



MX0200114

**ESTABILIDAD LINEAL DE UN CANAL COMBUSTIBLE
UNIFORMEMENTE CALENTADO CONSIDERANDO
RETROALIMENTACIÓN POR VACÍOS**

ESTUDIO TEÓRICO

PREPARADO POR:

VÍCTOR GONZÁLEZ MERCADO
JUAN GABRIEL SALINAS HERNÁNDEZ
GILBERTO ESPINOSA PAREDES

(CNSNS)
(UAM-I)
(UAM-I)

**COMISIÓN NACIONAL DE SEGURIDAD NUCLEAR Y SALVAGUARDIAS
Y
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA**

AGOSTO DEL 2000.

MÉXICO, D.F

NOTA

Este informe fue elaborado con el propósito de documentar el trabajo realizado y/o financiado por la Comisión Nacional de Seguridad Nuclear y Salvaguardias, Organismo del Gobierno Mexicano. Ni el Gobierno Mexicano, ni el Organismo citado, ni sus empleados, garantizan o asumen responsabilidad legal alguna, de manera explícita o implícita, por el uso, o por los resultados del uso, que hagan terceros de la información, aparatos, materiales o procesos descritos en este documento; tampoco hacen afirmación alguna sobre los derechos de autor.

**PLEASE NOTE THAT
ALL MISSING PAGES ARE SUPPOSED TO BE
BLANK**

ÍNDICE

PÁGINA

RESUMEN.....	v
1.0 INTRODUCCIÓN.....	1
2.0 DESARROLLO.....	2
2.1 MODELO CONCEPTUAL	2
2.2 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LINEAL	5
2.3 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA SIN EFECTOS DE RETROALIMENTACIÓN POR VACÍOS.....	6
2.4 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CON EFECTOS DE RETROALIMENTACIÓN POR VACÍOS.....	8
3.0 FORMULACIÓN MATEMÁTICA	12
3.1 DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS TERMOHIDRÁULICOS.....	12
3.2 DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN EL COMBUSTIBLE	16
3.3 DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS NEUTRÓNICOS Y DENSIDAD DE POTENCIA.....	16
4.0 PERTURBACIONES DE PRIMER ORDEN.....	20
5.0 MODELO ANALÍTICO PARA EL ANÁLISIS DE OSCILACIONES	21
5.1 RELACIONES FUNCIONALES DE LA TERMOHIDRÁULICA.	25
5.2 MODELO ANALÍTICO PARA $\delta(\Delta p_{1\phi}(s))$	34
5.3 MODELO ANALÍTICO PARA $\delta(\Delta p_{2\phi}(s))$	35
5.4 RELACIONES FUNCIONALES DE LA NEUTRÓNICA	38

ÍNDICE

PÁGINA

6.0	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.....	40
6.1	MODELO ANALÍTICO.....	41
6.2	PARÁMETROS.....	43
7.0	PROGRAMACIÓN, PRUEBAS Y RESULTADOS	43
7.1	PROGRAMACIÓN.....	43
7.2	RESULTADOS.....	46
8.0	CONCLUSIONES.....	50
	REFERENCIAS.....	52
	NOMENCLATURA.....	54

RESUMEN

La Gerencia de Tecnología, Reglamentación y Servicios de la Comisión Nacional de Seguridad Nuclear y Salvaguardias en forma conjunta con el Departamento de I.P.H. de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, desarrollaron el presente proyecto para estudiar la estabilidad lineal en un canal combustible uniformemente calentado con efectos de retroalimentación por vacíos. En este estudio se describe la metodología empleada en el análisis de estabilidad lineal del reactor nuclear de la U1 de CNLV, representado por un canal promedio uniformemente calentado. El modelo conceptual consiste en dos celdas que representan las dos regiones en las que se divide el canal según se encuentre el refrigerante en una y dos fases, considerando la longitud de ebullición dependiente en el tiempo. Se emplea el modelo de flujo homogéneo para describir el comportamiento termohidráulico del refrigerante en la región de dos fases. Los procesos neutrónicos se describen con el modelo puntual de la cinética neutrónica con un grupo de precursores de neutrones retardados. Se estudia el comportamiento del sistema en el dominio de la frecuencia con las funciones de transferencias obtenidas y se caracteriza en cuatro estados de operación correspondientes a las cuatro esquinas de la zona de baja estabilidad en el mapa potencia-flujo de la CNLV. Para estos estados de operación se determina la frecuencia característica y se obtienen los diagramas de Nyquist correspondientes. Los resultados muestran que la estabilidad del sistema depende de la relación potencia-flujo y que las operaciones que impliquen una reducción de esta relación (reduciendo la potencia introduciendo barras de control con flujo de refrigerante constante o aumentar flujo de refrigerante con patrón de barras establecido) mejoran la estabilidad del sistema. Los resultados obtenidos con efectos de retroalimentación por vacíos indican que el valor de la frecuencia característica se modifica muy poco con respecto al modelo sin retroalimentación, por lo que los procesos termohidráulicos parecen determinar la respuesta de la estabilidad del sistema.

1. INTRODUCCIÓN

Desde los inicios del desarrollo de los Reactores Nucleares de Agua en Ebullición (BWR), la estabilidad de éstos ha sido un aspecto importante en su diseño debido a sus posibles consecuencias sobre la integridad del combustible. El evento ocurrido en La Salle en los Estados Unidos en 1998 ocasionó que las Especificaciones Técnicas de Operación (ETO) incluyeran medidas para evitar operar en condiciones que favorecieran la aparición de inestabilidades. Medidas similares fueron adoptadas para la Central Nuclear de Laguna Verde (CNLV) a fin de evitar la ocurrencia de algún evento de este tipo. Sin embargo, en enero de 1995 durante la operación rutinaria de transferencia de velocidad de baja a alta de las bombas de recirculación, el reactor de la Unidad 1 (U1) de la CNLV presentó oscilaciones en el nivel de potencia que fueron detectadas y suprimidas apagando manualmente el reactor sin ninguna consecuencia sobre la integridad del combustible [3].

Este evento motivó que en México se realizaran en forma acelerada estudios que permitieran adquirir una mejor comprensión del problema y poder emitir una opinión que apoyará al respecto. Se realizó un análisis del evento empleando el código RAMONA-3B reproduciendo las condiciones de operación en el momento del evento [3]. El estudio consistió en introducir una perturbación tipo escalón y se analizó la respuesta del reactor en el dominio del tiempo. Se logró reproducir la oscilación obteniéndose una frecuencia similar a la observada en el evento de la U1 de la CNLV. No obstante, fue necesario introducir una perturbación grande en el flujo de recirculación del orden del 10% del valor inicial para provocar oscilaciones autosostenidas. Esta perturbación difería de la realidad pues la variación en el flujo de recirculación real fue suave antes de que la potencia del reactor oscilara.

Los trabajos en esta dirección han continuado, aunque a un menor ritmo, orientados principalmente al desarrollo de un monitor de estabilidad. Los institutos de investigación en México han enfocado sus estudios en esta dirección incursionando en los temas de análisis de series de tiempo y el desarrollo de modelos reducidos [1] como el propuesto originalmente por March Leuba [5] quien desarrolló el código LAPUR para la Nuclear Regulatory Commission (NRC).

Por su parte la Comisión Nacional de Seguridad Nuclear y Salvaguardias (CNSNS) ha iniciado un proyecto con la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I) cuyo propósito es obtener una mejor comprensión de los fenómenos y sus efectos relacionados con el tema de inestabilidad en los BWR. El proyecto tiene como objetivo realizar un estudio teórico del comportamiento del reactor en el intervalo lineal y en el dominio de la frecuencia basados en la aproximación de Lahey y Podowsky para el código NUFREQ-NP [6].

En el presente trabajo se estudia el efecto que tiene la potencia debido a la retroalimentación por vacíos sobre la estabilidad del reactor de la U1 de la CNLV. Aunque los resultados se pueden calificar de cualitativos no dejan de tener importancia para establecer los efectos neutrónicos en forma dinámica.

2. DESARROLLO

2.1 MODELO CONCEPTUAL

Se considera un canal de combustible de longitud L_c dividido en dos regiones, como se muestra en la Fig. 1. Una de estas regiones de longitud λ corresponde a la sección en la que el fluido de enfriamiento se encuentra en una fase (representado por 1ϕ), mientras que la otra sección ($L_c - \lambda$) fluye en dos fases (representado por 2ϕ). El canal de combustible está sometido a un calentamiento uniforme (q''') debido a la generación de calor por las reacciones de fisión y calor residual. La presión a la entrada del canal se designa por p_{en} , mientras que la presión a la salida del canal se designa por p_{sa} . La caída de presión total en el canal se obtiene de la diferencia de estas presiones, siendo $\Delta p_{1\phi}$ la caída de presión en una fase y $\Delta p_{2\phi}$ representa la caída de presión en la región de dos fases.

Se considera en el modelado que las fases gas y líquido son incompresibles y que la distribución de potencia es uniforme a lo largo del canal. Este tipo de suposiciones permiten obtener un modelo analítico a través

de los balances de masa, energía y cantidad de movimiento, así como los correspondientes para modelar la cinética neutrónica y la transferencia térmica en el combustible.

El sistema modelado está sujeto a una condición de frontera tal que la caída de presión total a través del canal es constante. Esta suposición es crucial para obtener el modelo que permita realizar un análisis de estabilidad lineal.

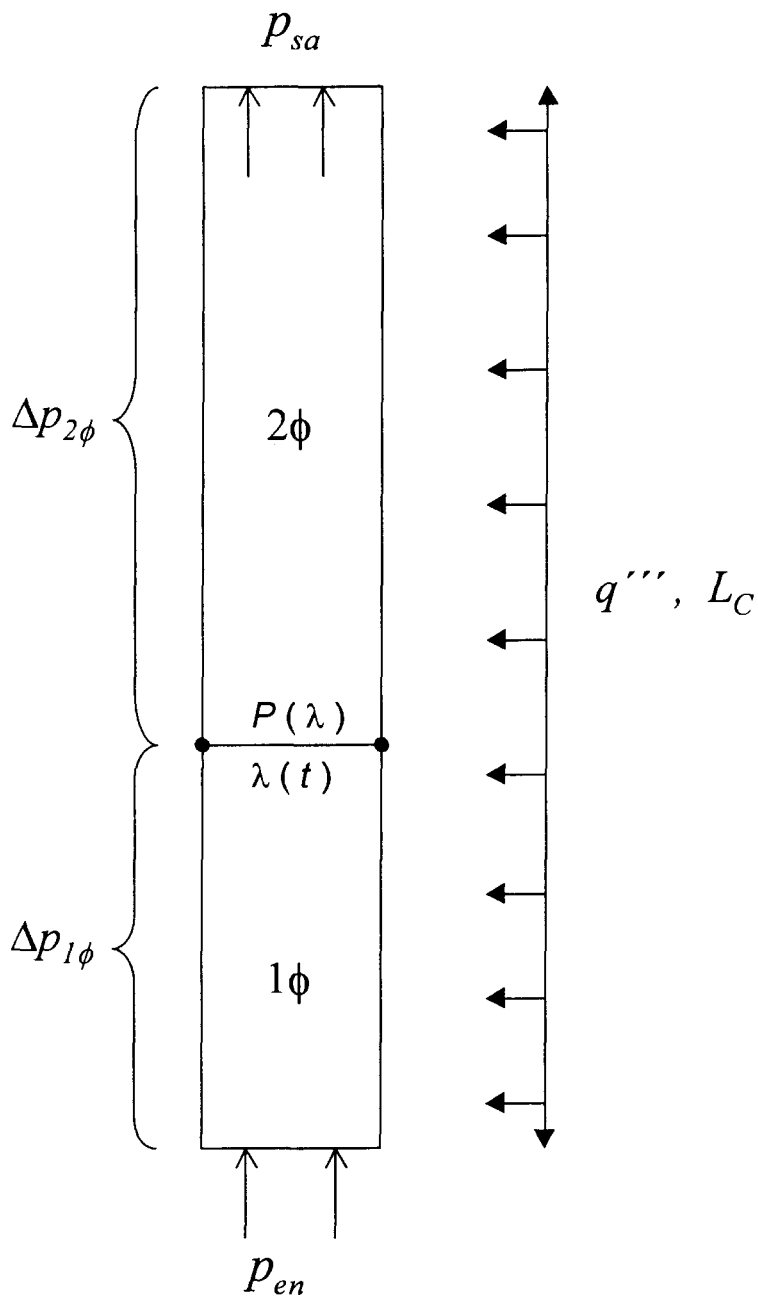


FIGURA 1. MODELO CONCEPTUAL DE UN CANAL COMBUSTIBLE CON DISTRIBUCIÓN DE POTENCIA. DONDE 1ϕ ES LA REGIÓN DE UNA FASE, 2ϕ ES LA REGIÓN DE DOS FASES, q''' ES LA DENSIDAD DE POTENCIA, L_C LONGITUD DEL CANAL, p_{en} PRESIÓN A LA ENTRADA, p_{sa} PRESIÓN A LA SALIDA, $\Delta p_{1\phi}$ CAÍDA DE PRESIÓN DE UNA FASE, $\Delta p_{2\phi}$ CAÍDA DE PRESIÓN EN DOS FASES Y $\lambda(t)$ ES LA LONGITUD DE EBULLICIÓN.

Para obtener la función de transferencia del sistema se calcula la caída de presión en cada una de las regiones consideradas, para ello se integran las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento entre los límites en que se ha dividido el canal. Se introduce una perturbación de primer orden en las ecuaciones resultantes y se obtiene la transformada de Laplace de las perturbaciones de las caídas de presión en cada región. La forma funcional de estas perturbaciones es [6]:

$$\delta \Delta p_{1\phi}(s) = \Gamma_1(s) \delta j_{en}(s) + \Gamma_2(s) \delta q'''(s) + \Gamma_3(s) \delta h_{sub}(s) \quad (3)$$

$$\delta \Delta p_{2\phi}(s) = \Pi_1(s) \delta j_{en}(s) + \Pi_2(s) \delta q'''(s) + \Pi_3(s) \delta h_{sub}(s) \quad (4)$$

donde s es la variable de Laplace, Γ_i y Π_i ($i = 1, 2, 3$) son funciones de transferencia, las cuales dependen de las características del sistema, mientras que q''' , h_{sub} y j_{en} representan la potencia por unidad de volumen, subenfriamiento (diferencia entre la entalpía de líquido saturado y entalpía del fluido a la entrada del canal) y velocidad superficial a la entrada del canal, respectivamente.

2.3 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA SIN EFECTOS DE RETROALIMENTACIÓN POR VACÍOS

Al introducir una perturbación en el flujo de refrigerante en el sistema en condiciones de estado estacionario manteniendo constante q''' y h_{sub} , se producen variaciones en la longitud de ebullición, fracción de vacíos γ , por tanto, en la caída de presión en la sección bifásica. El flujo a la salida del canal se modifica siguiendo a la perturbación aplicada. La región en una fase sentirá también el efecto de la perturbación en el flujo, produciéndose una perturbación en la caída de presión de igual magnitud a la de la región bifásica pero de signo contrario. Esta variación en la caída de presión en la región de una sola fase causará una retroalimentación sobre el flujo de entrada que puede ser positiva o negativa. A partir de ese momento la perturbación en el flujo de refrigerante que sentirá la región bifásica será la suma algebraica de la

perturbación externa y la perturbación de retroalimentación. En la Fig. 2 se presenta el diagrama de bloques del proceso descrito.

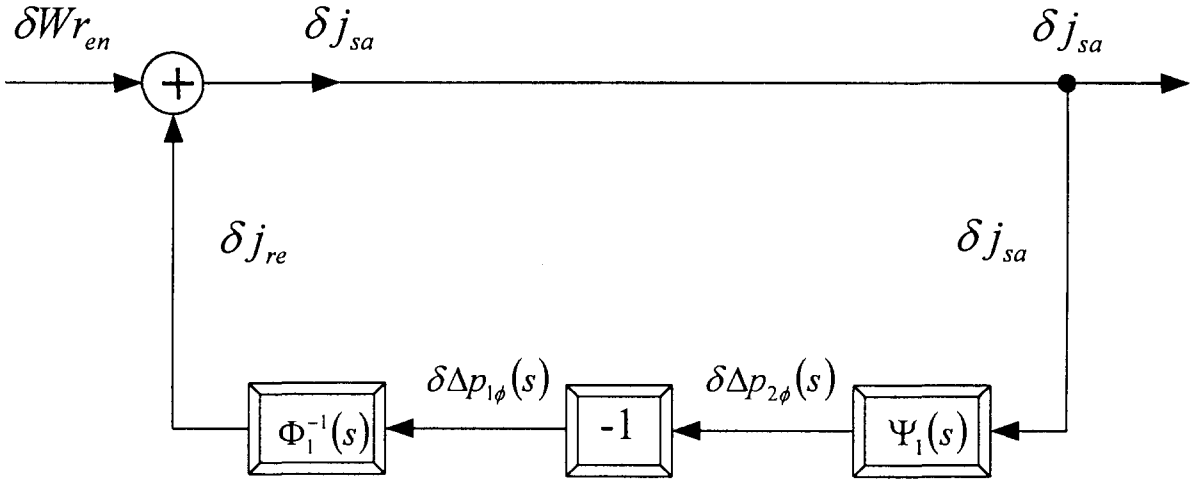


FIGURA 2. DIAGRAMA DE BLOQUES SIN RETROALIMENTACIÓN POR VACÍOS

En términos matemáticos se tiene:

$$\delta j_{sa}(s) = \delta j_{en}(s) + \delta j_{re}(s) \quad (5)$$

$$\delta \Delta p_{1\phi}(s) = \Gamma_1(s) \delta j_{re} \quad (6)$$

$$\delta \Delta p_{2\phi}(s) = \Pi_1(s) \delta j_{sa} \quad (7)$$

Sustituyendo las Ecs. (6) y (7) en la Ec (2) y combinando con la Ec. (5) se obtiene que:

$$\delta j_{sa}(s) = G(s) \delta j_{en}(s) \quad (8)$$

donde $G(s)$ es la función de transferencia, dada por:

$$G(s) = \left(1 + \frac{\Pi_1(s)}{\Gamma_1(s)} \right)^{-1} \quad (9)$$

Esta función de transferencia describe la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia. Los polos de esta función resultan ser los ceros de la Ec. (2), es decir, son los valores de s para los cuales se cumple la condición

de frontera Δp_l igual a constante y definen la o las frecuencias de oscilación del sistema.

2.4 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CON EFECTOS DE RETROALIMENTACIÓN POR VACÍOS

Considérese ahora el caso en el que la densidad de potencia (q''') en las Ecs. (3) y (4) depende de la fracción de vacíos, como es el caso de un reactor nuclear. Supóngase además que se introduce una perturbación en la reactividad, por ejemplo debido al movimiento de las barras de control. Esta perturbación provocará una variación en la potencia del reactor que tiene dos efectos: por un lado, perturbará la fracción de vacíos promedio en el canal y por otro causará variaciones en las caídas de presión en las dos regiones del canal.

El flujo de entrada se verá afectado por esta última perturbación ajustándose a la condición frontera de Δp_l igual a constante. Esta variación en el flujo tiene un efecto sobre las caídas de presión de las dos regiones que retroalimentan a la perturbación inicial causada por la variación en la potencia. Por otro lado esta perturbación en el flujo de entrada causa también una variación en la fracción de vacíos promedio del canal que se suma a la inicialmente causada por la variación en la potencia. Finalmente, la perturbación total en la fracción de vacíos promedio causa una inserción de reactividad positiva o negativa, vía el coeficiente de reactividad por vacíos, que se retroalimentará a la perturbación original. En la Fig. 3 se presenta el diagrama de bloques con efectos de retroalimentación por vacíos, del proceso descrito.

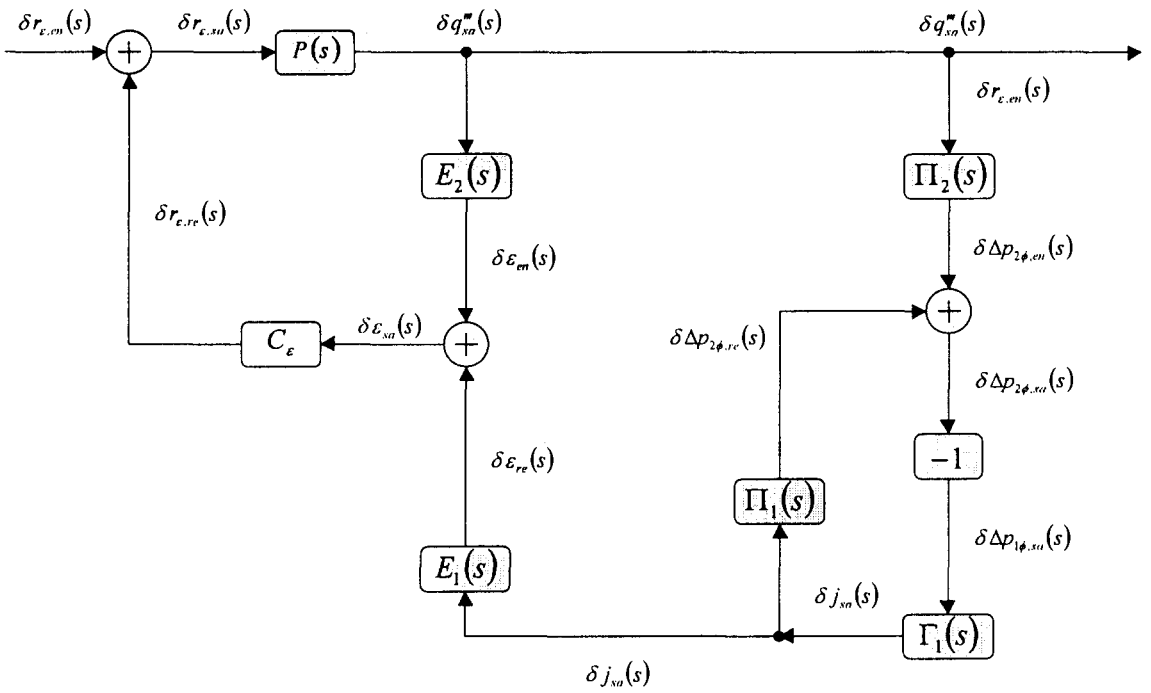


FIGURA 3. DIAGRAMA DE BLOQUES CON RETROALIMENTACIÓN POR VACÍOS.

La perturbación en la fracción de vacíos promedio en función de las perturbaciones de los términos j_{en} , q'' y h_{sub} está dada por:

$$\delta \varepsilon(s) = E_1(s) \delta j_{en}(s) + E_2(s) \delta q''(s) + E_3(s) h_{sub}(s) \quad (10)$$

Empleando el modelo puntual de la cinética neutrónica considerando un grupo de precursores de neutrones retardados, puede obtenerse la función de transferencia que relaciona a la densidad de potencia con la reactividad:

$$\delta q''(s) = P(s) \delta r_i(s) \quad (11)$$

donde la perturbación de la reactividad total está dada por:

$$\delta r_i(s) = \delta r_e(s) + \sum \delta r_j(s) \quad (12)$$

En esta ecuación el subíndice ε se usa para indicar que la reactividad es debido a la fracción de vacíos, mientras que el subíndice j se usa para indicar

la reactividad por otros mecanismos físicos (efecto Doppler, barras de control, concentración de xenón, temperatura de refrigerante, entre los más importantes).

De acuerdo con el diagrama de la Fig. 3, se puede obtener el siguiente conjunto de ecuaciones en el dominio de la Laplace:

$$\delta q_{sa}^m(s) = P(s)\delta r_{\varepsilon,sa}(s) \quad (13)$$

$$\delta \varepsilon_{sa}(s) = \delta \varepsilon_{en}(s) + \delta \varepsilon_{re}(s) \quad (14)$$

$$\delta \varepsilon_{en}(s) = E_2(s)\delta q_{sa}^m(s) \quad (15)$$

$$\delta \varepsilon_{re}(s) = E_1(s)\delta j_{sa}(s) \quad (16)$$

$$\delta r_{\varepsilon,sa}(s) = \delta r_{\varepsilon,en}(s) + \delta r_{\varepsilon,re}(s) \quad (17)$$

$$\delta r_{\varepsilon,re}(s) = c_\varepsilon \delta \varepsilon_{sa}(s) \quad (18)$$

$$\delta \Delta p_{2\phi,sa}(s) = \delta \Delta p_{2\phi,en}(s) + \delta \Delta p_{2\phi,re}(s) \quad (19)$$

$$\delta \Delta p_{2\phi,en}(s) = \Pi_2(s)\delta q_{sa}^m(s) \quad (20)$$

$$\delta \Delta p_{1\phi}(s) = -\delta \Delta p_{2\phi,sa}(s) \quad (21)$$

$$\delta j_{sa}(s) = \Gamma_1^{-1}(s)\delta \Delta p_{1\phi,sa} \quad (22)$$

$$\delta \Delta p_{2\phi,re}(s) = \Pi_1(s)\delta j_{sa}(s) \quad (23)$$

donde c_ε es un coeficiente del polinomio de reactividad por fracción de vacíos, es decir, es un valor constante que depende del quemado del combustible [2].

Combinado las Ecs. (19), (20) y (23) se obtiene:

$$\delta\Delta p_{2\phi,sa}(s) = \Pi_1(s)\delta\dot{j}_{sa}(s) + \Pi_2(s)\delta q_{sa}^m(s) \quad (24)$$

Ahora combinando el resultado anterior con las Ecs. (21) y (22) se obtiene:

$$\delta\dot{j}_{sa}(s) = -\left[\frac{\Pi_2(s)}{\Gamma_1(s) + \Pi_1(s)}\right]\delta q_{sa}^m(s) \quad (25)$$

Sustituyendo la Ec. (25) en la Ec. (16) y aplicando la Ec. (13), se obtiene:

$$\delta\varepsilon_{re}(s) = -\left[\frac{\Pi_2(s)E_1(s)P(s)}{\Gamma_1(s) + \Pi_1(s)}\right]\delta r_{\varepsilon,sa}(s) \quad (26)$$

Sustituyendo (13) en (15) y el resultado obtenido se sustituye junto con la Ec. (26) en la Ec. (14), se obtiene:

$$\delta r_{\varepsilon,sa}(s) = \left[E_2(s) - \frac{\Pi_2(s)E_1(s)}{\Gamma_1(s) + \Pi_1(s)}\right]P(s)\delta r_{\varepsilon,sa}(s) \quad (27)$$

Sustituyendo la Ec. (27) en la Ec. (18) y el resultado obtenido se sustituye en la Ec. (17) para obtener:

$$\delta r_{\varepsilon,sa}(s) = \left\{1 - \left[E_2(s) - \frac{\Pi_2(s)E_1(s)}{\Gamma_1(s) + \Pi_1(s)}\right]c_\varepsilon P(s)\right\}^{-1} \delta r_{\varepsilon,en}(s) \quad (28)$$

Finalmente este resultado se sustituye en la Ec. (13) para obtener:

$$\delta q_{sa}^m(s) = G_\varepsilon(s)\delta r_{\varepsilon,en}(s) \quad (29)$$

donde la función de transferencia del sistema está dada por:

$$G_\varepsilon(s) = \left\{ 1 - \left[E_2(s) - \frac{\Pi_2(s)E_1(s)}{\Gamma_1(s) + \Pi_1(s)} \right] c_\varepsilon P(s) \right\}^{-1} P(s) \quad (30)$$

El objetivo de las secciones siguientes es derivar las relaciones de las funciones de transferencia $E_1(s)$, $E_2(s)$, $P(s)$, $\Gamma_1(s)$, $\Pi_1(s)$ y $\Pi_2(s)$.

3.0 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

En esta sección se presenta la formulación matemática que describe los procesos físicos del canal de ebullición con efectos de retroalimentación por fracción de vacíos.

3.1 DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS TERMOHIDRÁULICOS

Las hipótesis y suposiciones son:

- i) Distribución de potencia uniforme.
- ii) No se consideran los efectos de ebullición subenfriada.
- iii) Flujo homogéneo para describir el comportamiento de las dos fases.
- iv) Presión constante del sistema.
- v) Incompresibilidad del fluido.

Las ecuaciones de conservación para la región en una fase se presentan a continuación:

- Ecuaciones de conservación de masa en una fase:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (31)$$

donde

$$G = \rho_l v_l \quad (32)$$

siendo ρ_l y v_l la densidad y velocidad del líquido.

- Ecuación de cantidad de movimiento en una fase:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial G^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{f}{D_h} + \sum_{i \in L_1} K_i \delta(z - z_i) \right] \frac{G^2}{2\rho_l} + \rho_l g \quad (33)$$

donde f es el factor de fricción de Fanning, D_h es el diámetro hidráulico, K_i es el coeficiente de pérdidas hidráulicas en la localización i . La función delta de Dirac tiene la siguiente propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \delta(z - z_i) dz = \begin{cases} f(z_i), & z = z_i \\ 0, & z \neq z_i \end{cases} \quad (34)$$

- Ecuación de conservación de energía en una fase:

$$\rho_l \frac{\partial h_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (G h_l) = \frac{q'' P_C}{A} \quad (35)$$

donde h_l es la entalpía del líquido, q'' es el flujo de calor por unidad de área, P_C es el perímetro calentado y A es el área de flujo.

Las ecuaciones de conservación para describir los procesos en la región de dos fases, están descritos por modelo promedio de flujo homogéneo.

- Ecuación de conservación de masa de la mezcla homogénea en dos fases.

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (36)$$

donde la densidad promedio está dada por:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{A} \int_A \rho dA = \varepsilon \rho_g + (1 - \varepsilon) \rho_f \quad (37)$$

donde ε es la fracción de vacíos con respecto al área transversal del canal en un tramo de longitud Δz . En forma explícita ésta viene dada por:

$$\varepsilon = \frac{\Delta z}{\Delta z A} \int_{A_g} dA \quad (38)$$

En la Ec. (37) se usa el subíndice f en la densidad para indicar que la fase líquida se encuentra en equilibrio termodinámico a la presión del sistema. El flujo másico por unidad de área de la mezcla en dos fases está dado:

$$G = \rho_l \langle v_l \rangle + \rho_g \langle v_g \rangle \quad (39)$$

donde los promedios fase o velocidades superficiales de las fases están definidos por:

$$\langle v_l \rangle = (1 - \varepsilon) \langle v_l \rangle^l \quad (40)$$

$$\langle v_g \rangle = \varepsilon \langle v_g \rangle^g \quad (41)$$

En la literatura convencional las velocidades superficiales se designan por j_g y j_l para la fase gas y fase líquida, respectivamente. Las velocidades promedio que aparecen del lado derecho se refieren a promedios intrínsecos, es decir, están promediadas con respecto al área que ocupa la fase. Es importante hacer énfasis que la Ec. (37) representa el promedio fase y se realiza con respecto al área total ($A = A_g + A_l$).

La velocidad superficial total es igual a $j = j_g + j_l$, sin embargo para flujo homogéneo $j_l = j_g$, entonces con esto en consideración y con las Ecs. (39)-(41), la velocidad superficial para flujo homogéneo es:

$$j = \frac{G}{\rho_f(1-\varepsilon) + \rho_g\varepsilon} \quad (42)$$

- Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G^2}{\langle \rho \rangle} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\varphi_{lo}^2 \frac{f}{D_h} + \sum_{i \in L_{i\neq}} K_i \Phi_i \delta(z - z_i) \right] \frac{G^2}{2\rho_l} + \langle \rho \rangle g \quad (43)$$

Los multiplicadores de pérdidas de presión para flujo en dos fases empleados en el presente trabajo están dados por [4]:

$$\varphi_{lo}^2 = \Phi = \frac{\rho_f}{\langle \rho \rangle} \quad (44)$$

- Ecuación de conservación de energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \langle h \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (G \langle h \rangle) = \frac{q'' P_C}{A} \quad (45)$$

donde

$$\langle h \rangle = \frac{\rho_f h_f (1-\varepsilon) + \rho_g h_g \varepsilon}{\langle \rho \rangle} \quad (46)$$

donde h es la entalpía.

Se puede observar que las ecuaciones de conservación antes descritas para la mezcla en dos fases se reducen a las ecuaciones de conservación en una fase [Ecs. (31), (33) y (35)] cuando $\varepsilon = 0$.

3.2 DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN EL COMBUSTIBLE

Para determinar las temperaturas promedio del combustible nuclear, en el análisis se consideran dos mecanismos de transferencia de calor entre la pared calentada y el refrigerante. El primer mecanismo es convección en una fase, mientras que el segundo mecanismo es por convección en ebullición nucleada. Considerando que el calor por conducción del combustible nuclear es perpendicular con respecto a la dirección del flujo, se puede formular con un modelo de parámetros concentrados, la ecuación de conducción de calor se puede escribir como:

$$\langle \rho C_p \rangle_c \frac{d\langle T_c \rangle}{dt} = q''' - \frac{A_{TC}}{V_c} q'' \quad (47)$$

donde $\langle \rho C_p \rangle_c$ es el promedio del producto de la densidad y la capacidad calorífica del combustible (comprende la parte activa del combustible, huelgo y encamisado), $\langle T_c \rangle$ es la temperatura promedio del combustible, q''' es la densidad de potencia, A_{TC} es el área de transferencia de calor y V_c es el volumen del combustible.

3.3 DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS NEUTRÓNICOS Y DENSIDAD DE POTENCIA

Un reactor nuclear opera en un nivel de potencia constante, es decir, la razón de producción de neutrones a través de reacciones de fisión es balanceada por neutrones perdidos por absorción y escape. Cualquier desviación de esta condición ocasiona desbalance en el flujo de neutrones y, por lo tanto, en el nivel de potencia del reactor. Esto puede ocurrir por diferentes causas; por ejemplo, el operador del reactor requiere cambiar el nivel de potencia alterando la población neutrónica a través de la inserción o extracción de barras de control.

Cambios más drásticos ocurren en situaciones tales como falla de control de flujo de recirculación, pérdida de los calentadores de agua de alimentación, disparo de turbina, entre otros.

En un reactor de agua en ebullición (BWR), la distribución de potencia en el núcleo puede ser afectada por el movimiento parcial de barras de control y, en mayor grado, por los mecanismos de retroalimentación (fracción de vacíos, efecto Doppler, concentración de xenón, temperatura de refrigerante).

En un análisis de inestabilidades del fenómeno de onda de densidad en un reactor de agua en ebullición (BWR) la razón de generación de calor interna del combustible no es una constante ni un parámetro conocido. Entonces, debido a los efectos de retroalimentación neutrónica, la potencia térmica generada en el núcleo del reactor es función de los parámetros termohidráulicos instantáneos del combustible y refrigerante. En particular, la dependencia temporal y espacial de la generación de calor interna $q'''(t, z)$, presenta una dependencia global de las distribuciones en el núcleo de la fracción de vacío y temperatura del combustible.

Una formulación simple para describir los procesos nucleares es el modelo puntual de la cinética del reactor. Suponiendo que la dependencia espacial y temporal de la generación interna de calor puede expresarse como:

$$q'''(z, t) = q_0'''(z)n(t) \quad (48)$$

donde q_0''' es la distribución de la generación de calor en estado estable y $n(t)$ es la densidad neutrónica normalizada.

Las ecuaciones de la cinética puntual, con un precursor efectivo de neutrones retardados, describen la evolución temporal de la población de los neutrones y la concentración de los precursores. Estas ecuaciones están dadas por

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r - \beta}{\Lambda} N + \lambda_d C \quad (49)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} N - \lambda_d C \quad (50)$$

donde N es la densidad de neutrones, C es la concentración de los precursores de neutrones retardados, r es la reactividad, λ_d es la constante de decaimiento de los precursores de neutrones retardados, β es la fracción efectiva de los neutrones retardados y Λ es el tiempo de generación de neutrones.

Definiendo la densidad de neutrones y concentración de precursores normalizados como:

$$n(t) = \frac{N(t)}{N_0} \quad (51)$$

$$c(t) = \frac{C(t)}{N_0} \quad (52)$$

Las Ecs. (49) y (50) en términos de variables normalizadas:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{r(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda_d c(t) \quad (53)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda_d c(t) \quad (54)$$

Se puede observar en la Ec. (53) que la reactividad aparece como un parámetro, sin embargo la reactividad dinámica es una función de $n(t)$, entonces esta ecuación es no lineal.

En reactores BWR, la retroalimentación nuclear se debe en mayor parte a reactividad por fracción de vacíos. En el análisis de estabilidad en reactores BWR un parámetro de interés es la perturbación de la fracción de vacíos promedio, cuando la dinámica de la termohidráulica del núcleo está acoplada con el modelo puntual de la cinética neutrónica. La reactividad total se puede escribir como la suma de los efectos físicos independientes, es decir:

$$r_l = r_\varepsilon + \sum r_j \quad (55)$$

La reactividad por vacíos está dada por [2]:

$$r_\varepsilon = c_{\varepsilon 1} \varepsilon + c_{\varepsilon 2} \varepsilon^2 + c_{\varepsilon 3} \varepsilon^3 \quad (56)$$

donde ε es la fracción de vacíos promedio. En la Tabla I se presentan los parámetros del modelo de la cinética neutrónica para diferentes quemados de combustible, donde BOC indica inicio de ciclo, MOC para indicar mitad de ciclo y EOC se usa para indicar fin de ciclo.

TABLA I. PARÁMETROS DEL MODELO DE CINÉTICA NEUTRÓNICA [2].

	BOC	MOC	EOC
β	0.0072	0.00625	0.0053
λ_d	0.950	0.950	0.950
c_1	-2.60	-4.093	-5.41
c_2	-34.0	-41.04	-48.27
c_3	-26.0	30.82	34.54

Se puede observar que la Ec. (48) acopla al modelo de conducción dada por la Ec. (47) con el modelo puntal de la cinética dada por las Ecs. (53) y (50). Entonces sustituyendo la Ec. (48) en la Ec. (47) se obtiene:

$$\frac{d\langle T_c \rangle}{dt} = b_1 n(t) - b_2 q'' \quad (57)$$

donde

$$b_1 = \frac{q_0'''(z)}{\langle \rho C_p \rangle_c} \quad (58)$$

$$b_2 = \frac{A_{TC}}{\langle \rho C_p \rangle_c V_c} \quad (59)$$

4.0 PERTURBACIONES DE PRIMER ORDEN

El objetivo de esta sección es introducir las técnicas de perturbación de primer orden, las cuales se aplican normalmente para linealizar ecuaciones. Los estudios en el dominio de la frecuencia se desarrollan para ecuaciones lineales. Como se puede observar en las secciones previas el conjunto de ecuaciones obtenido es no lineal y es necesario linealizarlas aplicando técnicas apropiadas para realizar un estudio en el dominio de la frecuencia. La metodología es muy simple y consiste en: linealizar las ecuaciones no lineales en el dominio del tiempo; segundo se aplica la transformada de Laplace a las ecuaciones lineales obteniendo un conjunto equivalente de ecuaciones algebraicas en el dominio de Laplace; tercero se sustituye la variable de Laplace s por ωi donde ω es la frecuencia angular e i indica que se trata de un número complejo.

Sea $\psi(t)$ cualquier función genérica en el tiempo, entonces la perturbación de primer orden se puede obtener de una expansión en series de Taylor truncada hasta el primer orden:

$$\delta\psi = \psi(x(t)) - \psi_0 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)_0 \delta x(t) \quad (60)$$

donde ψ_0 es el valor de la función no perturbada, conocida también como estado base.

Sea $\psi(x) = cx^a$ siendo c y a constantes, entonces la perturbación viene dada por:

$$\delta\psi(x) = acx^{a-1}\delta x = a\psi_0 \frac{\delta x}{x_0} \quad (61)$$

Sea

$$\psi(x) = \frac{dx}{dt} \quad (62)$$

Entonces

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d\delta x}{dt} \quad (63)$$

Se puede observar que el análisis de perturbación de primer orden es similar al aplicar el operador diferencial a la función $\psi(x)$.

Sea $\psi(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} G(x, z) dz$, cuya perturbación está dada por:

$$\delta\psi = \int_{g_{1,0}}^{g_{2,0}} G(x, z) dz + G_0(x, g_2(x))\delta g_2 - G_0(x, g_1(x))\delta g_1 \quad (64)$$

Se puede observar que esta ley de perturbación es análoga a la regla de Leibnitz del cálculo.

Todas las perturbaciones se toman a partir de un estado estable y las variables con un subíndice cero son tomadas en ese estado.

Las leyes de perturbación presentadas en esta sección se aplican en forma sistemática a los modelos matemáticas descritos en secciones anteriores.

5.0 MODELO ANALÍTICO PARA EL ANÁLISIS DE OSCILACIONES

Las expresiones de las caídas de presión de cada una de las fases que aparecen en la Ec. (1), se obtienen al integrar las Ecs. (33) y (43) para las regiones en una y dos fases, respectivamente de acuerdo con la Fig. 1.

El dominio de integración de la región en una fase es de 0 a $\lambda(t)$, siendo ésta la longitud de ebullición que se localiza en la frontera de ebullición y se ha convenido que sea dependiente en el tiempo:

$$\Delta p_{1\phi} = p_{en} - p(\lambda) = \int_0^{\lambda(t)} \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{f}{D_h} \frac{G^2}{2\rho_f} + \rho_f g \right) dz + \sum_{i \in L_{1\phi}} K_i \frac{G^2}{2\rho_f} \quad (65)$$

El dominio de integración de la región en dos fases es de $\lambda(t)$ a L_C :

$$\Delta p_{2\phi} = p(\lambda) - p_{sa} = \int_{\lambda(t)}^{L_C} \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G^2}{\langle \rho \rangle} \right) + \frac{f}{D_h} \frac{G^2}{2\langle \rho \rangle} + \langle \rho \rangle g \right] dz + \sum_{i \in L_{2\phi}} K_i \frac{G^2(z_i)}{2\langle \rho(z_i) \rangle} \quad (66)$$

Región en una fase. Aplicando las leyes de perturbación de primer orden y después la transformada de Laplace, la Ec. (65) queda como:

$$\delta(\Delta p_{1\phi}(s)) = \left[s\lambda_0 \rho_f + \left(f \frac{\lambda_0}{D_h} + \sum_{i \in L_{1\phi}} K_i \right) G_0 \right] \delta j_{en}(s) + \left(\frac{G_0^2 f}{2\rho_f D_h} + \rho_f g \right) \delta \lambda(s) \quad (67)$$

Para una presión p del sistema dado y velocidad superficial de líquido subenfriado $j_{en,0}$, el flujo másico por unidad de área está dado por:

$$G_0 = \rho_f j_{en,0} \quad (68)$$

Para el estado transitorio esta ecuación se puede extender de la siguiente forma:

$$G(t) = \rho_f j_{en}(t) \quad (69)$$

Si el subenfriamiento a la entrada del canal es $\Delta h_{en,0}$ y de la suposición de flujo de calor uniforme, la longitud de la región líquida en estado estacionario λ_0 , puede calcularse con la ecuación de balance de energía dada por la Ec. (35):

$$\lambda_0 = \frac{G_0 A \Delta h_{en,0}}{q_0'' P_C} \quad (70)$$

Debido a que se considera incompresible la fase líquida, la velocidad superficial en la región de una fase es constante e igual a $j_{en,0}$.

Región en dos fases. En esta región es más complejo obtener el modelo de perturbaciones, puesto que se requieren dos ecuaciones adicionales de masa para describir el comportamiento de cada una de las fases de la mezcla bifásica, además de que algunas variables dependen de la dirección axial y del tiempo. Las ecuaciones de balance de masa para la fase gas y fase líquida están dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_g j_g) = \Gamma \quad (71)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_f(1-\varepsilon)] + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_f j_l) = -\Gamma \quad (72)$$

El término de generación de vapor por unidad de volumen Γ está dada por:

$$\Gamma = \frac{q'' P_C}{A h_{fg}} \quad (73)$$

donde h_{fg} es el calor latente de vaporización.

Combinando las Ecs. (71) y (72) con la ecuación de conservación de energía dada por la Ec. (45), se obtiene la variación de la velocidad superficial total en la región bifásica:

$$\frac{\partial j}{\partial z} = \Gamma v_{fg} \quad (74)$$

donde v_{fg} es la diferencia del volumen específico de la fase gas y el volumen específico de la fase líquida en condiciones de saturación. Es importante apuntar que al considerar las fases compresibles la ecuación anterior adquiere la forma:

$$\frac{\partial j}{\partial z} = \Gamma v_{fg} + \left(\frac{1-\varepsilon}{\rho_f} \frac{d\rho_f}{dp} + \frac{\varepsilon}{\rho_g} \frac{d\rho_g}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial t} - \left(\frac{j_f}{\rho_f} \frac{d\rho_f}{dp} + \frac{j_g}{\rho_g} \frac{d\rho_g}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial z} \quad (75)$$

En la región de dos fases, la velocidad superficial en el estado estacionario $j_0(z)$, se obtiene al integrar la Ec. (74):

$$j_0(z) = \Omega_0(z - \lambda_0) + j_{en,0} \quad (76)$$

donde

$$\Omega_0 = \Gamma_0 v_{fg} \quad (77)$$

En la región de dos fases el flujo másico por unidad de área en estado base es:

$$G_0 = \langle \rho_0(z) \rangle j_0(z) \quad (78)$$

En estado transitorio las Ecs. (76)-(78) adquieren la siguiente forma:

$$j(t, z) = \Omega(t, z)[z - \lambda(t)] + j_{en}(t) \quad (79)$$

$$\Omega(t, z) = \frac{q''(t, z) P_C}{A h_{fg}} v_{fg} \quad (80)$$

$$G(t, z) = \langle \rho(t, z) \rangle j(t, z) \quad (81)$$

Las expresiones de las Ecs. (74)-(81) serán aplicadas en el desarrollo que a continuación se presenta. Para facilitar el desarrollo es necesario reescribir la Ec. (66). Los dos primeros términos de la integral de la Ec. (66) se puede expresar de la siguiente forma.

Después de aplicar la relación dada por la Ec. (81) y combinado el resultado obtenido con la ecuación de balance de masa [Ec. (36)]:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G^2}{\langle \rho \rangle} \right) = \langle \rho \rangle \frac{\partial j}{\partial t} + G \frac{\partial j}{\partial z} \quad (82)$$

Entonces, sustituyendo este resultado y la Ec. (81) en la Ec. (66) se obtiene:

$$\Delta p_{2\phi} = \int_{\lambda(t)}^{L_c} \left[\langle \rho \rangle \frac{\partial j}{\partial t} + G \frac{\partial j}{\partial z} + \frac{f}{D_h} \frac{Gj}{2} + \langle \rho \rangle g \right] dz + \sum_{i \in L_{2\phi}} K_i \frac{G(z_i)j(z_i)}{2} \quad (83)$$

Aplicando las leyes de perturbación y la transformada de Laplace se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta(\Delta p_{2\phi}(s)) = & \int_{\lambda(t)}^{L_c} \left\{ \left[(s + \Omega_0) \langle \rho_0(z) \rangle + \frac{G_0 f}{D_h} \right] \delta j(s, z) + \left[\Omega_0 j_0(z) + \frac{j_0^2(z) f}{2D_h} + g \right] \delta \langle \rho(s, z) \rangle + G_0 \delta \Omega(s, z) \right\} dz \\ & - \left(G_0 \Omega_0 + \frac{f}{D_h} G_0 j_{en,0} + g \rho_f \right) \delta \lambda(s) + \sum_{i \in L_{2\phi}} K_i \left[G_0 \delta j(s, z_i) + \frac{1}{2} \delta j_0^2(z_i) \delta \langle \rho(s, z_i) \rangle \right] \end{aligned} \quad (84)$$

Como se puede observar en las Ecs. (67) y (84) es necesario determinar las relaciones funcionales de los términos: $\delta \lambda(s)$, $\delta j(s, z)$, $\delta \Omega(s, z)$ y $\delta \langle \rho(s, z_i) \rangle$.

5.1 RELACIONES FUNCIONALES DE LA TERMOHIDRÁULICA

Perturbando la Ec. (79) y obteniendo la transformada de Laplace:

$$\delta j(s, z) = (z - \lambda_0) \delta \Omega(s, z) - \Omega_0 \delta \lambda(s) + \delta j_{en}(s) \quad (85)$$

Cálculo de $\delta\lambda(s)$

Para obtener $\delta\lambda(s)$ se integra la ecuación de energía [Ec. (45)] entre los límites de λ_0 a $\lambda(s)$. Antes es conveniente sustituir la ecuación de balance masa [Ec. (36)] en la ecuación de conservación de energía:

$$G \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial z} = \frac{q'' P_C}{A} - \langle \rho \rangle \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} \quad (86)$$

Integrando:

$$G_0 \int_{\langle h(t, \lambda_0) \rangle}^{\langle h(t, \lambda) \rangle} \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial z} dz = \int_{\lambda_0}^{\lambda(t)} \left[\frac{q'' P_C}{A} - \langle \rho \rangle \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} \right] dz \quad (87)$$

Aplicando las leyes de perturbación se obtiene:

$$\delta \langle h(t, \lambda) \rangle = \frac{q_0'' P_C}{G_0 A} \delta \lambda \quad (88)$$

donde $\delta \langle h(t, \lambda) \rangle = \langle h(t, \lambda) \rangle - \langle h(t, \lambda_0) \rangle$. Puesto que la interfaz se encuentra saturada a la presión del sistema (que se supone constante), $\langle h(t, \lambda) \rangle = h_f = h_0(\lambda_0)$, esto implica que $\delta \langle h(t, \lambda) \rangle = \delta \langle h(t, \lambda_0) \rangle = h_0(\lambda_0) - \langle h(t, \lambda_0) \rangle$. Obteniendo la transformada de Laplace y resolviendo para las perturbaciones de la longitud de ebullición se obtiene:

$$\delta \lambda(s) = -\frac{G_0 v_{fg}}{\Omega_0 h_{fg}} \delta \langle h(s, \lambda_0) \rangle = -\frac{\lambda_0}{\Delta h_{sub}} \delta \langle h(s, \lambda_0) \rangle \quad (89)$$

donde Ω_0 está dada por la Ec. (77). Las perturbaciones en la entalpía de la Ec. (89) dependen del flujo de refrigerante a la entrada y para determinarla se aplican las Ecs. (69) y (86):

$$j_{en}(t) \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial z} + \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} = \frac{q'' P_C}{\rho_f A} \quad (90)$$

Perturbando y obteniendo la transformada de Laplace:

$$j_{en,0} \frac{\partial \delta \langle h(s, z) \rangle}{\partial z} + \delta j_{en}(s, z) \frac{\partial \langle h_0(z) \rangle}{\partial z} + s \delta \langle h(s, z) \rangle = \frac{\delta q''(s, z) P_C}{\rho_f A} \quad (91)$$

De la Ec. (90) se tiene que:

$$\frac{\partial \langle h_0(z) \rangle}{\partial z} = \frac{q_0'' P_C}{\rho_f A} \quad (92)$$

Sustituyendo esta ecuación en la Ec. (91) se obtiene:

$$\frac{\partial \delta \langle h(s, z) \rangle}{\partial z} + \frac{s}{j_{en,0}} \delta \langle h(s, z) \rangle = \frac{q_0'' P_C}{G_0 A} \left(\frac{\delta q''(s, z)}{q_0''} - \frac{\delta j_{en}(s, z)}{j_{en,0}} \right) \quad (93)$$

Es necesario ahora determinar las perturbaciones del flujo de calor por unidad de área. La ley de enfriamiento de Newton es una relación independiente que se puede usar:

$$q'' = H_{1\phi} (T_p - T_f) \quad (94)$$

donde $H_{1\phi}$ es el coeficiente de transferencia de calor para la región en una fase, T_p es la temperatura de pared y T_f es la temperatura del refrigerante moderador.

Perturbando la ecuación anterior y aplicando la Transformada de Laplace:

$$\delta q''(s) = \delta H_{1\phi}(s) (T_{p,0} - T_{f,0}) + H_{1\phi,0} [\delta T_p(s) - \delta T_f(s)] \quad (95)$$

Sustituyendo el estado base, el cual se obtiene de la Ec. (94):

$$\delta q''(s) = \left[\frac{\delta H_{1\phi}(s)}{H_{1\phi,0}} \right] q_0'' + H_{1\phi,0} [\delta T_p(s) - \delta T_f(s)] \quad (96)$$

Para flujo turbulento el coeficiente de transferencia de calor se obtiene con la correlación de Dittus-Boelter:

$$H_{1\phi} = a_1 Re^{a_2} Pr^{a_3} \quad (97)$$

donde $a_1 = 0.023K_f / D_h$ siendo K_f la conductividad térmica, $a_2 = 0.8$, $a_3 = 0.4$, Re es el número de Reynolds y Pr es el número de Prandl. Perturbando y aplicando la transformada de Laplace:

$$\left[\frac{\delta H_{1\phi}(s)}{H_{1\phi}} \right] = a_2 \left[\frac{\delta j_{en}(s)}{j_{en,0}} \right] \quad (98)$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (96):

$$\delta q''(s) = H_{1\phi,0} \left[\delta T_p(s) - \frac{\delta \langle h(s, z) \rangle}{C_{p,f}} \right] + q_0'' a_2 \left[\frac{\delta j_{en}(s)}{j_{en,0}} \right] \quad (99)$$

donde $\delta T_f = \delta \langle h(s, z) \rangle / C_{p,f}$.

Ahora es necesario determinar las perturbaciones en la temperatura de la pared, a partir de la Ec. (47). Perturbando la Ec. (47) y aplicando la transformada de Laplace:

$$\delta T_p(s) = d_1(s) \delta q''(s) + d_2(s) \delta q'''(s) \quad (100)$$

donde

$$d_1(s) = \frac{1}{s\langle \rho C_p \rangle_C} \quad (101)$$

$$d_2(s) = \frac{A_{TC}}{s\langle \rho C_p \rangle_C V_C} \quad (102)$$

Sustituyendo la Ec. (100) en la Ec. (99):

$$\frac{\delta q''(s)}{q_0''} = \frac{1}{1 - H_{1\phi,0} d_2(s)} \left\{ \frac{H_{1\phi,0} q_0'' d_1(s)}{q_0''} \left[\frac{\delta q'''(s)}{q_0''} \right] + a_2 \left[\frac{\delta j_{en}(s)}{j_{en,0}} \right] - \frac{H_{1\phi,0}}{q_0'' C_{p,f}} \delta \langle h(s, z) \rangle \right\} \quad (103)$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (93):

$$\frac{\partial \delta \langle h(s, z) \rangle}{\partial z} + \varphi_1(s) \delta \langle h(s, z) \rangle = \varphi_2(s) \left[\frac{\delta j_{en}(s, z)}{j_{en,0}} \right] + \varphi_3(s) \left[\frac{\delta q'''(s)}{q_0''} \right] \quad (104)$$

donde

$$\varphi_1(s) = \frac{s}{j_{en,0}} + \frac{H_{1\phi} P_C}{G_0 A C_{p,f} [1 - H_{1\phi,0} d_2(s)]} \quad (105)$$

$$\varphi_2(s) = \frac{q_0'' P_C}{G_0 A} \left[\frac{a_2}{1 - H_{1\phi,0} d_2(s)} - 1 \right] \quad (106)$$

$$\varphi_3(s) = \frac{q_0'' P_C}{G_0 A} \left[\frac{H_{1\phi,0} d_1(s)}{1 - H_{1\phi,0} d_2(s)} \right] \quad (107)$$

Integrando la Ec. (104) de $z=0$ a $z=\lambda_0$, con la condición de frontera $\delta h(s, 0) = \delta h_{en}(s, 0)$, se obtiene:

$$\delta h(s, \lambda_0) = e^{-\varphi_1(s)\lambda_0} \delta h_{en}(s) + \frac{1 - e^{-\varphi_1(s)\lambda_0}}{\varphi_1(s)} \left[\varphi_2(s) \frac{\delta j_{en}(s, z)}{j_{en,0}} + \varphi_3(s) \frac{\delta q'''(s)}{q_0''} \right] \quad (108)$$

Sustituyendo este resultado en La Ec. (89):

$$\delta\lambda(s) = \Lambda_1(s)\delta j_{en}(s) + \Lambda_2(s)\delta q'''(s) + \Lambda_3(s)\delta h_{en}(s) \quad (109)$$

donde

$$\Lambda_1(s) = -\frac{\lambda_0}{\Delta h_{sub}} \frac{\varphi_1(s)}{\varphi_2(s)} (1 - e^{-\varphi_1(s)\lambda_0}) \quad (110)$$

$$\Lambda_2(s) = -\frac{\lambda_0}{\Delta h_{sub} q_0'''} \frac{\varphi_3(s)}{\varphi_1(s)} (1 - e^{-\varphi_1(s)\lambda_0}) \quad (111)$$

$$\Lambda_3(s) = -\frac{\lambda_0}{\Delta h_{sub}} e^{-\varphi_1(s)\lambda_0} \quad (112)$$

Para que $\delta(\Delta p_{1\phi}(s))$, dada por la Ec. (67), quede totalmente establecida es necesario sustituir el término $\delta\lambda(s)$ definido por la Ec. (109). Mientras que para el cálculo de $\delta(\Delta p_{2\phi}(s))$ [Ec. (84)], además de $\delta\lambda(s)$ es necesario encontrar expresiones para $\delta\Omega(s)$ y $\delta\langle\rho(s, z)\rangle$, estas relaciones se deducen a continuación. Es importante señalar que con estos cálculos también queda establecida la Ec. (85) para $\delta j(s, z)$.

Cálculo de $\delta\Omega(s)$. Perturbando la Ec. (80) y aplicando la transformada de Laplace, se obtiene:

$$\delta\Omega(s, z) = \frac{P_c v_{fg}}{A h_{fg}} \delta q''(s, z) \quad (113)$$

La ecuación anterior se aplica a la región bifásica y el término $\delta q''(s, z)$ se obtiene como antes, sin embargo es necesario apuntar dos aspectos: (1) el coeficiente de transferencia de calor ya no es el de una fase y se debe usar uno apropiado para flujo en dos fases y (2) la temperatura del fluido en la

región del flujo en dos fases es la de saturación a la presión del sistema. Con estas acotaciones la ley de enfriamiento de Newton toma la siguiente forma:

$$q'' = H_{2\phi}(T_p - T_s) \quad (114)$$

donde $H_{2\phi}$ es el coeficiente de transferencia de calor para flujo en dos fases y para su cálculo se usa la correlación de Chen. El término T_s representa la temperatura de saturación a la presión del sistema.

Perturbando la ecuación anterior y aplicando la transformada de Laplace:

$$\delta T_p(s, z) = \frac{(T_{p,0} - T_s)}{q_0''} \delta q''(s, z) \quad (115)$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (100) y resolviendo para $\delta q''(s, z)$ se obtiene:

$$\delta q''(s, z) = \frac{d_2(s)}{d_3 - d_1(s)} \delta q'''(s, z) \quad (116)$$

donde $d_1(s)$ y $d_2(s)$ están definidas por las Ecs. (101) y (102), respectivamente y d_3 está dada por:

$$d_3 = \frac{(T_{p,0} - T_s)}{q_0''} \quad (117)$$

Sustituyendo la Ec. (116) en la Ec. (113) se obtiene la siguiente relación:

$$\delta \Omega(s, z) = d_4(s) \delta q'''(s, z) \quad (118)$$

donde

$$d_4(s) = \left[\frac{d_2(s)}{d_3 - d_1(s)} \right] \frac{P_c \nu_{fg}}{Ah_{fg}} \quad (119)$$

La Ec. (118) más adelante será sustituida en las Ecs. (84) y (85).

Cálculo de $\delta\langle\rho(s,z)\rangle$. Como se puede observar en la Ec. (84) una de las relaciones funcionales necesarias es $\delta\langle\rho(s,z)\rangle$. Para su cálculo se utilizó la ecuación de conservación de masa para flujo homogéneo en dos fases dada por la Ec. (36). Es conveniente escribir esta ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{\partial\langle\rho(t,z)\rangle}{\partial t} + j(t,z) \frac{\partial\langle\rho(t,z)\rangle}{\partial z} + \langle\rho(t,z)\rangle\Omega(t,z) = 0 \quad (120)$$

donde

$$\frac{\partial j(t,z)}{\partial z} = \Omega(t,z) \quad (121)$$

Perturbando y aplicando la transformada de Laplace:

$$\frac{\partial\langle\rho(s,z)\rangle}{\partial z} + \frac{(s + \Omega_0)}{j_0(z)} \delta\langle\rho(s,z)\rangle = -\frac{\delta j(s,z)}{j_0(z)} \frac{\partial\langle\rho_0(z)\rangle}{\partial z} - \frac{\langle\rho_0(z)\rangle}{j_0(z)} \Omega(s,z) \quad (122)$$

El estado base de la Ec. (120) es:

$$\frac{\partial\langle\rho_0(z)\rangle}{\partial z} = -\frac{\langle\rho_0(z)\rangle}{j_0(z)} \Omega_0(z) \quad (123)$$

Sustituyendo las Ecs. (76), (78) y (123) en (122) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\langle\rho(s,z)\rangle}{\partial z} + \left(\frac{s/\Omega_0 + 1}{z - \lambda_0 + j_{en,0}/\Omega_0} \right) \delta\langle\rho(s,z)\rangle \\ & = \frac{G_0}{\Omega_0^2} \left[\frac{\delta j(s,z)}{(z - \lambda_0 + j_{en,0}/\Omega_0)^3} + \frac{\delta\Omega(s,z)}{(z - \lambda_0 + j_{en,0}/\Omega_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (124)$$

Para resolver EDO anterior es necesario determinar la condición de frontera en $z = \lambda_0$, esto se logra al integrar la Ec. (36) entre los límites λ_0 y $\lambda(t)$.

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda(t)} \left\{ \frac{\partial \langle \rho(t, z) \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} [\langle \rho(t, z) \rangle j(t, z)] \right\} dz = 0 \quad (125)$$

entonces,

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda(t)} \frac{\partial \langle \rho(t, z) \rangle}{\partial t} dz + \langle \rho(t, \lambda(t)) \rangle j(t, \lambda(t)) - \langle \rho(t, \lambda_0) \rangle j(t, \lambda_0) = 0 \quad (126)$$

Considerando que $\langle \rho(t, \lambda(t)) \rangle = \rho_f$ y que $j(t, \lambda(t)) = j_{en}(t)$, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda(t)} \frac{\partial \langle \rho(t, z) \rangle}{\partial t} dz + \rho_f j_{en}(t) - \langle \rho(t, \lambda_0) \rangle j(t, \lambda_0) = 0 \quad (127)$$

Perturbando y aplicando la transformada de Laplace y resolviendo para $\delta \langle \rho(s, \lambda_0) \rangle$:

$$\delta \langle \rho(s, \lambda_0) \rangle = \frac{\rho_f}{j_{en,0}} [\delta j_{en}(s) - \delta j(s, \lambda_0)] \quad (128)$$

Para determinar $\delta j(s, \lambda_0)$ se usa la Ec. (79) y después de perturbarla y transformarla a una ecuación de Laplace, se evalúa en $z = \lambda_0$, es decir:

$$\delta j(s, \lambda_0) = -\Omega_0 \delta \lambda(s) + \delta j_{en}(s) \quad (129)$$

donde $\delta \lambda = \lambda - \lambda_0$. Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior se obtiene la condición de frontera necesaria para resolver la EDO dada por la Ec. (124):

$$\delta \langle \rho(s, \lambda_0) \rangle = \frac{\rho_f \Omega_0}{j_{en,0}} \delta \lambda(s) \quad \text{en} \quad z = \lambda_0 \quad (130)$$

Aplicando esta condición de frontera se obtiene que la solución de la Ec. (124) es:

$$\begin{aligned} \delta\langle\rho(s, z)\rangle = & \left\{ s \begin{bmatrix} j_{en,0} \\ j_0(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s \\ \Omega_0^{-1} \end{pmatrix} - \Omega_0 \right\} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ s - \Omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \\ j_0^2(z) \end{bmatrix} \delta\lambda(s) \\ & + \left\{ 1 - \begin{bmatrix} j_{en,0} \\ j_0(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s \\ \Omega_0^{-1} \end{pmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ s - \Omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \\ j_0^2(z) \end{bmatrix} \delta j_{en}(s) + \left\{ 1 - \begin{bmatrix} j_{en,0} \\ j_0(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s \\ \Omega_0^{-1} \end{pmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ s - \Omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 j_{en,0} \\ j_0^2(z) \end{bmatrix} \delta\Omega(s) \end{aligned} \quad (131)$$

donde $j_0(z)$, $\delta\lambda(s)$ y $\delta\Omega(s)$ están dadas por las Ecs. (76), (109) y (118), respectivamente.

5.2 MODELO ANALÍTICO PARA $\delta(\Delta p_{1\phi}(s))$

La sustitución de la Ec. (109) en la Ec. (67) conduce a la Ec. (3) de la sección 2.2. Los desarrollos de las secciones han permitido obtener las funciones de transferencia en términos de parámetros termohidráulicos conocidos. Algunos de estos parámetros son función de las condiciones de operación del reactor, mientras que otros son parámetros constantes, los cuales corresponden a aspectos de diseño del reactor.

$$\delta \Delta p_{1\phi}(s) = \Gamma_1(s) \delta j_{en}(s) + \Gamma_2(s) \delta q''(s) + \Gamma_3(s) \delta h_{sub}(s) \quad (3)$$

donde

$$\Gamma_1(s) = G_0 \left[\frac{s\lambda_0}{j_{en,0}} + f \frac{\lambda_0}{D_h} + K_{en} + \left(\frac{j_{en,0}f}{2D_h} + \frac{g}{j_{en,0}} \right) \Lambda_1(s) \right] \quad (132)$$

$$\Gamma_i(s) = G_0 \left(\frac{j_{en,0}f}{2D_h} + \frac{g}{j_{en,0}} \right) \Lambda_i(s); \quad (133)$$

donde

$$K_{en} = \sum_{i \in I_{A\phi}} K_i \quad (134)$$

Dado que el modelo empleado en este estudio considera dos regiones en el canal es conveniente aglutinar todas las pérdidas hidráulicas de la región de una fase, en una equivalente a la entrada del canal.

5.3. MODELO ANALÍTICO PARA $\delta(\Delta p_{2\phi}(s))$

Para el desarrollo del modelo analítico de las perturbaciones en la caída de presión en dos fases es conveniente sustituir las Ecs. (109) y (118) en la Ec. (85), para obtener:

$$\delta j(s, z) = J_1(s) \delta j_{en}(s) + J_2(s) \delta q^m(s) + J_3(s) \delta h_{en}(s) \quad (135)$$

donde

$$J_1(s) = 1 - \Omega_0 \Lambda_1(s) \quad (136)$$

$$J_2(s) = (z - \lambda_0) d_4(s) - \Omega_0 \Lambda_2(s) \quad (137)$$

$$J_3(s) = -\Omega_0 \Lambda_3(s) \quad (138)$$

Se sustituye ahora las Ecs. (109) y (118) en la Ec. (131), obteniéndose:

$$\delta p(s, z) = R_1(s) \delta j_{en}(s) + R_2(s) \delta q^m(s) + R_3(s) \delta h_{en}(s) \quad (139)$$

donde:

$$R_1(s) = \frac{G_0}{j_{en,0}^2} \frac{\Omega_0}{(s - \Omega_0)} \left\{ [s \Lambda_1(s) - 1] e^{-(s - \Omega_0)\tau(z)} + 1 - \Omega_0 \Lambda_1(s) \right\} e^{-2\Omega_0\tau(z)} \quad (140)$$

$$R_2(s) = \frac{G_0}{j_{en,0}^2} \frac{\Omega_0}{(s - \Omega_0)} \left\{ [s \Lambda_2(s) + \frac{j_{en,0} d_4(s)}{\Omega_0}] e^{-(s - \Omega_0)\tau(z)} - \Omega_0 \Lambda_2(s) - \frac{j_{en,0}}{\Omega_0} d_4(s) \right\} e^{-2\Omega_0\tau(z)} \quad (141)$$

$$R_3(s) = \frac{G_0}{j_{en,0}^2} \frac{\Omega_0}{(s - \Omega_0)} \Lambda_3(s) \left[s e^{-(s - \Omega_0)\tau(z)} - \Omega_0 \right] e^{-2\Omega_0\tau(z)} \quad (142)$$

En estas ecuaciones la variable $\tau(z)$ está dada por:

$$\tau(z) = \frac{1}{\Omega_0} \ln \left(\frac{j_0(z)}{j_{en,0}} \right) \quad (143)$$

Sustituyendo las Ecs. (109), (118), (135), y (139) en la Ec. (84) y simplificando se obtiene la Ec. (4):

$$\delta \Delta p_{2\phi}(s) = \Pi_1(s) \delta j_{en}(s) + \Pi_2(s) \delta q''(s) + \Pi_3(s) \delta h_{sub}(s) \quad (4)$$

donde

$$\Pi_1(s) = G_0 [F_1(s) - F_2(s) \Lambda_1(s)] \quad (144)$$

$$\Pi_2(s) = -G_0 [F_2(s) \Lambda_2 - F_3(s)] \quad (145)$$

$$\Pi_3(s) = -G_0 F_2(s) \Lambda_3 \quad (146)$$

Las funciones de transferencia $F_i(s)$, siendo $i=1,2,3$, están definidas por:

$$\begin{aligned} F_1(s) = & \frac{s^2 \tau_{LC}}{(s - \Omega_0)} + \frac{f(L_C - \lambda_0)(2s - \Omega_0)}{2D_h} \frac{1}{s - \Omega_0} + \frac{\Omega_0^2}{(s - \Omega_0)^2} \left[e^{-(s - \Omega_0)\tau_{LC}} - 1 \right] \\ & + \frac{j_{en,0} f}{2D_h} \frac{\Omega_0}{(s - \Omega_0)(s - 2\Omega_0)} \left[e^{-(s - 2\Omega_0)\tau_{LC}} - 1 \right] + \frac{g}{j_{en,0}} \frac{1}{(s - \Omega_0)} \left[1 - e^{-\Omega_0\tau_{LC}} + \frac{\Omega_0}{s} (e^{-s\tau_{LC}} - 1) \right] \\ & + K_{sa} \left\{ 1 + \frac{\Omega_0}{2(s - \Omega_0)} (1 - e^{-(s - \Omega_0)\tau_{LC}}) \right\} \end{aligned} \quad (147)$$

$$\begin{aligned}
F_2(s) = & \frac{\Omega_0 s^2 \tau_{LC}}{(s - \Omega_0)} + \frac{f(L_C - \lambda_0) \Omega_0 (2s - \Omega_0)}{2D_h (s - \Omega_0)} + \frac{\Omega_0^2 s}{(s - \Omega_0)^2} [e^{-(s - \Omega_0)\tau_{LC}} - 1] \\
& + \frac{j_{en,0} f}{2D_h} \frac{\Omega_0 s}{(s - \Omega_0)(s - 2\Omega_0)} [e^{-(s - 2\Omega_0)\tau_{LC}} - 1] + \frac{g}{j_{en,0}} \frac{\Omega_0}{(s - \Omega_0)} [e^{-s\tau_{LC}} - e^{-\Omega_0\tau_{LC}}] \\
& + \Omega_0 + \frac{j_{en,0} f}{2D_h} + \frac{g}{j_{en,0}} - K_{sa} \Omega_0 \left\{ \frac{1}{2} e^{\Omega_0 s \tau_{LC}} - 1 - \frac{\Omega_0}{2(s - \Omega_0)} [1 - e^{-(s - \Omega_0)\tau_{LC}}] \right\}
\end{aligned} \tag{148}$$

$$\begin{aligned}
F_3(s) = & \left\{ \frac{(s + 2\Omega_0)}{\Omega_0} (L_C - \lambda_0) - \frac{s^2 j_{en,0} \tau_{LC}}{(s - \Omega_0)\Omega_0} - \frac{\Omega_0 j_{en,0}}{(s - \Omega_0)^2} [e^{-(s - \Omega_0)\tau_{LC}} - 1] \right\} d_4(s) \\
& + \frac{f}{2D_h} \left\{ (L_C - \lambda_0)^2 - \frac{j_{en,0}}{(s - \Omega_0)} (L_C - \lambda_0) - \frac{j_{en,0}^2}{(s - \Omega_0)(s - 2\Omega_0)} [e^{-(s - 2\Omega_0)\tau_{LC}} - 1] \right\} d_4(s) \\
& - \left\{ \frac{g}{(s - \Omega_0)} \left[\frac{1}{\Omega_0} (1 - e^{-\Omega_0\tau_{LC}}) - \frac{1}{s} (1 - e^{-s\tau_{LC}}) \right] - K_{sa} \left[(L_C - \lambda_0) - \frac{j_{en,0}}{2(s - \Omega_0)} (1 - e^{-(s - \Omega_0)\tau_{LC}}) \right] \right\} d_4(s)
\end{aligned} \tag{149}$$

$$\tau_{LC} = \frac{1}{\Omega_0} \ln \left(\frac{j_0(z=L_C)}{j_{en,0}} \right) \tag{150}$$

Los coeficientes de pérdidas hidráulicas en la región de dos fases se aglutinan en un coeficiente a la salida del canal, es decir:

$$K_{sa} = \sum_{i \in L_2\phi} K_i \tag{151}$$

5.4 RELACIONES FUNCIONALES DE LA NEUTRÓNICA

Cálculo de $P(s)$. Para calcular esta función de transferencia se utiliza el modelo puntual para la cinética neutrónica. Para expresar este modelo en términos de $q^m(z,t)$ se sustituye la Ec. (48) en las Ecs. (53) y (54):

$$\frac{dq^m(z,t)}{dt} = \frac{r(t) - \beta}{\Lambda} q^m(z,t) + \lambda_d q_0^m(z) c(t) \quad (152)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda q_0^m(z)} q^m(z,t) - \lambda_d c(t) \quad (153)$$

Aplicando perturbaciones de primer orden y obteniendo la transformada de Laplace:

$$s \delta q^m(z,s) = \frac{r_0 - \beta}{\Lambda} \delta q^m(z,s) + \frac{q_0^m(z)}{\Lambda} \delta r(s) + \lambda_d q_0^m(z) \delta c(s) \quad (154)$$

$$s \delta c(s) = \frac{\beta}{\Lambda q_0^m(z)} \delta q^m(z,s) - \lambda_d \delta c(s) \quad (155)$$

Combinado estas dos ecuaciones y resolviendo para $\delta q^m(z,s)$ se obtiene:

$$\delta q^m(z,s) = P(s) \delta r(s) \quad (156)$$

donde

$$P(s) = \frac{q_0^m(z)}{\left[s\Lambda - \frac{\lambda_d}{s + \lambda_d} \beta - (r_0 - \beta) \right]} \quad (157)$$

Cálculo de $E(s)$. La reactividad por efecto de la fracción de vacíos está dada por [2]:

$$r_\varepsilon = c_1 \langle \varepsilon \rangle + c_2 \langle \varepsilon \rangle^2 + c_3 \langle \varepsilon \rangle^3 \quad (158)$$

La fracción de vacíos promedio en el canal se define como:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} \varepsilon(t, z) dz \quad (159)$$

Considerando que $\varepsilon = 0$ en la región comprendida entre 0 y λ_0 , la ecuación anterior queda como:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{L_c} \int_{\lambda_0}^{L_c} \varepsilon(t, z) dz \quad (160)$$

Aplicando la perturbación de primer orden y después la transformada de Laplace a la Ec. (158), se obtiene:

$$\delta r_\varepsilon = c_\varepsilon \delta \langle \varepsilon(s) \rangle \quad (161)$$

donde

$$c_\varepsilon = c_1 + 2c_2\varepsilon_0 + 3c_3\varepsilon_0^2 \quad (162)$$

Perturbando y aplicando la Transformada de Laplace a la definición de $\langle \varepsilon \rangle$ en la Ec. (160), se obtiene:

$$\delta \langle \varepsilon(s) \rangle = \frac{1}{L_c} \int_{\lambda_0}^{L_c} \delta \varepsilon(s, z) dz \quad (163)$$

Para obtener una función del integrando se perturba y se obtiene la transformada de Laplace a la Ec. (37), con lo cual se obtiene:

$$\delta \varepsilon(s, z) = \frac{1}{\rho_g - \rho_f} \delta \langle \rho(s, z) \rangle \quad (164)$$

Sustituyendo está expresión en la Ec. (163):

$$\delta\langle\varepsilon(s)\rangle = \frac{1}{L_C(\rho_g - \rho_f)} \int_{\lambda_0}^{L_C} \delta\langle\rho(s, z)\rangle dz \quad (165)$$

donde $\delta\langle\rho(s, z)\rangle$ está dada por la Ec. (139). Entonces sustituyéndola en la ecuación anterior y realizando la integración se obtiene la Ec. (10):

$$\delta\varepsilon(s) = E_1(s)\delta j_{en}(s) + E_2(s)\delta q^m(s) + E_3 h_{sub}(s) \quad (10)$$

donde

$$E_1(s) = \frac{G_0\Omega_0}{(\rho_f - \rho_g)j_{en,o}L_C(s - \Omega_0)} \left\{ \frac{1 - s\Lambda_1(s)}{s} e^{-s\tau_{LC}} - \frac{(L_C - \lambda_0)[1 - \Omega_0\Lambda_1(s)]}{\Omega_0(L_C - \lambda_0) + j_{en,o}} \right\} \quad (166)$$

$$E_2(s) = \frac{G_0\Omega_0}{(\rho_f - \rho_g)j_{en,o}L_C(s - \Omega_0)} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{j_{en,o}d_4(s) + s\Omega_0\Lambda_2(s)}{s\Omega_0} (1 - e^{-s\tau_{LC}}) \\ & + \frac{(L_C - \lambda_0)[j_{en,o}d_4(s) + \Omega_0^2\Lambda_2(s)]}{\Omega_0^2(L_C - \lambda_0) + \Omega_0j_{en,o}} \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

$$E_3(s) = \frac{G_0\Omega_0\Lambda_3(s)}{(\rho_f - \rho_g)j_{en,o}L_C(s - \Omega_0)} \left\{ \frac{\Omega_0(L_C - \lambda_0)}{\Omega_0(L_C - \lambda_0) + j_{en,o}} - (1 - e^{-s\tau_{LC}}) \right\} \quad (168)$$

6. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CON EFECTOS DE RETROALIMENTACIÓN POR VACÍOS

En esta sección se presenta el modelo analítico y parámetros para el análisis de estabilidad lineal en el reactor de la U1 de la CNLV.

6.1 MODELO ANALÍTICO

Con la finalidad de realizar el análisis de estabilidad del sistema, se considera la ecuación característica de la Ec. (30) para la construcción del diagrama de Nyquist:

$$H(s) = \left[E_2(s) - \frac{\Pi_2(s)E_1(s)}{\Gamma_1(s) + \Pi_1(s)} \right] c_\varepsilon P(s) \quad (169)$$

Donde $\Gamma_1(s)$, $\Pi_1(s)$ y $E_1(s)$ se encuentran definidas por las Ecs. (132), (144) y (166) respectivamente.

Cuando la ecuación característica [Ec. (169)] toma el valor de 1 al ser evaluada en un intervalo de frecuencia dado, la función de transferencia se encuentra indeterminada, lo que corresponde a un polo, por lo tanto el sistema se encuentra en un estado inestable.

En la Tabla II se presenta un resumen de todas las funciones de transferencia involucradas para el cálculo de la ecuación característica, $H(s)$ desarrolladas en el presente trabajo.

TABLA II. RESUMEN DE ECUACIONES PARA EL CÁLCULO DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA (178)

$$\Gamma_1(s) = G_0 \left[\frac{s\lambda_0}{j_{en,0}} + f \frac{\lambda_0}{D_h} + K_{en} + \left(\frac{j_{en,0}f}{2D_h} + \frac{g}{j_{en,0}} \right) \Lambda_1(s) \right]$$

$$\Pi_1(s) = G_0 [F_1(s) - F_2(s)\Lambda_1(s)]$$

$$\Pi_2(s) = -G_0 [F_2(s)\Lambda_2 - F_3(s)]$$

$$F_1(s) = \frac{s^2\tau_{1c}}{(s-\Omega_0)} + \frac{f(L_c - \lambda_0)(2s - \Omega_0)}{2D_h(s - \Omega_0)} + \frac{\Omega_0^2}{(s - \Omega_0)^2} [e^{-(s-\Omega_0)\tau_{1c}} - 1]$$

$$+ \frac{j_{en,0}f}{2D_h} \frac{\Omega_0}{(s - \Omega_0)(s - 2\Omega_0)} [e^{-(s-2\Omega_0)\tau_{1c}} - 1] + \frac{g}{j_{en,0}} \frac{1}{(s - \Omega_0)} \left[1 - e^{-\Omega_0\tau_{1c}} + \frac{\Omega_0}{s} (e^{-s\tau_{1c}} - 1) \right]$$

$$+ K_{sa} \left\{ 1 + \frac{\Omega_0}{2(s - \Omega_0)} (1 - e^{-(s-\Omega_0)\tau_{1c}}) \right\}$$

$$F_2(s) = \frac{\Omega_0 s^2 \tau_{1c}}{(s - \Omega_0)} + \frac{f(L_c - \lambda_0) \Omega_0 (2s - \Omega_0)}{2D_h(s - \Omega_0)} + \frac{\Omega_0^2 s}{(s - \Omega_0)^2} [e^{-(s-\Omega_0)\tau_{1c}} - 1]$$

$$+ \frac{j_{en,0}f}{2D_h} \frac{\Omega_0 s}{(s - \Omega_0)(s - 2\Omega_0)} [e^{-(s-2\Omega_0)\tau_{1c}} - 1] + \frac{g}{j_{en,0}} \frac{\Omega_0}{(s - \Omega_0)} [e^{-s\tau_{1c}} - e^{-\Omega_0\tau_{1c}}]$$

$$+ \Omega_0 + \frac{j_{en,0}f}{2D_h} + \frac{g}{j_{en,0}} - K_{sa}\Omega_0 \left\{ \frac{1}{2} e^{\Omega_0 s \tau_{1c}} - 1 - \frac{\Omega_0}{2(s - \Omega_0)} [1 - e^{-(s-\Omega_0)\tau_{1c}}] \right\}$$

$$E_1(s) = \frac{G_0 \Omega_0}{(\rho_f - \rho_g) j_{en,0} L_c (s - \Omega_0)} \left\{ \frac{1 - s\Lambda_1(s)}{s} e^{-s\tau_{1c}} - \frac{(L_c - \lambda_0)[1 - \Omega_0 \Lambda_1(s)]}{\Omega_0(L_c - \lambda_0) + j_{en,0}} \right\}$$

$$E_2(s) = \frac{G_0 \Omega_0}{(\rho_f - \rho_g) j_{en,0} L_c (s - \Omega_0)} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{j_{en,0} d_4(s) + s\Omega_0 \Lambda_2(s)}{s\Omega_0} (1 - e^{-s\tau_{1c}}) \\ & + \frac{(L_c - \lambda_0)[j_{en,0} d_4(s) + \Omega_0^2 \Lambda_2(s)]}{\Omega_0^2(L_c - \lambda_0) + \Omega_0 j_{en,0}} \end{aligned} \right\}$$

$$P(s) = \frac{q_0'''(z)}{\left[s\Lambda - \frac{\lambda_d}{s + \lambda_d} \beta - (r_0 - \beta) \right]}$$

$$c_\varepsilon = c_1 + 2c_2\varepsilon_0 + 3c_3\varepsilon_0^2$$

6.2 PARÁMETROS

TABLA III. PARÁMETROS UTILIZADOS EN LA PROGRAMACIÓN DEL MODELO

PARÁMETRO	CONCEPTO	VALOR
A	Área de flujo	2.337 m
c_1	Coefficiente de fracción de vacíos	-2.6
c_2	Coefficiente de fracción de vacíos	-34
c_3	Coefficiente de fracción de vacíos	-26
D_h	Diámetro hidráulico	15.18×10^{-3} m
K_{en}	Factor de forma a la entrada	7.525
K_{sa}	Factor de forma a la salida	7.725
L_c	Longitud del canal	3.81 m
P_c	Perímetro calentado	2.337 m
Λ	Tiempo promedio entre generaciones	0.4×10^{-4}
β	Fracción de neutrones retardados	7.2×10^{-3}
λ_d	Constante de decaimiento	0.0127

7. PROGRAMACIÓN, PRUEBAS Y RESULTADOS

7.1 PROGRAMACIÓN

La programación del modelo se realizó con el paquete de computadora MATHCAD.

Las ventajas que se tiene en la programación del modelo con el paquete matemático MATHCAD, es la facilidad con la cual se programa el modelo y la velocidad con que éste presenta los resultados tanto numéricos como en representación gráfica de los mismos lo que facilita la interpretación de los resultados arrojados por el programa.

La manera en que trabaja el programa es (Fig. 4):

- El usuario establece la potencia térmica del reactor (% nominal) y el flujo de refrigerante en el núcleo (% nominal) como datos de entrada.
- Se propone un intervalo de frecuencia angular (ω), para cada uno de los estados operacionales.
- El programa obtiene los siguientes datos para determinar la función de transferencia:
 - Longitud de ebullición (λ_0).
 - $E_1(\omega)$, $E_2(\omega)$, $P(\omega)$, $\Gamma_1(\omega)$, $\Pi_1(\omega)$ y $\Pi_2(\omega)$.
 - El valor real e imaginario de la función de transferencia [$Re(H(\omega))$, $Im(H(\omega))$ respectivamente] para la construcción del diagrama de Nyquist.
 - Frecuencia característica de oscilación (f).
 - Relación potencia - flujo (Q/W).

El diagrama de flujo de la Fig. 4 muestra un diagrama simplificado del programa.

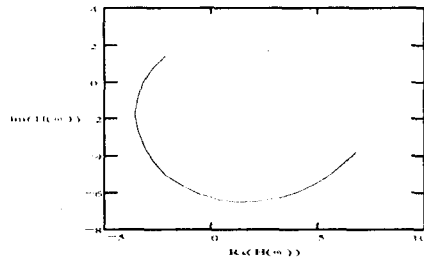
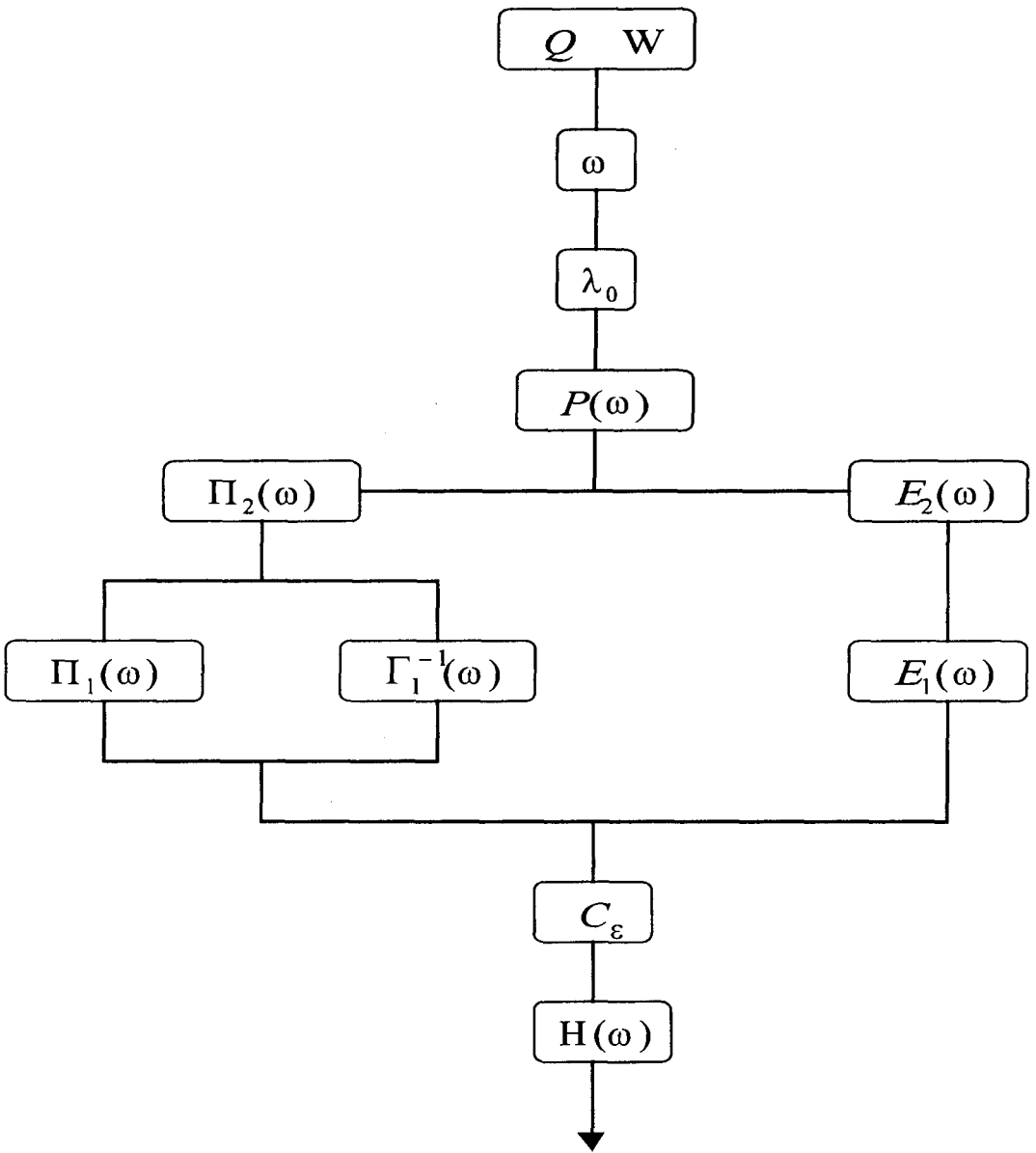


Diagrama de Nyquist

FIGURA 4. REPRESENTACIÓN PROGRAMADA DEL MODELO

7.2. RESULTADOS

Se realizaron cuatro cálculos empleando datos y características de los canales de la CNLV para cuatro estados en el mapa flujo-potencia. En estos cálculos se empleó un solo canal para representar todo el núcleo del reactor al inicio del primer ciclo. Los estados de operación estudiados corresponden a las cuatro esquinas de la zona de baja estabilidad en el mapa flujo potencia (Fig.5). En la tabla IV se muestran las condiciones de flujo y potencia para los estados de operación.

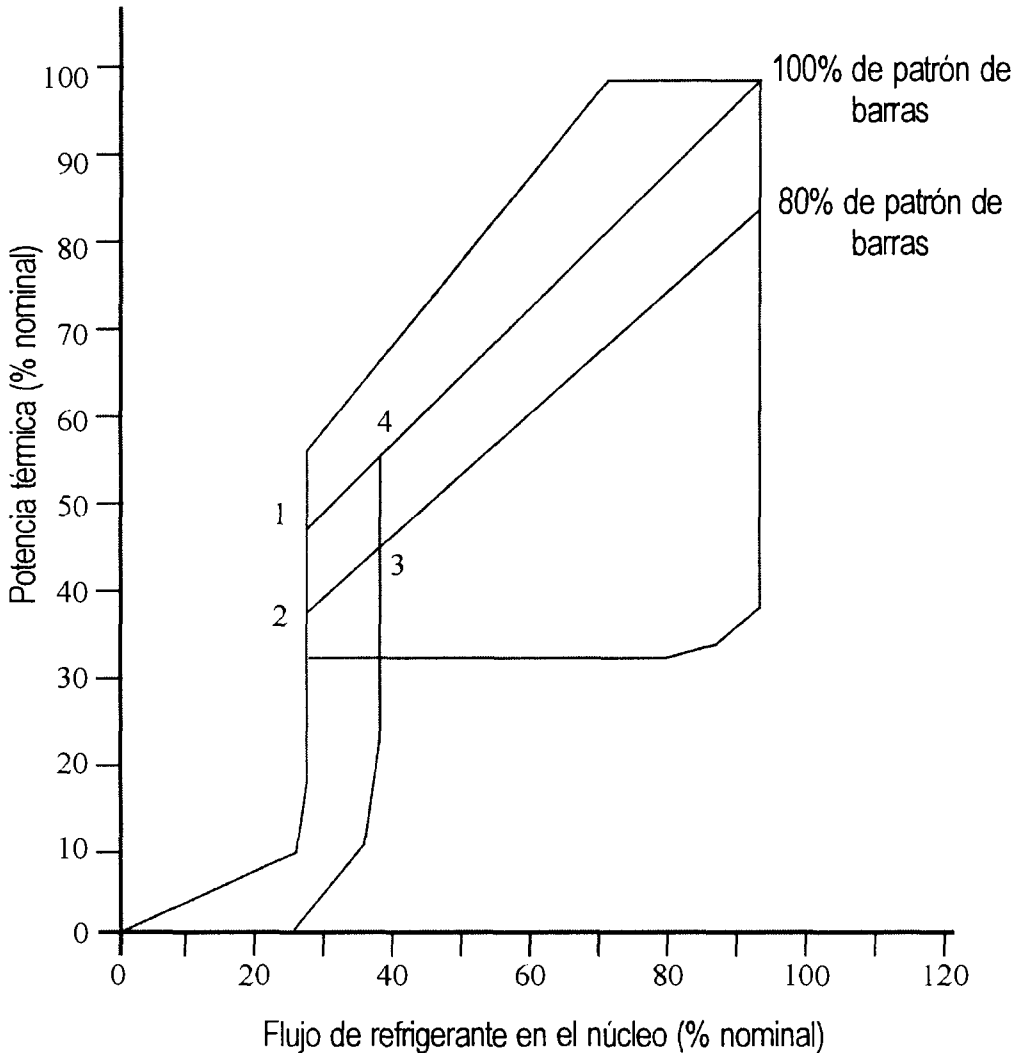


FIGURA 5. MAPA POTENCIA - FLUJO.

TABLA IV. ESTADOS DE OPERACIÓN DEL REACTOR

ESTADO No.	P (%)	W (%)
1	47.7	28.6
2	38.6	28.6
3	45.5	40.0
4	56.0	40.0

Para cada uno de los estados analizados se calculó la frecuencia a la que se obtenía la máxima respuesta graficando la magnitud de la función de transferencia versus la frecuencia una vez que la variable s se ha sustituido por $i\omega$. Los resultados se muestran en la Tabla V

TABLA V. RELACIÓN POTENCIA-FLUJO, LONGITUD DE EBULLICIÓN Y FRECUENCIA CARACTERÍSTICA PARA CUATRO ESTADOS DE OPERACIÓN.

(%) B. C.		FLUJO A TRAVÉS DEL NÚCLEO (%)			
		28.6		40.0	
		CON RET.	SIN RET.	CON RET.	SIN RET.
100	P/W	1.668		1.400	
	λ_0	0.757		0.902	
	f	0.414	0.430	0.525	0.509
80	P/W	1.350		1.138	
	λ_0	0.936		1.110	
	f	0.382	0.382	0.509	0.509

En esta tabla puede verse que la frecuencia característica no varía en forma importante cuando se varía la potencia con flujo constante. Cuando se aumenta la relación potencia-flujo la frecuencia característica aumenta para un patrón de barras constante.

La frecuencia varía sólo ligeramente cuando se toma en cuenta la retroalimentación por vacíos, lo que parece indicar que los procesos Termohidráulicos controlan la respuesta del sistema a perturbaciones de tipo oscilatorio.

Asimismo, se obtuvieron los diagramas de Nyquist para cada uno de los cuatro estados estudiados (Fig. 6) con el objeto de conocer el efecto que el cambio de condiciones de operación tiene sobre la estabilidad del reactor. En la Fig. 6 se observa que a medida que la relación potencia-flujo disminuye el sistema se hace más estable. El diagrama de Nyquist muestra que aumentar el flujo a través del núcleo (pasando del estado 1 al 4 o del 2 al 3) aumenta la estabilidad del sistema. El mismo efecto se observa cuando se disminuye potencia (pasando del estado 1 al 2 o del 4 al 3). En general, puede verse que el reducir la relación P/W aumenta la estabilidad del sistema resultando que el estado de operación más estable de los estudiados es el número 3. En ese mismo sentido puede verse que un aumento en la longitud de ebullición hace al sistema más estable lo que es de esperarse dado el efecto que la relación P/W tiene sobre λ_0 *i.e.* a menor P/W (mayor estabilidad) mayor longitud de ebullición.

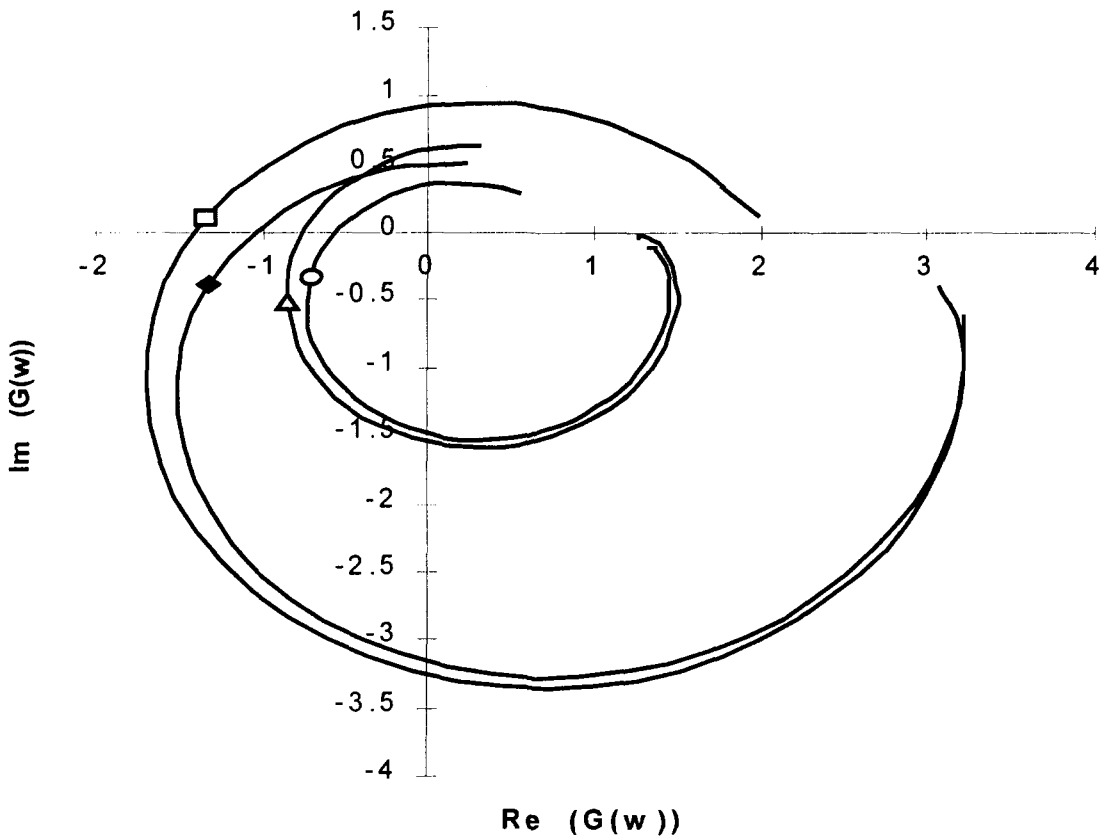


FIGURA 6. DIAGRAMA DE NYQUIST PARA CUATRO ESTADOS DE OPERACIÓN.

$$w = \omega$$

□ Edo. 1, ◆ Edo. 2, △ Edo. 4, ○ Edo. 3.

8. CONCLUSIONES

Se realizó un estudio teórico de estabilidad lineal para un canal uniformemente calentado basándose en el modelo originalmente desarrollado por Lahey y Podowsky. Se obtuvieron las funciones de transferencia para el modelo sin y con retroalimentación por vacíos. Los resultados muestran que la reducción de la relación potencia flujo aumenta la estabilidad del reactor. Tanto la reducción de potencia como el aumento de flujo de refrigerante mejoran la estabilidad del reactor. Esto se debe a que ambas operaciones producen una reducción en la relación potencia-flujo lo que produce también un aumento en la longitud de ebullición.

Las frecuencias características calculadas se encuentran en un intervalo comprendido entre 0.38 y 0.53 Hz. lo que se compara favorablemente con la frecuencia calculada para el evento ocurrido en la CNLV de 0.5 Hz obtenido en el análisis del evento[2]. Por otro lado la frecuencia característica resulta ser función del flujo de refrigerante observándose que a mayor flujo mayor frecuencia característica. Esto parece estar relacionado con la velocidad de propagación de las ondas cinemáticas. En general la frecuencia característica se ve poco afectada cuando se toma en cuenta la retroalimentación por vacíos lo que parece indicar que los procesos termohidráulicos controlan la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia.

De todo lo anterior puede concluirse que vigilar la longitud de ebullición equivale a vigilar la relación P/W y viceversa. Esto puede tener una implicación práctica importante ya que actualmente la operación del reactor de la CNLV es vigilada calculando la longitud de ebullición. Sin embargo, resulta más sencillo determinar la relación P/W especificando un valor umbral de esta variable. El uso de esta última variable resulta sencillo en el caso estudiado en el presente trabajo debido a la suposición de un perfil de potencia plano. Sin embargo en el reactor nuclear la existencia de perfiles de potencia no uniformes dificulta su uso como criterio de estabilidad.

A fin de continuar el estudio del tema de estabilidad en BWR's se considera recomendable que el modelo se detalle más a fin de tomar en cuenta distribuciones de potencia no uniformes, emplear un modelo de cinética unidimensional y un modelo de dos fluidos para el comportamiento termohidráulico y será necesaria la ampliación del modelo para considerar el circuito de recirculación completo.

REFERENCIAS

- [1] CASTILLO, R, 1998. Análisis de estabilidad de reactores de agua en ebullición mediante un modelo reducido. Tesis de Maestría, IPN, México.
- [2] ESPINOSA, G. 1992. Modelo de cinética y termohidráulica del núcleo de un reactor tipo BWR para simulación de transitorio en tiempo real. Tesis de Maestría, CENIDET, Cuernavaca, Mor.
- [3] GONZALEZ V., AMADOR R., CASTILLO R., Y HERNÁNDEZ J., 1995. "Análisis del Evento de Oscilaciones de Potencia en la CLNV". CNSNS TR 13, México D.F.
- [4] LAHEY, R.T. Y MOODY, F.J., 1993. The thermal- hydraulics of a boiling water nuclear reactor. ANS, La Grange Park, Illinois EU.
- [5] MARCH-LEUBA J., CACUCI D. Y PEREZ R., 1986. Nonlinear dynamics and stability of boiling water reactors: Parts 1 and 2. *Nuc. Sci. Eng.* 93, 124-136.
- [6] PENG S., PODOWSKI M. Z., LAHEY R. T., 1985. NUFREQ-NP, A Digital computer code for the stability analysis of boiling water nuclear reactors. NUREG/CR-4116, N. Y.
- [7] PODOWSKI M. Z., 1992. Instabilities in two-phase systems. In *Boiling Heat Transfer, Modern Developments and Advances* (Editor R. T. Lahey). Elsevier Science Publishers, N. Y.
- [8] SALINAS J., GONZÁLEZ V. Y ESPINOSA G., 1998. Análisis de estabilidad en un canal uniformemente calentado. *Avances en Ingeniería Química* (sometido).

- [9] SALINAS J., 1998. Análisis de estabilidad en BWR's. Informe de Seminario de Proyectos I y II. UAM-Iztapalapa, México D.F.
- [10] USNRC INFORMATION NOTICE 88-39, 1988. La Salle Unit 2 Loss of recirculation pumps.

NOMENCLATURA

Látinas

$E_i (s)$	Función de transferencia para vacíos
f	Frecuencia.
o	
$G(s)$	Función de transferencia del sistema.
j	Flujo volumétrico por unidad de área.
P	Potencia.
$P(s)$	Función de transferencia potencia.
q'''	Densidad de potencia.
W	Flujo a través del núcleo.
GRIEGAS	
α_v	Coefficiente de reactividad por vacíos.
$\delta ()$	Perturbación.
Δh_{sub}	Subenfriamiento.
Δp	Diferencia de presión.
ε	Fracción de vacíos.
$\Gamma_i (s)$	Función de transferencia para la región de una fases.

λ Longitud de ebullición.

ρ Reactividad.

$\Pi_i (s)$ Función de transferencia para la región de dos fases.

ω Frecuencia angular.