

DISPERSIÓN DE ONDAS ULTRASÓNICAS LONGITUDINALES EN BARRAS.

Roberto Suárez Antola.

Facultad de Ingeniería, Universidad Católica del Uruguay.

Avda. 8 de Octubre 2738, 11600, Montevideo, Uruguay.

Trabajo de revisión enviado a las "I Jornadas Iberoamericanas de Ultrasonidos", Cartagena de Indias, Colombia, 25 al 29 de marzo de 1998).

(A) Introducción

Esta exposición se propone revisar brevemente algunos aspectos de la propagación de los pulsos ultrasónicos longitudinales en barras de sección transversal uniforme. Estos aspectos forman parte de la denominada "dispersión geométrica" de los pulsos. Este fenómeno se puede presentar como una complicación adicional en el ensayo ultrasónico de baja frecuencia de piezas delgadas en estructuras y máquinas (1), pero se produce ex - profeso en algunas aplicaciones de las guías de onda sólidas en el procesamiento de señales (2).

La dispersión geométrica se debe a una cierta variación en la velocidad de fase de las ondas armónicas que componen el pulso, a medida que la frecuencia (o, en forma equivalente, la longitud de onda) varía (3). Esa variación en la velocidad de fase se acompaña en algunos casos de un coeficiente de atenuación exponencial significativo, que también depende de la frecuencia. Pero esa dispersión y esa atenuación no se deben a procesos físicos de transformación de energía elástica en otras formas de energía. Se originan en la combinación de procesos de conversión de modos que se producen en las paredes de la barra, cuando las longitudes de onda del pulso son conmensurables con las dimensiones de la sección transversal.

El análisis de la propagación de ondas armónicas longitudinales en una barra circular de longitud infinita, efectuado a partir de las ecuaciones de la elastodinámica y apoyado en resultados de cálculo numérico, permite identificar un conjunto de modos de propagación (4).

La relación de dispersión no presenta frecuencia de corte para el primer modo, pero sí la presenta para los modos siguientes.

La fig1 muestra en forma cualitativa la relación entre la velocidad de fase y la frecuencia, para dos modos de propagación en una barra. En el primero la velocidad de fase disminuye desde el valor correspondiente a las ondas extensionales en un medio unidimensional, hasta el valor correspondiente a las ondas de Rayleigh. En el segundo modo la velocidad de fase presenta una asíntota vertical en una frecuencia de corte y disminuye monótonamente, para frecuencias mayores, aproximándose a la velocidad de las ondas P en el medio material.

En vez de tratar el problema de la barra mediante las ecuaciones de la elastodinámica, se van a considerar aquí dos casos extremos. Dichos casos admiten un encare analítico simple, elegante y bastante completo de la propagación de pulsos longitudinales, incluso de pulsos de banda ancha.

Supongamos que las longitudes de onda componentes son bastante mayores que una cierta dimensión característica de la sección transversal de la barra (el radio en el caso de una barra circular). Las ondas se propagan, entonces, en el primer modo de la fig1. Es posible aplicar el modelo de barra delgada debido a A.H.Love (5), con una corrección para altas frecuencias. Supongamos ahora que, por el contrario, las longitudes de onda son bastante

menores que dicha dimensión característica. Entonces las ondas componentes se propagan fundamentalmente en el segundo modo de la fig1. En este caso es posible aplicar el modelo de guía de ondas casi - fluida con pérdidas, debido a H.J.Mc Skimin (6). En ambos casos es posible reducir el problema a la propagación de un único campo escalar $u(t,x)$ que representa el pulso en cada instante t y en cada sección transversal de abscisa x . Expresando el campo como superposición de componentes armónicas, se tiene:

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\phi(\omega)} e^{i(\omega t - k(\omega)x)} d\omega$$

[1]

Aquí ω es la frecuencia angular, $k=k(\omega)$ es el número de ondas considerado como función de ω , $\alpha(\omega)$ es un coeficiente de atenuación exponencial, mientras que $A(\omega)$ y $\phi(\omega)$ son la amplitud y la fase de la componente de frecuencia ω en la señal de entrada a la barra $u(t,0)$, que se supone es una función conocida del tiempo. La dependencia no lineal de ω que presenta k origina una velocidad de fase $c=\omega/k$ variable. Esto a su vez produce una modificación progresiva en el patrón espacial y temporal del pulso a medida que este viaja a lo largo de la barra.

(B) Modelo de barra delgada de A.H.Love

En este caso $u(t,x)$ representa el campo de desplazamientos paralelos al eje de la barra. Esta puede tener una sección transversal de cualquier forma (circular, elíptica, rectangular, e incluso presentar uno o más huecos). Se supone que los desplazamientos transversales al eje son proporcionales a la deformación longitudinal $\partial u/\partial x$ y a la distancia al eje. Se supone además que la deformación transversal afecta fundamentalmente a la energía cinética de vibración de la barra, pero su efecto sobre la energía potencial elástica puede despreciarse. Entonces, formando un lagrangiano para la barra y aplicando el principio variacional de Hamilton., A.H.Love obtiene la ecuación:

$$c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v^2 r_0^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

[2]

Siendo r_0 el radio de inercia de la sección transversal de la barra, ν el módulo de Poisson, $c_0^2 = E/\rho$, E el módulo de Young y ρ la densidad del material (5). Si r_0 se anula, se obtiene la ecuación de ondas clásica para la propagación de ondas extensionales en un medio unidimensional (3). Introduciendo una frecuencia de corte:

$\omega_L = (c_0 / \nu r_0)$ [3], de la ecuación [2] se desprende que la relación de dispersión para las componentes armónicas del pulso es

$$k = \frac{(\omega/c_0)}{\sqrt{1 - (\omega/\omega_L)^2}}$$

[4]

Si ω/ω_L es pequeño respecto de 1, $c = \omega/k$ es prácticamente constante e igual a c_0 . En consecuencia no hay dispersión. Pero si ω/ω_L se aproxima a 1 por debajo, c se aproxima a cero. En este caso las hipótesis en que se basa la teoría de Love no son aplicables. A medida que ω aumenta, la energía mecánica de la onda se redistribuye concentrándose en la superficie de la barra y propagándose en el límite con la velocidad c_R de las ondas de Rayleigh, como sugiere la fig1.

(C) Modelo de barra cuasi-fluída de Mc.Skimin

Tanto los resultados experimentales como el cálculo numérico de las componentes axial y radial del campo de desplazamientos en una barra de sección circular sugieren que en el caso de pulsos longitudinales de alta frecuencia la barra se comporta, respecto de las ondas de dilatación, como si fuera una guía de ondas casi-fluída, que alivia tensiones en la frontera y presenta pérdidas (6). Es posible construir una guía de ondas casi-fluída equivalente a la barra sólida (7). La ecuación de ondas resultante presenta un término de atenuación debido a pérdidas por conversión de modos en la frontera. A partir del modelo así construido se obtiene la siguiente aproximación a la relación de dispersión (7):

[5]

$$k = \frac{\omega}{c_L} \sqrt{1 - (\omega_{MS}/\omega)^2}$$

Aquí c_L es la velocidad de las ondas P en el material. Aparece una nueva frecuencia de corte dada por la fórmula:

[6]

$$\omega_{MS} = \frac{\gamma \cdot c_L}{L_T}$$

Aquí L_T es una dimensión transversal característica de la barra (el radio en el caso de una barra circular) y γ es un coeficiente numérico que depende de la forma de la sección transversal y del modo de propagación considerado. Si ω/ω_{MS} es grande, la velocidad de

fase: $c = c_L$. Pero si ω/ω_{MS} disminuye, aproximándose a 1 por arriba, c se aproxima a infinito.

¿Cómo se debe interpretar $u(t,x)$ en este caso?. En una guía de ondas de sección circular el desplazamiento axial depende de la distancia radial en forma proporcional a una función de Bessel de primera especie y de orden cero, siendo precisamente $u(t,x)$ la amplitud de dicho desplazamiento (7). Si la guía de ondas es rectangular, elíptica o de otra configuración (simplemente conexas), en lugar de una función de Bessel aparecerá la solución del correspondiente problema de Sturm-Liouville.

Finalmente, para la guía con pérdidas se obtiene la siguiente fórmula para el coeficiente de atenuación exponencial:

[7]

$$\alpha(\omega) = \frac{\beta \cdot c_L}{\omega \cdot L_T^2} (1 - R^2(v, \theta))$$

Aquí β es un coeficiente numérico, y $R(v, \theta)$ es el coeficiente de reflexión de las ondas P dadas por las fórmulas de Aremberg (8). El ángulo θ se puede estimar aproximadamente por $\cos\theta = (\mu c_L/\omega L_T)$, donde μ es un nuevo coeficiente numérico.

(D) La forma asintótica de un pulso ultrasónico en la barra.

El cambio de forma en el pulso que se propaga puede estudiarse en principio, para t lo suficientemente grande, aplicando el método de la fase estacionaria [(2),(4)] en la evaluación de la integral [1].

Dados t y x , el aporte principal a $u(t,x)$ proviene de aquellos valores de ω próximos a las raíces de la ecuación

[8]

$$\frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega} = \frac{t}{x}$$

Si esta ecuación no posee raíces reales, $u(t,x)$ es despreciable. Si, como ocurre en los casos de las barras de Love y de Mc Skimin, la raíz real (cuando existe) es única, el campo de desplazamientos puede estimarse mediante la fórmula:

[9]

$$u(t, x) = \frac{2e^{-\alpha(\omega_e)x} A(\omega_e)}{\left[\frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}(\omega_e) \right| x \right]^{1/2}} \cos\left(\omega_e t - k(\omega_e)x + \phi(\omega_e) + s \frac{\pi}{4} \right)$$

Aquí se supone que

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}(\omega_e) \neq 0$$

Se representa por ω_e a la (única) raíz real de la ecuación [8].

Para una barra de Love $\alpha(\omega)=0$ siempre, mientras que

$$\omega_e = \omega_L \left[1 - \left(\frac{x}{c_0 t} \right)^{2/3} \right]^{1/2}$$

[10]

(Ver sonograma en la figura 2).

Para una barra de Mc Skimin $\alpha(\omega)$ viene dado por la fórmula [7], mientras que

$$\omega_e = \frac{\omega_{MS}}{\sqrt{1 - (x/c_L t)^2}}$$

[11]

(Ver sonograma en la figura 3).

Finalmente, s representa el signo de

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}(\omega_e)$$

La fórmula [9] es una aproximación local mediante una onda armónica de frecuencia ω_e y número de ondas k_e . Pero al variar x/t el valor de ω_e se modifica a su vez, de modo que se obtiene una onda modulada en amplitud, frecuencia y fase. Como una determinada frecuencia ω componente del pulso introducido inicialmente en $x=0$, aparece en el instante t en la posición x dada por la fórmula [8], la velocidad con que viaja esa componente del pulso es la velocidad de grupo

En cambio, un determinado valor de la fase $\omega t - kx + \phi(\omega)$ viaja con velocidad de fase ω/k . En general no coincide con la velocidad de grupo. Entonces la frecuencia local de la oscilación que acompaña el desplazamiento de un valor fijo de la fase a través de la barra, cambia con el tiempo y con la posición.

Si $\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}(\omega_e) > 0$, la aproximación de fase estacionaria no resulta aplicable. Para t

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}(\omega_e) = 0$$

lo suficientemente grande, es posible aplicar la denominada aproximación de fase de Airy (9):

$$u(t, x) \approx \frac{2A(\omega_a)e^{-\alpha(\omega_a)x}}{\sqrt{\pi}|Q|^{1/3}} A_i \left[\frac{P_{sg}(Q)}{|Q|^{1/3}} \right] \cos[\omega_a t - k(\omega_a)x + \phi(\omega_a)] \quad [12]$$

Aquí:

[13a]

$$P(t, x; \omega_a) = t - \frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_a)x$$

[13b]

$$Q(x; \omega_a) = -\frac{x}{2} \cdot \frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3}(\omega_a)$$

Siendo sg la función signo y ω_a la (que se supone única) raíz real de

[14]

$$\frac{\partial^2 k(\omega)}{\partial \omega^2} = 0$$

La función de Airy es, por definición,

[15](fig 4).

$$A_i[z] = \int_0^{+\infty} \cos\left(\mathbf{z}\xi + \frac{1}{3}\xi^3\right) d\xi$$

La función de Airy presenta un máximo bien marcado en $z = -1$. Decae monótonamente para z positivo. Decae oscilando cada vez más rápido para z negativo. Si $\omega_a \neq 0$, la función de Airy actúa como envolvente de una oscilación armónica de frecuencia ω_a . Si $\omega_a = 0$, la función de Airy representa la oscilación misma (a menos de un factor de atenuación exponencial y de un factor proporcional a $|x|^{-1/3}$).

Mientras que la frecuencia local ω_e de la aproximación de fase estacionaria depende de x/t , la frecuencia ω_a de Airy es independiente de t y de x . En el caso de una barra delgada de Love, $\partial^2 k / \partial \omega^2$ se anula solo si $\omega = 0$. El sonograma de la figura 2 sugiere que la llegada del frente del pulso se produce en el instante $t=x/c_0$ en el punto de abscisa x . La frecuencia local en ese instante es $\omega_e = 0$, por lo cual el comienzo de ese frente de ondas debe describirse con la aproximación de fase de Airy, poniendo $\omega_a = 0$. Este resultado está

de acuerdo con los registros obtenidos en experimentos sobre propagación de ondas ultrasónicas extensionales de baja frecuencia en alambres de níquel (10).

En el caso de una barra gruesa de Mc Skimin, $\partial^2 k / \partial \omega^2$ se aproxima a 0 solo si ω tiende a infinito. El sonograma de la figura 3 sugiere que la llegada del frente del pulso al punto de abscisa x se produce en el instante $t = x/c_L$. Las frecuencias locales para instantes ligeramente posteriores son muy grandes (las mayores que presenta el espectro del pulso de entrada) y van disminuyendo progresivamente a medida que el pulso atraviesa el punto x . Para describir en detalle el frente de onda es necesario utilizar una generalización de la aproximación de fase de Airy debida a Chester, Friedman y Ursell (9).

(E) Referencias bibliográficas

- (1) J. Krautkramer y H. Krautkramer (1977) "Ultrasonic Testing of Materials" (Springer, Berlin).
- (2) E. Diéulesaint y D. Royer (1980) "Elastic Waves in Solids" (J. Wiley, N.Y.).
- (3) H. Kolsky (1964) "Stress Waves in Solids" (Dover, N.Y.).
- (4) J. Achenbach (1973) "Wave Propagation in Elastic Solids" (North-Holland, Amsterdam).
- (5) A.H. Love (1927) "The Mathematical Theory of Elasticity" (Cambridge Univ. Press, England).
- (6) H. Mc Skimin (1956) "Propagation of Longitudinal Waves and Shear Waves in Cylindrical Rods at High Frequences" (J. Acoust. Soc. Am., vol 28, pp484-494).
- (7) R. Suárez Antola (1990) "La influencia de las dimensiones del cuerpo ensayado sobre la velocidad de propagación de los pulsos ultrasónicos longitudinales" (III Congreso de END para América Latina y el Caribe, Libro de Actas, 2^{da} sesión, trabajo N° 9).
- (8) W. Mason (1958) "Physical Acoustics" (Van Nostrand, N.J.).
- (9) N. Bleinstein y R. Handlesman (1986) "Asymptotic Expansions of Integrals" (Dover, N.Y.).
- (10) E. Meyer y E.G. Neumann (1972) "Physical and Applied Acoustics" (Academic Press, N.Y.).

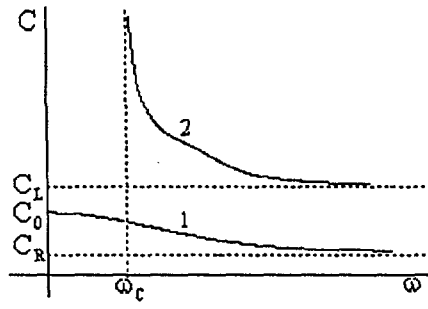


Figura 1

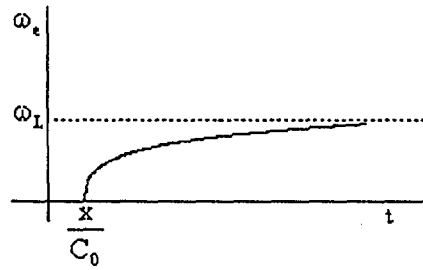


Figura 2

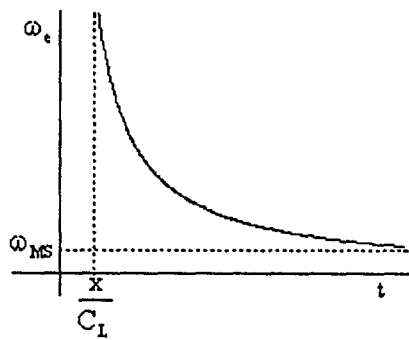


Figura 3

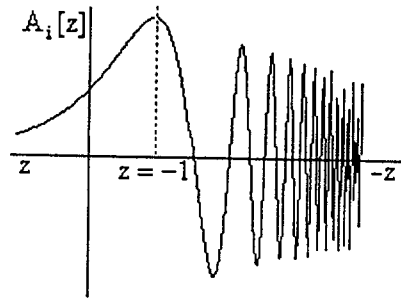


Figura 4