端的 n 阶谐波辐射为

$$\begin{aligned} a_n(L_u) = & (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{L_u a_u \omega_b^2}{4c\omega_n \gamma_0} \left[J_{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{na_u^2}{4(1+a_u^2)} \right) - J_{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{na_u^2}{4(1+a_u^2)} \right) \right] \\ & \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t_0) e^{i\omega_n t_0} dt_0 \end{aligned} \quad (42)$$

$n=1, 3, 5, 7, \dots$

(42)式中 L_u 是 Undulator 的长度, $2\pi/\omega_0$ 是电子群聚的时间尺度。群聚电子束团是周期性重复出现的, 因此积分可以在一个束团内进行。如果知道了束团内电子的分布函数 $f(t_0)$, 就可以算出相应的辐射强度 $a_n(L_u)$ 。相应的超辐射功率密度为:

$$P_n(L_u) = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{m_e c \omega_n}{e} \right)^2 a_n^2(L_u) \quad (43)$$

4.2 解析解

如果电子束亮度很高, 光学速调管的加工质量很精密, 加上优化的设计, 电子束经过能量调制和密度调制后, 原则上可以接近理想群聚的情况。此时电子束团 $f(t_0)$ 可以用下式来描述

$$f(t_0) = \sum_{l=0}^N \delta \left(t_0 - l \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right) \quad (44)$$

这里 $2\pi c/\omega_0 = \lambda_0$ 是基波的波长, $2\pi/\omega_0$ 是一个束团之间的时间间隔, N 是束团的个数, (42) 式的积分可以在一个束团内进行。把 (44) 式代入 (42) 式并完成积分可以求得

$$a_n(L_u) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} i \frac{\omega_b^2 a_u}{4c\omega_n \gamma_0} \left[J_{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{na_u^2}{4(1+a_u^2)} \right) - J_{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{na_u^2}{4(1+a_u^2)} \right) \right] L_u \quad (45)$$

相应的谐波超辐射的功率密度为

$$P_n(L_u) = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{m_e c \omega_n}{e} \right)^2 \frac{\omega_b^2 L_u^2 a_u^2}{16c^2 \omega_n^2 \gamma_0^2} \left[J_{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{na_u^2}{4(1+a_u^2)} \right) - J_{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{na_u^2}{4(1+a_u^2)} \right) \right] L_u \quad (46)$$

由(46)式可知, 理想群聚条件下谐波超辐射的功率密度随电子束密度平方 n_0^2 成正比, 这是典型的超辐射特性。在其它机理的自由电子激光过程中, 激光功率密度随 n_0 的增长达不到如此高的程度。

实际情况的电子束由于各种因素的影响, 经能量调制和密度调制后达不到理想群聚变(44)式的状态, 而是相空间有一个分布, 文献[16]详细推导了电流的分布表达式

$$f(t_0) = \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(m\eta) \cos m(\omega_0 t_0 - \phi) \right] \quad (47)$$

$\eta = 4\pi N_d \Delta\gamma_{\max} / \gamma_0$ 称色散度的密度群聚参数, $\phi = L_d \omega_0 / c\beta_{\parallel}$ 称为色散段的渡越相位, L_d 是色散段的长度, 都是由能量调制段和密度调制段(又称色散段)的参数确定的。把(47)式代入(42)式并完成一系列数学运算则可求得

$$a_n(L_u) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} i \frac{L_u a_u \omega_b^2}{4c\omega_n \gamma_0} \left[J_{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{na_u^2}{4(1+a_u^2)} \right) - J_{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{na_u^2}{4(1+a_u^2)} \right) \right] \cdot \sum_{m=1}^{\infty} J_m(m\eta) \left[\delta_{mn} e^{i(m\phi)} + \frac{(-1)^{n+m}}{(n+m)} e^{-i(m\phi)} \right] \quad (48)$$

其中

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{当 } m = n \\ \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)} & \text{当 } m \neq n \end{cases} \quad (49)$$

把 $a_n(L_u)$ 代入(43)式即可以求出各阶谐波的功率密度来。对一具体实施的实验装置, 电子束和光学速调管的参数都是确定的, 因此从(43)式和(48)式可以算出它们的谐波超辐射功率。这样我们就得到了光学速调管内谐波超辐射的解析式子和相应的数值结果。

4.3 分析

由(48)式可以看出, 当电子束和光学速调管的参数确定之后, 第 n 阶谐波超辐射的强度主要取决于(48)式求和号以后的值, 即电子束密度群聚的谐波分量。由文献[16]计算可知, 电子束密度群聚的表达式可以写为

$$I(t_0) = \frac{I_0}{1 - \eta \cos(\omega_0 t_0)} \quad (50)$$

其中 I_0 是初始电子束的电流。从(50)式可以看出, 如果 $\eta \leq 1$ 时, 可以获得极好的、接近于理想的密度调制。 $\eta = 4\pi N_d \Delta\gamma_{\max} / \gamma_0$, N_d 是由光学速调管密度调制的设计参数确定的, 因此原则上, 可以通过改变电子束能量调制参数 $\Delta\gamma_{\max}$ 和密度调制参数 N_d , 总能达到 $\eta \leq 1$ 的要求, 因此 $J_m(m\eta) \approx J_m(m)$ 。由 $J_m(m)$ 函数的极大值分布曲线可以看出, 随着阶数的增高, $J_m(m)$ 的值也越来越小, 此外因子 $1/(n-m)$ 和也随着 m 值的增加而下降, 因此(48)

式求和号中的主要的贡献来自 $m = 1, 2, 3$ 等低阶谐波项，即接近正弦分布的电流的贡献。

上述分析忽略了电子束的能散度、发射度、空间分布等因素的影响，也没有考虑光学速调管因加工过程引起的公差因素。从实际数值计算过程来看，其中起主要作用的是电子束的能散度，对电子束的能量调制有比较明显的影响，这些现象本文第 2 节已进行了讨论。

考虑了电子束的上述效应，用数值计算的办法可以比较严格地算出电子束的分布函数 $f(t_0)$ ，把 $f(t_0)$ 代入 (42) 式，完成数值积分同样可以很方便地求出谐波超辐射的功率来。因此本文提出的一套办法，可以计算不同情况下光学速调管内的谐波超辐射的功率。本方法对光学速调管的优化设计是有实际参考价值的。

5 磁场误差对电子束能量调制的影响

实际使用的能量调制器，因加工过程中的公差、磁块性能的不均匀，存在磁场随机误差，它使得每一个电子的横向速度产生一个随机变化，进而引起电子轨道的偏离和相位的抖动，使电子束质量变坏。本文主要采用实验测量的磁场分布值，讨论磁场误差对电子束的能量调制的影响。磁场误差引起的其它效应可以参阅文献[15]。

5.1 方程式的建立

实验采用的外激光是一束功率高达数十 MW，波长 $\lambda_s = 1.06 \mu\text{m}$ ， x 方向极化的高斯光束，其瑞利 (Rayleigh) 长度 $Z_R = \pi W^2 / \lambda_s$ ， W 是束腰半径，一般为几 mm，因此 $Z_R \approx 10 \text{m}$ ，而能量调制器的长度仅 1 m 左右，此外光场只对电子束进行能量调制，并无净的能量增益。因此可以把激光束用常振幅平面波描述

$$E_s = e_x \sqrt{2} E_s \cos(k_s z - \omega_s t + \phi_s) \quad (51)$$

式中， e_x 是 x 方向单位矢量，波矢 $k_s = \omega_s / c$ ， ω_s 是频率， ϕ_s 为初始相位。通常用无量纲振幅 $a_s = e_s / k_s = |e| E_s / (m_e c^2 k_s)$ 来表示光场的强度， E_s 是光场振幅，由外激光源的功率确定。

理想的波荡器磁场可以用余弦函数 $B_u = e_y B_u \cos(k_u z)$ 来描述，其中 e_y 是 y 方向单位矢量，振幅 B_u 和波矢 $k_u = 2\pi / \lambda_u$ 是常数， λ_u 是波荡器周期长度， z 是磁轴方向变量。实测的磁场分布可以用函数 $B_u = e_y \bar{B}_u (1 + \delta_n) \cos[(k_u^0 (1 + \eta_n)] z$ 来表示，其中 \bar{B}_u 是峰值磁场振幅的平均值， δ_n 是每个峰值磁场与 \bar{B}_u 之间的相对偏差，设计的波荡器波矢 $k_u^0 = 2\pi / \lambda_u^0$ ， η_n 是每个周期 k_u 实验测量值与设计值的相对偏差。假定，在一个周期 λ_u 距离内，用峰、谷磁场振幅的平均值作为该周期的磁场振幅，由此可以确定该周期相对偏差 δ_n 值。这种做法和文献[15]的思想是一致的，这种近似会出现电子速度的跳跃，但 δ_n 值一般都小 1%，因此仍可以作为很好的近似方法。

在磁场中电子的运动速度可以表达为

$$v = e_x \frac{\sqrt{2} c a_u (1 + \delta_n)}{\gamma} \sin[k_u^0 (1 + \eta_n)] \quad (52)$$

式中， $a_u = |e| \bar{B}_u / (\sqrt{2} m_e c^2 k_u^0)$ 是平均后的无量纲均方根磁场。

电子和光场之间的能量交换方程为

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{e}{m_e c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_s = -\frac{a_u e_s c}{\gamma} (1 + \delta_n) \left\{ \sin[k_s + k_u^0 (1 + \eta_n) z - \omega_s t + \phi_s] - \sin[k_s + k_u^0 (1 + \eta_n) z - \omega_s t + \phi_s - 2k_u^0 (1 + \eta_n) z] \right\} \quad (53)$$

定义 $\psi_0 = (k_u^0 + k_s)z - \omega_s t + \phi_s$ ，为电子在有质动力势中的相位。根据电子在波荡器内正则运动方程可以求得电子的纵向运动速度^[14]，并对时间求积分，通过一系列运算可以求得

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{a_u e_s c (1 + \delta_n)}{\gamma} [\sin(\psi_0 + \psi_1) - \sin(\psi_0 + \psi_1 - 2k_u^0 (1 + \eta_n) z_0)] \quad (54)$$

式中， ψ_0 为慢变部分相位， $\psi_1 = \xi_n \sin[2k_u^0 (1 + \eta_n) z_0]$ 为快变部分相位，其中 $\xi_n = \frac{a_u^2}{2(1 + a_u^2)} \cdot$

$$\left[\frac{1}{2} \sum_n \frac{(1 + \delta_n)^2}{(1 + \eta_n)} \right], \quad a_u = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n(z)。$$

不考虑高阶谐波，对快变部分在一个 λ_u^0 周期内进行平均，由于 γ 、 e_s 变化极小，可以当常数处理。令 $\theta = 2k_u^0 (1 + \eta_n) z_0$ ，并利用等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\xi_n \sin\theta) d\theta &= J_0(\xi_n), & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\xi_n \sin\theta - \theta) d\theta &= J_1(\xi_n) \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\xi_n \sin\theta) d\theta &= 0, & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\xi_n \sin\theta - \theta) d\theta &= 0 \end{aligned}$$

(54) 式可以简化成第 j 个电子在波荡器内能量变化的方程式

$$\frac{d\gamma_j}{dt} = -\frac{a_u e_s c}{\gamma_j} (1 + \delta_n) [J_0(\xi_n) - J_1(\xi_n)] \sin\psi_{0j} \quad (55)$$

ψ_{0j} 是第 j 个电子的初始相位。由 (55) 式可以看出，与不考虑磁场误差时的公式相比，主要差别在于引进了磁场振幅随机误差因子 δ_n 和因周期随机误差引起的对 ξ_n 的影响。

采用零级近似、一级近似和三维数值计算三种不同办法，对光学速调管内电子束的能量调制^[8]进行了计算和分析，结果表明三种不同方法的差别不大于 5%。因此可以采用零级近似来求解，即电子经过波荡器与外激光源进行能量调制后的能量为

$$\gamma_j = \gamma_{j0} - \int_0^{L_u} \frac{a_u e_s}{\gamma} (1 + \delta_n) [J_0(\xi_n) - J_1(\xi_n)] \sin\psi_{0j} dz \quad (56)$$

这里 $L_u = N\lambda_u^0$ 是波荡器的长度， N 是波荡器的周期数，电场振幅和电子能量、相位的变化极其微小，可以作为常数处理。积分可以分成 N 段进行，即在每个 λ_u 内进行，在每个 λ_u 内 δ_n 和 η_n 都是常数，因此 (56) 式可以写成如下形式

$$\gamma_j = \gamma_{j0} - \frac{e_s a_u \lambda_u^0}{\gamma_{0j}} f [J_0(\xi) - J_1(\xi)] \sin\psi_{0j} \quad (57)$$

$$f = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{(1 + \delta_n) [J_0(\xi_n) - J_1(\xi_n)]}{J_0(\xi) - J_1(\xi)} \quad (58)$$

式中 $\xi = a_u^2 / 2(1 + a_u^2)$ 。(57) 式除因子 f 外，和无磁场随机误差的结果是完全一致的。

5.2 分析和结论

除前半个周期和最后半个周期因端点效应外，其余 11 个周期的实测磁场 B_u 值、 λ_u 值以及 δ_n 和 η_n 分别在表 1 中列出。11 个周期的磁场平均值是 $\bar{B}_u = 0.2968 \text{ T}$ ，相应的波荡器特征参数 $K = \sqrt{2}a_u = 1.9946$ ，这样就可以计算出 δ_n ，由实验得到的 λ_u 就可以算出相应的 η_n 来。由表 2 可以看出， η_n 的值是极小的，它的影响完全可以略去。此外 δ_n 的值也是比较小的，一般在 1% 以下，因此作 $(1 + \delta_n)^2 \approx 1 + 2\delta_n$ 的近似是可以的。 δ_n 有正有负，于是 $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (1 + \delta_n)^2 \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (1 + 2\delta_n) \approx 1$ 是一个很好的近似。在(58)式中令 $\xi_n \approx \xi$ ，可以直接推出 $f \approx 1$ ，即合肥光学速调管的磁场随机误差，不会对电子束的能量调制产生实质性的影响。

表 2 光学速调管轴上实测磁场值

N	1	2	3	4	5	6
B_u/G	3007.88	2934.63	2970.65	2944.53	2967.52	2956.94
δ_n	0.0134	-0.0113	0.00058	-0.00794	-0.0002	-0.00376
λ_u/mm	73	72	71.995	72	72.005	72
η_n	0.014	0	-0.000069	0	0.000069	0

N	7	8	9	10	11
B_u/G	2978.97	3006.89	2999.72	2970.75	2910.65
δ_n	0.00366	0.0131	0.0106	0.00089	-0.00194
λ_u/mm	72.005	71.995	71.995	72.005	71.995
η_n	-0.000069	-0.000069	-0.000069	0.000069	-0.000069

6 结束语

本文讨论了光学度调管内自由电子激光的全过程，包括光学速调管内磁场的计算，电子束的能量调制以及能散度对能量调制的影响，磁场误差对电子束能量调制的影响，电子束的密度调制，光学速调管的自发辐射谱和增益谱，光速调管的谐波超辐射等。所有这些过程的描述基本上是结合合肥同步辐射环上的自由电子激光实验装置进行的，因此本文的结论和公式，可以直接为该装置所用，这也是本文的实际价值和意义。

参 考 文 献

- 1 Billardon M, et al. IEEE J. Quant. Electron EQ-21 (7) (1985), 805; M. E. Couproe et al. Nucl. Inst. Meth. In Phys. Resea., 1990(A296): 13
- 2 Kulipanov G N, et al. Nucl. Inst. Meth. In Physy. Resea., 1990(A296): 1
- 3 Y. Wu, Nucl. Inst. Meth. In Phys. Resea., 1994(A341): 363
- 4 Vinokurov N A, Skrinsky A N. Preprint 77-59 of the INP, USSR, 1997

- 5 D. A. G. Deacon and J. M. Ortega, Laser Handbook Vol. 6(North-Holland, 1990), 345
- 6 Brau C A. Free Electron Laser (Academic Press, 1990), 82~85
- 7 于敏. 强激光与粒子束, 1991, 3(2): 127
- 8 杨震华, 武玉璞. 物理学报, 1997, 46(2): 279
- 9 Kincaid B M, Freeman R R. Free Electron Generation of Extreme UV Coherent Radiation AIP, New York, 1983, 110
- 10 何多慧, 贾启卡. 相干谐波自由电子激光课题报告. 合肥国家同步辐射实验室报告, 1993
- 11 Elleaume P. Bendor free electron laser conference, 1983, cl:133
- 12 Gover L K, Pantell R H. IEEE J Quant Electronics, 1985, QE-21: 944
- 13 杰克逊 J.D. 经典电动力学(下). 北京: 人民教育出版社, 1980
- 14 Brau C A. Free electron laser. New York: Academic Press, 1990
- 15 Kincaid B M. Nucl Inst in Phys Research, 1986, A250: 499
- 16 杨震华, 武玉璞. 计算物理. 1998, 15(5): 595



杨震华：北京应用物理与计算数学研究所，
研究员，1962年毕业于北京大学物理系。
YANG Zhenhua: Professor of Beijing
Institute of Applied Physics and
Computational Mathematics. Graduate
from the Department of Physics, Peking
University in 1962.