

## **“The influence of tested body size upon longitudinal ultrasonic pulse velocity”**

**Roberto Suárez Antola**

Facultad de Ingeniería  
Universidad Católica del Uruguay  
Dirección Nacional de Tecnología Nuclear  
Ministerio de Industria, Energía y Minería

### Summary

Low ultrasonic frequencies are used in non destructive testing of heterogeneous materials, such as concrete, rocks and timber. When frequencies are low enough, size and shape of tested bodies may influence measured longitudinal pulse velocities (geometric dispersion). A simplified mathematical model is developed from known experimental and theoretical results obtained for elastic wave propagation in rods of uniform circular cross section. Wave propagation is described by a spatial averaged dilatational field in an approach which is named “quasi-fluid”. A formula is obtained which relates group velocity with an effective lateral size of the body, with transducer’s frequency, with a non-dimensional parameter and with asymptotic P-wave velocity. In principle it can be applied to bars of any uniform cross section. The limitations of this formula are discussed in relation to path length, threshold of detection, patterns of radiation and reception and other variables. A more general formula is proposed. Practical application of this formula is briefly exemplified using some experimental data obtained by the author. The problem of longitudinal pulse propagation in reinforcing steel bars embedded in concrete is briefly considered.

**Key-words: ultrasonic, non destructive testing, geometric dispersion, longitudinal wave velocity, concrete.**

- Presentado en el “IIIrd Non Destructive Testing Congress for Latin American and the Caribbean”  
(Caracas, Venezuela, 25 al 28 de noviembre de 1990)
- Trabajo efectuado en el marco del convenio entre la Universidad Católica del Uruguay y el Ministerio de Industria, Energía y Minería.

# LA INFLUENCIA DE LAS DIMENSIONES DEL CUERPO ENSAYADO SOBRE LA VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE LOS PULSOS ULTRASONICOS LONGITUDINALES.

**Roberto Suárez Ántola**

Facultad de Ingeniería  
Universidad Católica del Uruguay  
Dirección Nacional de Tecnología Nuclear  
Ministerio de Industria, Energía y Minería

## Introducción

En el ensayo ultrasónico de materiales heterogéneos, tales como hormigones, maderas y rocas, los pulsos sufren reiterados procesos de dispersión y absorción propiamente dicha causada por diferentes mecanismos de fricción interna.

Para disminuir los efectos de la atenuación es necesario emplear frecuencias ultrasónicas sensiblemente menores que las empleadas en el ensayo ultrasónico de metales. Así mismo se suele emplear el método de transparencia (un cabezal emisor y un cabezal receptor) en lugar del método del impulso-eco (un único cabezal emisor-receptor) para determinar el tiempo de tránsito de los pulsos a través del cuerpo ensayado.

Muchos de los equipos usados en prácticas de campo en la actualidad miden el tiempo de tránsito de pulsos longitudinales (que como es sabido son los más rápidos) entre el cabezal emisor y el cabezal receptor.

Con este dato y con la distancia entre el emisor y el receptor se calcula la velocidad promedio aparente del pulso longitudinal en el cuerpo ensayado.

Esta velocidad, cuando es adecuadamente interpretada, puede suministrar indicaciones valiosas sobre el estado del material ensayado.

Ahora bien, al ser menores las frecuencias utilizadas, son mayores las longitudes de onda en comparación con las longitudes que se generarían en el mismo material empleando las frecuencias comunes en el trabajo con metales.

En este caso es factible encontrar en la práctica cuerpos cuyas dimensiones transversales a la dirección de propagación de los pulsos son del orden de la longitud de onda que, en ese material, corresponde a la frecuencia empleada en el ensayo.

Los experimentos muestran que la velocidad aparente de propagación de los pulsos longitudinales se puede ver significativamente disminuida respecto del valor que se mediría en un cuerpo del mismo material, con las mismas propiedades, pero de mayores dimensiones (en dirección transversal a la de propagación de los pulsos). Si este efecto no es tenido en cuenta, puede

falsear las conclusiones obtenidas a partir del ensayo ultrasónico (Bungey, 1982; Chung y Law, 1983; Suárez Ántola, 1975).

Para un cuerpo homogéneo de forma arbitraria, si el camino directo entre el emisor y el receptor no presenta soluciones de continuidad, cabe esperar que la primera señal recibida sea un paquete de ondas longitudinales (ondas P) proveniente directamente del emisor. Este paquete podrá o no ser detectado según supere o no el umbral de detección del sistema. Si es detectado, la medición de la velocidad de propagación de las ondas longitudinales no se verá afectada por las dimensiones del cuerpo ensayado. Con posteridad a este primer paquete de ondas P, llegan al receptor sucesivos paquetes de ondas P, de ondas transversales (ondas S) y eventualmente, de ondas de superficie. Estas señales se originan en procesos de reflexión y de conversión de modos en la frontera del cuerpo. (Exceptuando el paquete directo de ondas S, proveniente del emisor, que llega algo después que el paquete directo de ondas P ya mencionado). Como consecuencia el tiempo que emplean en alcanzar el receptor depende de la forma y dimensiones del cuerpo ensayado, así como de las características y la posición de los cabezales.

En principio, aplicando métodos de cálculo numérico se puede describir lo que pasa en cada caso concreto, utilizando las ecuaciones de la mecánica de los medios continuos junto con las relaciones constitutivas propias del material ensayado y las condiciones de borde correspondientes al cuerpo y a las propiedades y a la disposición de los cabezales en el ensayo. Naturalmente, este enfoque numérico es complicado. (Bond, 1982)

Debe ser reiterado muchas veces, para distintas disposiciones de los cabezales, distintas frecuencias de onda, distintas dimensiones del cuerpo ensayado, etc., con el objeto de poder desprender del conjunto de resultados relaciones generales significativas entre las variables intervinientes.

No obstante es posible obtener expresiones analíticas sencillas a partir de modelos simplificados del proceso de propagación. El propósito del presente trabajo es proponer una expresión de este tipo y discutir sus límites de validez.

### Algunos resultados experimentales

En las tablas 1 y 2 se presentan algunos datos experimentales sobre el efecto de las dimensiones transversales del cuerpo ensayado sobre la velocidad aparente de propagación de los pulsos longitudinales. Para efectuar las mediciones se empleó en todos los casos un equipo ultrasónico PUNDIT.

Las mediciones se efectuaron por el método de transparencia empleando transductores de 54 kHz. Este equipo suministra una indicación digital del tiempo de tránsito del pulso longitudinal que posee una amplitud por encima de un valor umbral y que llega primero al transductor receptor.

### Las soluciones de Pochhammer:

En 1876 Pochhammer publica una solución de las ecuaciones de la elastodinámica para describir la propagación de ondas armónicas longitudinales, en estado de régimen, en una barra de sección transversal circular y longitud infinita. Supone que el campo de desplazamientos posee simetría axial en torno del eje de la barra. Supone, además, que el campo de tensiones se anula en la frontera (en la superficie cilíndrica de la barra). Obtiene el desplazamiento como suma de dos campos componentes, uno irrotacional y el otro solenoidal. Ambos se propagan con la misma velocidad de fase a lo largo del eje de la barra.

La condición de anulación de las tensiones en la superficie cilíndrica conduce a una ecuación denominada "ecuación de las frecuencias", cuya solución origina una sucesión de modos de propagación posibles. A cada modo le corresponde una relación de dispersión entre la frecuencia de la onda y el número de ondas.

La complejidad de la ecuación de la frecuencia impide el estudio detallado de los modos de propagación de las ondas longitudinales hasta que aparecen medios de cómputos adecuados a fines de la década del cuarenta.

Los cálculos efectuados posteriormente muestran que el modo de propagación de orden más bajo está definido para todas las frecuencias (Kolsky, 1964).

Cuando las longitudes de onda correspondientes son grandes respecto del radio de la barra, la velocidad de fase en este modo tiende a la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un medio unidimensional. (Este caso límite ya había sido estudiado por Rayleigh en 1894).

Por el contrario, cuando las longitudes de onda son pequeñas respecto del radio, el campo de desplazamiento en este modo se aproxima al correspondiente a las ondas de superficie de Rayleigh, y la velocidad de fase tiende, en consecuencia, a la velocidad de propagación de las ondas R.

Los modos de propagación siguientes presentan velocidades de fase que tienden a  $v_L$ , la velocidad de las ondas P en un medio no acotado, cuando el cociente entre la longitud de ondas  $\lambda$ , y el radio R tiende a cero (Mason 1959). A medida que aumenta el número de ondas predomina cada vez más la componente longitudinal  $S_z$  del campo de desplazamientos respecto de la componente radial  $S_r$ . El análisis numérico de las soluciones de Pochhammer para los primeros modos (Mc Skimin, 1956) muestra que tanto la amplitud de la componente longitudinal como la amplitud de la componente radial del campo de desplazamientos presentan numerosas oscilaciones espaciales al avanzar en dirección radial sobre una misma sección transversal al eje de la barra. Estas pequeñas oscilaciones se deben a los procesos de interferencia de las ondas provenientes de la conversión de modos por reflexión en la frontera del cuerpo.

Las figuras 1 y 2 muestran una representación cualitativa de las amplitudes de  $S_z$  y  $S_r$  en función de la distancia al eje de la barra, en un caso en el que  $\frac{\lambda}{R}$  es pequeño respecto de la unidad.

### La aproximación mediante una guía de ondas fluida

Todos estos resultados teóricos obtenidos del análisis numérico de la solución de Pochhammer se refieren a la propagación de ondas estrictamente monocromáticas, en régimen, en una barra de sección circular de longitud infinita. Las situaciones experimentales más próximas involucran barras finitas excitadas por pulsos en uno de sus extremos mediante un transductor emisor y cargadas en el otro extremo por un transductor receptor. El pulso excitador se puede descomponer en un espectro de frecuencias, aplicando las soluciones de Pchhammer a cada una de estas frecuencias y recombinando luego los campos componentes para obtener el campo resultante. Las expresiones para cada modo de propagación por separado no se pueden aplicar en barras finitas porque en general no verifican las condiciones de borde en los extremos. Esto complica considerablemente el análisis.

Afortunadamente los resultados experimentales de Mc Skimin (1948) sugieren que los componentes de dilatación de un tren de ondas de corta duración de longitud de onda pequeña respecto del radio, se pueden considerar guiados a lo largo de la barra como si ésta fuera una guía de ondas fluida que alivia presiones en su frontera.

Entre una barra sólida y una guía de ondas fluida hay una diferencia esencial que es el proceso de conversión de modos durante la reflexión en la frontera. Este proceso en el caso del sólido produce un drenaje permanente en la energía original del pulso de ondas longitudinales.

Parte de la energía perdida vuelve por reconversión de modos. Para una barra lo suficientemente larga y en ausencia de procesos disipativos (absorción), cabe esperar que cada una de las componentes armónicas en las que puede descomponerse el pulso se propague finalmente en un estado de régimen.

Las oscilaciones en pequeña escala que presenta la amplitud de los campos sobre una misma sección transversal al eje de la barra, no tienen equivalente en el caso de una guía de ondas fluida. No obstante se pueden eliminar promediando cada campo sobre un área pequeña respecto del área de la sección transversal de la barra pero de un orden numérico mayor que la escala espacial asociada a esas pequeñas oscilaciones. (Para una oscilación armónica de longitud de onda  $\lambda$  la escala espacial es  $(\lambda/2\pi)$ ). Sobre la forma de asignar escalas a las funciones ver Lin y Segel (1988).

Después de este proceso de promediado, las amplitudes de los campos

presentan variaciones más suaves, comunes tanto a guías de ondas sólidas como fluidas.

Consideremos ahora la dilatación cúbica, que es la divergencia del campo de desplazamientos. Tanto ella como el campo promediado que origina verifican una ecuación de ondas clásicas, en tres dimensiones, en la que  $v_L$  es la velocidad de las ondas (Landau y Lifchitz, 1970). En lo que sigue supondremos que las condiciones en la frontera de la barra se pueden expresar exclusivamente en términos de la dilatación cúbica promediada  $\phi$  (aproximación cuasi-fluida).

Esto no puede ser estrictamente así para un sólido, pero se admitirá para simplificar el análisis. Admitida la aproximación cuasi-fluida, si la propagación se produce como en una guía de ondas que alivia presiones, entonces  $\phi$  deberá anularse en la superficie cilíndrica de la barra, o sea para  $r=R$ , donde  $r$  representa la distancia del punto considerado al eje de la barra.

Consideramos una guía de ondas de sección transversal circular uniforme, semi-infinita, en cuyo extremo se encuentra un emisor que produce un pulso con simetría axial respecto del eje de la guía.

Introduciendo un sistema de coordenadas cilíndricas con semieje  $z$  positivo coincidente con el de la barra de forma que en  $z=0$  se encuentra el extremo con el transductor emisor, el campo promedio de dilatación puede hallarse escribiendo la ecuación de ondas en coordenadas cilíndricas y buscando soluciones de la forma  $v(r)e^{i(\omega t - k_z z)}$ , que corresponden a ondas armónicas que viajan desde el extremo donde está el emisor hacia el interior de la guía. La sustitución de este ansatz en la ecuación de ondas origina una ecuación de Bessel de orden cero para  $v(r)$ . Las soluciones admisibles (sin singularidades en el origen) son las funciones  $J_0(k_c r)$ , donde  $J_0(\zeta)$  es la función de Bessel de primera especie y orden cero mientras que  $k_c$  verifica la relación de dispersión

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{v_L^2} - k^2.$$

Imponiendo la condición  $v_r = 0$  en la frontera de la barra, resulta que  $J_0(k_c R)$  debe anularse. Como consecuencia los únicos valores de  $k_c$  admisibles son los  $k_{cn} = (\alpha_n/R)$  donde  $\alpha_n$  es el  $n$ -ésimo cero de  $J_0(\zeta)$ . (Los primeros cinco ceros son:  $\alpha_1 = 2,40$ ;  $\alpha_2 = 5,52$ ;  $\alpha_3 = 8,65$ ;  $\alpha_4 = 11,79$ ;  $\alpha_5 = 14,93$ ).

En consecuencia la relación de dispersión puede re-escribirse así:

$$\omega^2 = \omega_{cn}^2 + v_L^2 k_n^2 \quad [1]$$

$$\text{donde } \omega_{cn} = \frac{\alpha_n v_L}{R} \quad [2]$$

Suponiendo modos de propagación con distintos valores de  $n$  y de  $\omega$  se obtiene el siguiente desarrollo para el campo promediado de dilatación cúbica:

$$\phi(t, r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t, z) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \quad [3]$$

$$\text{En esta fórmula } h_n(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_n(\omega) e^{i\psi_n(t, z, \omega)} d\omega \quad [4]$$

$$\text{donde } \psi_n(t, z, \omega) = \omega t - k_n(\omega)z \quad [5]$$

El número de ondas en el modo  $n$ -ésimo verifica a su vez la relación de dispersión [1].

En  $z=0$ ,  $\phi(t, r, 0)$  es el campo impuesto por el transductor emisor. Poniendo  $z=0$  en [3], introduciendo [4] e intercambiando  $\Sigma$  con  $\int$  se obtiene, para  $0 \leq r \leq R$

$$\phi(t, r, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\omega) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right\} e^{i\omega t} d\omega$$

Si efectuamos la descomposición espectral del pulso excitador de la forma

$$\phi(t, r, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega, r) e^{i\omega t} d\omega \quad [6]$$

resulta que la densidad espectral  $g(\omega, r)$  se debe poder expresar así

$$g(\omega, r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\omega) J_0(\alpha_n r/R) \quad [7]$$

Puesto que  $g(\omega, r)$  es en principio conocida, podemos hallar las funciones  $A_n(\omega)$  mediante la fórmula:

$$A_n(\omega) = \frac{2}{R^2} \times \frac{1}{J_1(\alpha_n)} \times \int_0^R g(\omega, r) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) r dr \quad [8]$$

que se obtiene de la teoría de las funciones de Bessel (Aquí  $J_1(\zeta)$  es la función de Bessel de primera especie y orden uno, ver pe. Ll. P. Smith, 1961).

La descomposición espectral del pulso excitador introduce para cada frecuencia del espectro una vibración  $g(\omega, r) e^{i\omega t}$  que dura indefinidamente, tanto hacia el pasado como hacia el futuro y que se propaga repartida entre los distintos modos de índice  $n$  de acuerdo con las amplitudes  $A_n(\omega)$ .

La función  $h_n(t, z)$  describe la propagación, desde el emisor, de la fracción del total de energía del pulso que viaja en el modo  $n$ -ésimo de la guía de ondas. Es una superposición de ondas armónicas cuyas velocidades de fase y de grupo son, respectivamente:

$$v_{gn}(\omega) = \left( v_L / \sqrt{1 - \frac{\omega_{cn}^2}{\omega^2}} \right) \quad [9]$$

$$v_{gn}(\omega) = v_L \times \sqrt{1 - \frac{\omega_{cn}^2}{\omega^2}} \quad [10]$$

Como consecuencia de la variación de la velocidad de fase con la frecuencia cabe esperar que el paquete de ondas asociado al  $n$ -ésimo modo se ensanche progresivamente a medida que transcurre el tiempo. No obstante, si el espectro del pulso excitador presenta una frecuencia central bien definida  $\omega_0$  y si el ancho de banda del mencionado espectro en torno a  $\omega_0$  es tal que la variación relativa de la velocidad de grupo en ese intervalo de frecuencias es pequeña respecto de la unidad, entonces la energía del pulso excitador asociada al modo  $n$ -ésimo se propaga, en primera aproximación, con la velocidad de grupo (Brillouin, 1960; Sommerfeld, 1964).

De la definición [2] de la frecuencia de corte  $\omega_{cn}$  y de la fórmula [10] para la velocidad de grupo obtenemos finalmente,

$$v_{gn}(\omega_0) = v_L \sqrt{1 - \frac{\alpha_n^2 v_L^2}{\omega_0^2 R^2}} \quad [11]$$

Puesto que los ceros de la función de Bessel  $J_0(\zeta)$  forman una sucesión estrictamente creciente con el índice  $n$ , la velocidad de grupo disminuye al aumentar el índice del modo, en una misma barra y para un mismo emisor.

Supóngase, como es el caso del equipo PUNDIT mencionado previamente, que el sistema de medición determina el tiempo de tránsito del pulso más rápido de entre todos los pulsos que superan el umbral de detección.

Si la barra es lo suficientemente larga como para poder aplicar el modelo de una guía de ondas semi-infinita, la velocidad aparente medida corresponderá al modo de menor índice entre todos aquellos modos que alcanzan el receptor con pulsos de amplitud suficiente para superar el umbral de detección.

#### Generalización de la fórmula para la velocidad de grupo

El análisis previo mediante la aproximación cuasi-fluida se puede extender a guías de onda de sección transversal uniforme pero no circular –rectangular,



elípticas y otras- En todos estos casos la energía original del pulso excitador se reparte en principio en un conjunto de modos de propagación. Como ahora no es dable esperar simetría axial, aún para un emisor perfectamente simétrico, cada modo de propagación resulta caracterizado por un par de índices enteros positivos m y n.

Cada modo posee una relación de dispersión de la forma  $\omega^2 = \omega_c^2 + v_L^2 k^2$ . La frecuencia de corte  $\omega_c$  es proporcional a  $v_L$  e inversamente proporcional a una longitud característica  $L_T$  que depende de las dimensiones transversales de la barra y de los índices del modo. Así, para una guía de ondas de sección

rectangular cuyos lados miden a y b se tiene:  $\omega_{c,mn} = \frac{\pi\sqrt{2}v_L}{L_{T,mn}}$  donde, por

definición:  $\frac{1}{L_{T,mn}^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$  (con esta definición de  $L_{T,mn}$ , se tiene, para un

cuadrado ( $a=b$ ) y para el modo de índices más bajos ( $m=n=1$ ):  $L_{T,11} = a$ ). En

general se puede poner  $\omega_c = \gamma v_L / L_T$ , donde  $\gamma$  es un coeficiente adimensional.

Para la velocidad de grupo se tiene la fórmula siguiente:

$$v_g(\omega) = v_L \sqrt{1 - \frac{\gamma^2 v_L^2}{\omega^2 L_T^2}} \quad [12]$$

Esta fórmula relaciona velocidad de propagación de los pulsos longitudinales de frecuencia  $\omega$  en una barra de un material en el que las ondas P se propagan con velocidad  $v_L$  con las dimensiones laterales de la barra. En principio la longitud característica depende tanto de la forma y dimensiones de la sección transversal como de los índices correspondientes al modo de propagación detectado por el sistema de medición.

La fórmula [12] constituye la base para discutir el efecto de las dimensiones transversales del cuerpo sobre la velocidad aparente de propagación de los impulsos longitudinales.

Discusión:

La expresión [12] para la velocidad de grupo presenta en principio varias limitaciones importantes.

- (1) En primer lugar, un paquete de ondas en un medio dispersivo se propaga con una velocidad definida sólo si el ancho de banda en torno a la frecuencia portadora es lo suficientemente pequeño como para que la velocidad de fase presente una variación relativa pequeña respecto de la unidad, en ese intervalo de frecuencias. Si esta restricción no se cumple, el paquete de ondas se distorsiona mucho y el concepto de velocidad de grupo no resulta aplicable al pulso considerado.

- (2) Admitiendo que el pulso excitador es una señal de banda estrecha, es necesario que cumpla con una restricción adicional para que la expresión propuesta sea aplicable. Los resultados experimentales en los que se basa la aproximación cuasi-fluida, así como los resultados del análisis numérico de las soluciones de Pochhammer, sugieren que dicha aproximación se justifica solamente si la longitud de las ondas  $P$  en el material correspondiente a la frecuencia portadora del emisor

$$\lambda_{P0} = \left( \frac{2\pi v_L}{\omega_0} \right),$$

es pequeña respecto de la menor dimensión transversal al eje de la barra.

- (3) La dimensión característica  $L_T$  que aparece en la fórmula para la velocidad de grupo verifica una ecuación de la forma

$$\frac{1}{L_T} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \right) \quad [13]$$

donde  $a$  y  $b$  representan longitudes determinadas por las dimensiones y forma de la sección transversal de la barra, mientras que  $\alpha$  y  $\beta$  dependen del modo de propagación. Generalmente se excitan los modos más bajos, por lo que son números del mismo orden próximos a la unidad. Entonces en la determinación del valor  $L_T$  el mayor peso lo tendrá la menor de las dos dimensiones transversales.

Como consecuencia, la condición para que la fórmula propuesta describa adecuadamente el efecto de dispersión geométrica (el efecto de las dimensiones laterales sobre la velocidad de propagación) puede formularse estableciendo que el término de corrección

$$\frac{\gamma^2 v_L^2}{\omega_0^2 L_T^2} = \left( \frac{\gamma}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{\lambda_{P0}}{L} \right)^2$$

sea pequeño respecto de la unidad, para el modo de propagación considerado.

Si esta condición no se cumple, es necesario recurrir a la teoría iniciada por Pochhammer. Para la componente irrotacional del campo de desplazamientos esta teoría suministra una relación de dispersión que, para un modo de propagación dado, se puede escribir así:

$$\omega^2 = \omega_s^2 + v_L^2 k^2 \quad [14]$$

A diferencia de lo que ocurre en una guía de ondas fluida que alivia tensiones en su frontera, ahora  $\omega_s$  no es una frecuencia de corte de un filtro pasa alto. Es una función de la frecuencia angular  $\omega$ , de las dimensiones laterales de la barra, de la densidad del material y de sus

módulos de elasticidad. Esta función podría obtenerse, en principio, en forma numérica, a partir de la teoría de Pochhammer. Suponiendo conocida la función  $\omega_s(\omega)$ , a partir de la relación de dispersión se obtiene la velocidad de fase:

$$v_g(\omega) = \left( \frac{v_L}{\sqrt{1 - \frac{[\omega_s(\omega)]^2}{\omega^2}}} \right) \quad [15]$$

y la velocidad de grupo:

$$v_g(\omega) = v_L \left\{ \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}}}{\left( 1 - \frac{\partial \omega_s^2}{\partial \omega^2} \right)} \right\} \quad [16]$$

Ambas expresiones son exactas.

A medida que  $\omega$  aumenta,  $\omega_s$  tiende a la frecuencia de corte del modo correspondiente en la aproximación cuasi-fluida.

Este hecho sugiere representar la función  $\omega_s(\omega)$  mediante el desarrollo asintótico:

$$\omega_s(\omega) \approx \omega_c \left[ 1 + \sum_{P=1}^{\infty} c_P \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^P \right] \quad [17]$$

El parámetro  $\omega_c$  se puede hallar mediante la aproximación cuasi-fluida, mientras que los coeficientes  $c_p$  se pueden determinar para cada modo de propagación posible, por lo menos en principio, mediante la teoría elastodinámica.

En la práctica puede resultar útil emplear la fórmula [16] junto con la expresión

$\omega_c = (\gamma v_L / L_T)$  y el desarrollo asintótico [17] convenientemente truncado.

Efectuando una regresión no lineal de las velocidades aparentes medidas en función de distintos valores de  $L_T$  y de  $\omega$ , se pueden ajustar a los datos experimentales los parámetros  $v_L$ ,  $\gamma$  y los coeficientes adimensionales  $c_p$  involucrados.

A vía de ejemplo consideramos el ajuste de los parámetros de la fórmula [12] a los datos experimentales de la tabla 1. que corresponde a tomar  $\omega_s(\omega) = \omega_c$

Rescribiendo la expresión de la velocidad de grupo de esta forma:

$$v_g^2 = v_L^2 - (\gamma^2 v_L^4 / \omega^2) (1/L_T^2)$$

resulta que la relación entre  $v_g^2$  y  $\frac{1}{L_T^2}$  es una recta de coeficientes

$$a_0 = v_L^2 \text{ y } a_1 = -(\gamma^2 v_L^4 / \omega^2)$$

Tomando como valores de  $L_T$  los que aparecen en la tabla y ajustando por mínimos cuadrados se obtiene:

$$a_0 = 3.0575 \times 10^6 \frac{m^2}{seg^2} \text{ y } a_1 = -16.585 \frac{m^4}{seg^2}$$

con un coeficiente de correlación  $\rho = 0.97$

A partir del valor de  $a_0$  obtenemos la velocidad de las ondas P:

$$v_L = 1.748 \frac{m}{seg}$$

Sabiendo que la frecuencia del emisor es  $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = 54kHz$ , del valor de  $a_1$

y de  $v_L$ , se obtiene el parámetro adimensionado  $\gamma=3.55$ .

- (4) Como la distancia entre el transductor emisor y el transductor receptor es finita, cabe preguntarse sobre el efecto de dicha distancia en la velocidad aparente medida.

Dejando de lado las influencias de las heterogeneidades y de la viscoelasticidad, que se manifiestan asociadas con la longitud del trayecto de los pulsos, centraremos la discusión sobre el efecto de la distancia recorrida en la amplitud de la señal recogida por el receptor, correspondiente a la perturbación mecánica que llega sin haber sufrido interacciones con la frontera del cuerpo.

Suponiendo que los transductores se encuentran directamente enfrentados, a una distancia  $d$  lo suficientemente grande como para poder despreciar los efectos asociados al campo cercano de radiación, la amplitud de la señal recibida  $S_R$  se puede relacionar con la amplitud de la señal emitida  $S_E$ , para una componente armónica de frecuencia angular  $\omega$  mediante la expresión:

$$\frac{S_R(\omega)}{S_E(\omega)} = \frac{A_E \omega}{2\pi v_L d} \quad [18]$$

donde  $A_E$  es el área de la superficie efectiva del emisor. (Esta fórmula se puede deducir a partir de la fórmula obtenida por H. Friis en 1946 para antenas que radian y reciben ondas electromagnéticas. Se aplica también para ondas mecánicas longitudinales.)

Cuanto menor es la frecuencia de la onda armónica considerada, menor es el cociente de amplitudes de señal, porque mayor es el ancho del lóbulo principal del patrón de emisión del transductor emisor y en consecuencia la potencia emitida se debe repartir en un ángulo sólido mayor.

En igualdad de las demás condiciones, cuanto más baja es la frecuencia, mayor es la fracción de la energía de la onda que se refleja y sufre conversión de modos en la frontera del cuerpo. Como consecuencia, son las componentes de mayor frecuencia del espectro del pulso las que aportan la mayor parte de la energía de la señal directa recibida por el transductor receptor, en igualdad de amplitud de las señales emitidas en las diferentes frecuencias.

La amplitud de la señal recibida varía inversamente con la distancia entre el emisor y el receptor, de forma que cuando ésta es lo suficientemente grande la perturbación directa no supera el umbral y por ende no es detectada. La distancia a la cual esto comienza a ocurrir dependerá del espectro de amplitudes en función de las frecuencias de los pulsos emitidos, para el caso de transductores enfrentados. (Si no están enfrentados, la fórmula de Friis no se aplica sin más y es necesario tener en cuenta los patrones angulares de emisión y recepción.)

Cuando el emisor y el receptor están lo bastante próximos entre sí, la señal detectada corresponde siempre a la perturbación directa y la velocidad medida es, por tanto  $v_L$ .

La distancia a la que esto deja de ser así depende del espectro de frecuencias emitidas, de los patrones de radiación y recepción (que son iguales si el emisor y el receptor son iguales) y del umbral de detección del equipo de medición del tiempo de tránsito.

- (5) Una discusión cuantitativa completa exigiría tener en cuenta en forma explícita el efecto de las heterogeneidades y los mecanismos de fricción interna sobre la propagación de los pulsos longitudinales. Esto se halla fuera de los límites fijados para el presente trabajo. Si el material consiste en un conjunto de inclusiones en una matriz sólida, siendo las inclusiones de diámetros pequeños respecto de las longitudes de onda, se pueden hallar módulos de elasticidad efectivos y se pueden representar las propiedades anelásticas del medio compuesto (Kuster y Nafi, 1974) lo cual permite discutir la dispersión de las ondas longitudinales debida a estos efectos. Para un medio anelástico homogéneo los estudios teóricos y experimentales sobre propagación de los pulsos muestran la propagación de un "precursor elástico" con la velocidad de las ondas P, seguido de señales que viajan más lentamente (Pipkin, 1972). Sería necesario combinar estos estudios con el de la dispersión geométrica para obtener un marco teórico más completo. Otro efecto que debe ser tenido en cuenta es el de la anisotropía del material. Este efecto es particularmente importante en el ensayo de maderas, pero aparece también en el ensayo de hormigones y otros materiales compuestos actualmente en uso.

- (6) Chung (1978) introdujo una fórmula empírica para describir el efecto de las barras de refuerzo, paralelas al camino del pulso, sobre la velocidad aparente en hormigón armado. Bungey (1984), descubrió algunas limitaciones de la mencionada fórmula. Desde el punto de vista adoptado en el presente trabajo se puede describir la situación mediante un pulso que viaja simultáneamente en el acero y en el hormigón. En la aproximación cuasi-fluida el número de ondas  $k$  verifica

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v_{La}^2} - k_{ca}^2 = \frac{\omega^2}{v_{Lb}^2} - k_{cb}^2$$

La longitud de onda de una componente del pulso de frecuencia  $\omega$ , para una barra de radio  $R$  embebida en hormigón es mayor que la que tendría en una barra en aire, pero es menor que la que tendría en hormigón en masa. Este efecto se puede describir introduciendo un radio efectivo que es tanto mayor respecto de  $R$  cuanto menor es la diferencia entre la velocidad de las ondas  $P$  en el acero  $v_{La}$  y en el hormigón en masa  $v_{Lb}$ . Luego, ese radio efectivo se puede sustituir en la fórmula para la velocidad de grupo.

Esto se considerará en otro trabajo. (Ver Suárez Ántola y Suárez Bagnasco, 1999)

### Conclusiones

- (1) Para pulsos longitudinales de banda estrecha la velocidad aparente de propagación depende de la velocidad de las ondas  $P$ , de las dimensiones laterales del cuerpo ensayado, de la frecuencia portadora del pulso y del ancho de banda del espectro del pulso emitido, de las heterogeneidades en el material, de sus propiedades anelásticas y del umbral de detección del sistema de medición utilizado, del patrón de radiación y recepción (iguales si el emisor y el receptor son iguales), de la distancia entre el emisor y el receptor, de las dimensiones del emisor y del receptor.
- (2) Para su aplicación práctica se sugiere emplear la fórmula [16] para la velocidad de grupo, calculando  $\omega_b$  para el modo de propagación de índices más bajos en la aproximación cuasi-fluida, empleando el desarrollo asintótico [17] cortado en el segundo o tercer término y estimando a partir de los datos experimentales los parámetros  $v_L$ ,  $\gamma$  y  $c_1$  o  $v_L$ ,  $\gamma$ ,  $c_2$  y  $c_2$  mediante un ajuste por mínimos cuadrados.

## Bibliografía

- B. Auld (1973) "Acoustic fields and waves in solids", vol. II capítulos 12 y 13, Wiley N.Y.
- L. J. Bond (1982) "Methods for The Computer Modelling of Ultrasonic Waves in Solids" (R.S. Sharpe, Ed. "Research Techniques in NDT" Vol 6, Academic Press, N.Y).
- L. Brillouin (1960) "Wave Propagation and Group Velocity" (Academic Press, N.Y.)
- H. Bungey (1982) "The Testing of Concrete in Structures" (Surrey Univ. Press, London, capítulo 3)
- H. Bungey (1984) en "In- Situ NDT of Concrete" (V.Malhotra Ed., ACI, SP-82, Michigan)
- H. Chung (1978) "Effects on embedded bars upon ultrasonic testing of concrete"(Magazine of Concrete Research, vol. 30 pp 19-25)
- H. Chung y K.Lau (1983) "Diagnosing in situ concrete by ultrasonic pulse technique" (Concrete International, octubre 1983, pp 42-49)
- H. Kolsky (1964) "Stress Waves in Solids" (Dover, N.Y., capítulo 3)
- G. Kuster y M. Nafi (1974) "Velocity and Attenuation of Seismic Waves in Two Phase Media" (Geophysics, vol 39, N° 5. pp 587-618)
- C Lin y A. Segel (1988) "Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences" (SIAM, Philadelphia, capítulo 6)



**BIBLIOTECA**

- L. Landau y  
E. Lifchitz (1970) "Teorie de l'élasticité" (Mir, Moscú, capítulo 3)
- W:P: Mason (1959) "Physical Acoustics and the Properties of Solids (Van Nostrand, N.J. capítulo 2)
- H. Mc Skimin (1956) "Propagation of longitudinal waves and shear waves in cylindrical rods at high frequencies"  
(J. Acoust. Soc. of America, vol. 28, pp 484-494)
- A Pipkin (1972) "Lectures on Viscoelasticity Theory"  
(Springer, Berlin, capítulo 4)
- Li. P. Smith (1961) "Mathematical Methods for Scientists and Engineers" (Dover, N.Y. , pp 354-355)
- A. Sommerfeld (1964) "Lectures on Theoretical Physics" (Academic Press, N.Y.; vol. II, pp 187-188; vol. IV, pp 114-123)
- R. Suárez Ántola (1975) " Fundamentos del ensayo ultrasónico de los materiales heterogéneos" (Reporte interno, Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay)
- R. Suárez Ántola y  
D. Suárez Bagnasco (1999) "The influence of reinforcing steel bars on the measured longitudinal velocity of ultrasonic pulses in concrete" (COBEM 99, S.P., Brasil)



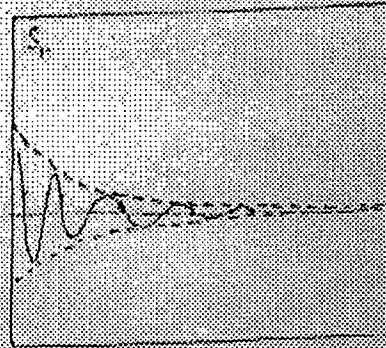
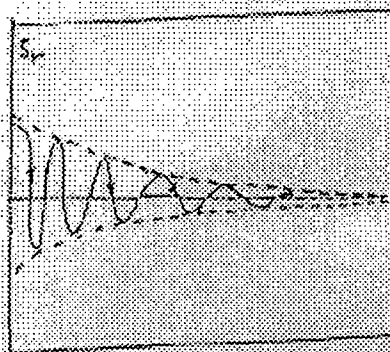
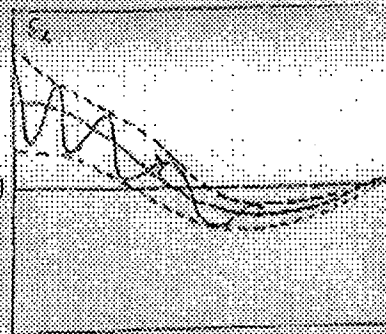
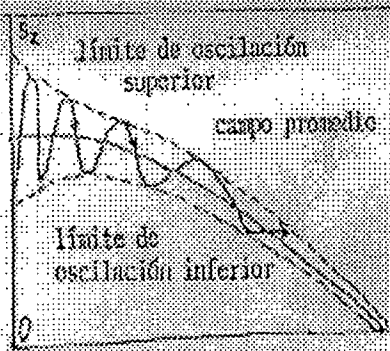


Figura Nº 1

Figura Nº 2

Tabla 1

Velocidades aparentes en madera (fibras perpendiculares a la dirección de propagación) (Suárez, 1975)

Dimensión Transversal (cm)	Velocidad (m/seg)
5,5	1.600
5	1.530
4,5	1.470
4	1.430

(En las condiciones del experimento, la otra dimensión transversal al pulso se puede considerar infinita)

Tabla 2

Velocidades aparentes en barras de refuerzo para hormigón en aire, (Chung, 1978)

Diámetro (mm)	Velocidad (m/seg)
6,3	5.180
12,7	5.350
19	5.480
25,4	5.500
38	5.690
100	5.840