



**Universidad Católica del Uruguay y Ministerio de Industria,
Energía y Minería**

**Centro de Tecnología de Trazadores y Ensayos
No Destructivos DNTN-UCU**

Serie sobre Ensayos No destructivos :

**Temas de Fundamentos Fisicomatemáticos de los Ensayos No
Destructivos, N° 1.**

***“Ondas en sólidos y Emisión Acústica
Primera Parte: Los Problemas Directo e Inverso y Las
Ecuaciones de Campo Elastodinámicas”***

**Dr. Roberto Suárez Antola
Asesor Físico,
Dirección Nacional de Tecnología Nuclear**

**Julio de 2002
Montevideo, Uruguay**

**PLEASE BE AWARE THAT
ALL OF THE MISSING PAGES IN THIS DOCUMENT
WERE ORIGINALLY BLANK**

Prólogo a la Serie sobre Ensayos No Destructivos

Los ensayos no destructivos (END) constituyen un conjunto de procedimientos experimentales destinados a descubrir y caracterizar defectos en los materiales. Se basan en procesos de medición, de análisis, de interpretación y de toma de decisiones a partir de resultados obtenidos aplicando técnicas tradicionales bien desarrolladas, bien sistematizadas, y sujetas a normas específicas.

Dichas normas regulan los procedimientos involucrados, desde la formación profesional de los técnicos hasta cómo debe encararse la interpretación de los resultados de un ensayo.

También integran el campo de los END un conjunto de técnicas más nuevas, todavía en desarrollo, cuyos procedimientos no se encuentran todavía estrictamente normalizados.

Como consecuencia son áreas de investigación aplicada, necesariamente más próximas a la investigación experimental y sobre fundamentos teóricos propios de las ciencias físicas de la materia condensada (termo-mecánica de medios continuos, electrodinámica de medios continuos, física del estado sólido, etc).

La Serie sobre Ensayos No Destructivos del Centro de Tecnología de Trazadores y Ensayos No Destructivos intenta aportar conocimientos tanto en aspectos experimentales como en aspectos fisicomatemáticos de los ensayos, enfatizando técnicas nuevas o aspectos que han permanecido sin explorar en las técnicas tradicionales. Con esto se busca complementar y facilitar los esfuerzos de desarrollo en el campo de los END que desde hace muchos años vienen realizándose en nuestro país (fundamentalmente en la aplicación de las técnicas de ensayo tradicionales).

La serie consta de trabajos fundamentalmente de índole teórica, agrupados en "Temas de Fundamentos Fisicomatemáticos de los Ensayos No Destructivos", y trabajos fundamentalmente de índole experimental, agrupados en "Temas de Experimentos en Ensayos No Destructivos".

Prefacio

El presente trabajo es el primero de una serie de tres memorias breves, destinadas a revisar los fundamentos teóricos clásicos que permiten comprender la generación, la propagación y la detección de las ondas elásticas en los sólidos desde el punto de vista de la mecánica de los medios continuos.

El estudio se encara en el marco de los ensayos no destructivos, enfatizando aspectos relacionados con los ensayos basados en la emisión acústica de los defectos en los materiales.

No obstante, buena parte del contenido es aplicable a la interpretación de algunos resultados que se obtienen en los ensayos por vibraciones o por ultrasonidos.

Roberto Suárez Antola

Doctor en Ciencias

Asesor Físico de la Dirección Nacional de Tecnología Nuclear

ONDAS EN SÓLIDOS Y EMISIÓN ACÚSTICA

Primera Parte

1.Generalidades

Considérese un defecto en un sólido. El estado de tensiones puede producir una modificación brusca (por ej. crecimiento) en el defecto y sus adyacencias.

La perturbación mecánica resultante se manifiesta por la radiación de ondas que se alejan de la fuente que las produce. Dichas ondas se difunden, dispersan, difractan, reflejan, y refractan en mayor o menor grado, según las propiedades, los accidentes y la geometría que presente el material del sólido en cuestión. (Fig.1)

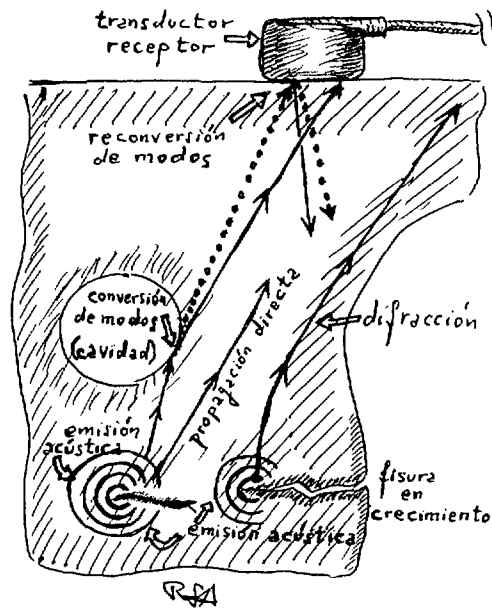


Figura 1

En este capítulo se consideran perturbaciones propagadas para las cuales las componentes del estado local de deformaciones son lo bastante pequeñas respecto de la unidad como para que la relación constitutiva entre dicho estado local de deformaciones y el correspondiente estado local de esfuerzos pueda representarse por un operador lineal (sólido lineal).

Si el sólido es homogéneo, ese operador es el mismo para los distintos puntos del cuerpo.

En sólidos puramente elásticos las componentes del estado de esfuerzos dependen solamente del valor de las componentes del estado de deformaciones en el mismo punto y en el mismo instante. En este caso las vibraciones y las ondas no se amortiguan (solamente se atenúan): la energía asociada al fenómeno vibratorio no se disipa, aunque pueda distribuirse en

una región cada vez más vasta y la amplitud del movimiento oscilatorio pueda, por esta razón, atenuarse.

El modelo de sólido elástico es, no obstante, un caso extremo: en mayor o menor grado todas las ondas en sólidos se amortiguan porque la energía mecánica asociada con la onda se disipa. Esto puede describirse estableciendo que el estado local de tensiones en un punto y en un instante dados depende, en principio, de toda la historia de deformación en ese punto. Se tienen así los materiales hereditarios, en particular, los sólidos anelásticos. (Nowick y Berry, 1972, capítulo 1).

Los procesos físicos concretos a través de los cuales se produce la disipación de la energía elástica suelen ser muy variados, pero el comportamiento anelástico se puede describir sin entrar en detalles, desde un punto de vista puramente fenomenológico suficiente para el estudio de la propagación de los pulsos de emisión acústica desde la perspectiva de los ensayos no destructivos.

En una primera aproximación, la propagación de los pulsos se puede analizar empleando el modelo de sólido elástico, lineal, homogéneo e isótropo.

En un cuerpo tal, las perturbaciones mecánicas asociadas al crecimiento de los defectos originan básicamente dos tipos de ondas diferentes: ondas P (primarias) y ondas S (secundarias), que se propagan con velocidades también diferentes.

Cuando la perturbación mecánica propagada llega por primera vez a un determinado punto del sólido, lo hace en forma de un frente de onda caracterizado por un aumento brusco en la aceleración local de la partícula del medio allí situada. Como consecuencia, los pulsos de emisión acústica llegan a un punto en forma de "frente de onda de aceleración".

El frente de onda de aceleración asociado con las ondas P viaja más rápido; presenta polarización (dirección de desplazamiento de las partículas del medio) paralela a la dirección de propagación del frente y se caracteriza porque la rotación local del medio asociada con él es nula (onda irrotacional).

El movimiento asociado con el frente de ondas S, más lento, posee polarización perpendicular a la dirección del frente y la dilatación cúbica asociada con las ondas es nula (onda solenoidal).

El movimiento que sigue detrás de un frente de onda de un pulso P es siempre irrotacional y el que sigue a un frente de ondas S es siempre solenoidal. Pero las direcciones de polarización en el interior de dichos pulsos en general no presentan las características que adoptan en el frente de onda de aceleración mismo. No obstante, ciertas formas de onda (con superficies de fase constante planas, así como algunas ondas esféricas o cilíndricas) se caracterizan porque las ondas P que adoptan esas formas especiales en un sólido homogéneo e isótropo, presentan polarización paralela a la dirección de

propagación, no sólo en el frente de ondas mismo, sino en todos los puntos alcanzados por la perturbación (ondas longitudinales, Fig.2)

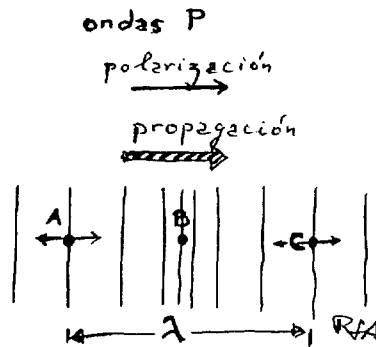


Figura 2

Análogamente, las ondas S cuya superficies de fase constante adoptan esas formas particulares en un sólido homogéneo e isótropo, poseen campos de desplazamiento que son, en todas partes, perpendiculares a la dirección de propagación (ondas transversales, Fig.3)

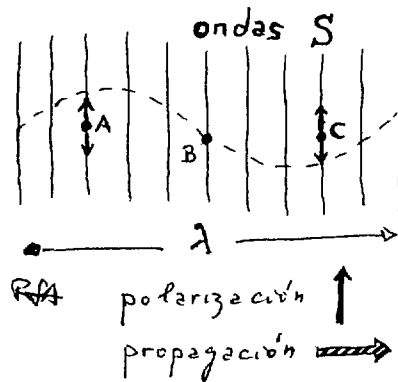


Figura 3

Para un material heterogéneo la distinción entre las ondas P y las ondas S se hace un poco confusa, según veremos posteriormente.

En un medio homogéneo, en ausencia de interfases con otros medios o de superficies frontera, la propagación de las ondas P y S se puede describir en forma separada. Pero al llegar a una interfase o a una superficie frontera, los dos tipos de movimientos (irrotacional y solenoidal) se acoplan en estos accidentes físico-geométricos. Como consecuencia, una onda incidente de un tipo va a originar, por lo general, ondas reflejadas, difractadas, refractadas o difundidas de ambos tipos (P y S): este fenómeno se conoce como **conversión de modos**.

Como consecuencia de la conversión de modos, en presencia de interfases o fronteras aparecen ciertas ondas cuya actividad se restringe a las proximidades de una interfase (sólido-sólido o sólido-líquido) o bien de una superficie sólido-vacío (como idealización de una interfase sólido-gas). En ciertas condiciones

estas formas de movimiento ondulatorio se pueden propagar en forma independiente, auto-sostenida, a lo largo de una superficie, como ondas R de Rayleigh (Fig.4), o en las proximidades de una interfase, como ondas de Stoneley (Fig. 5).

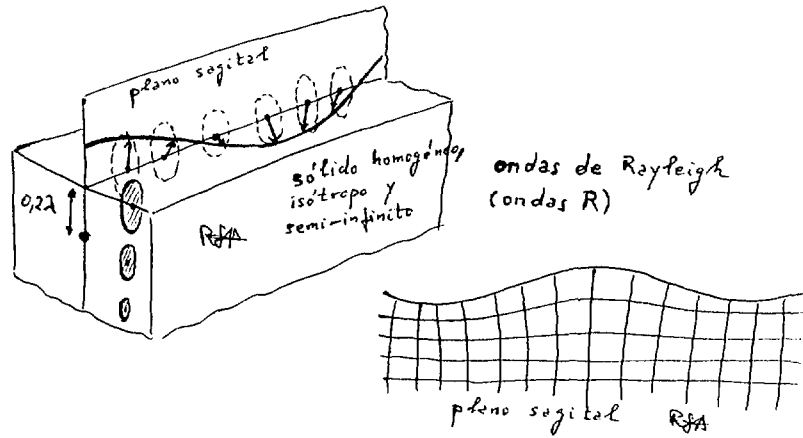


Figura 4

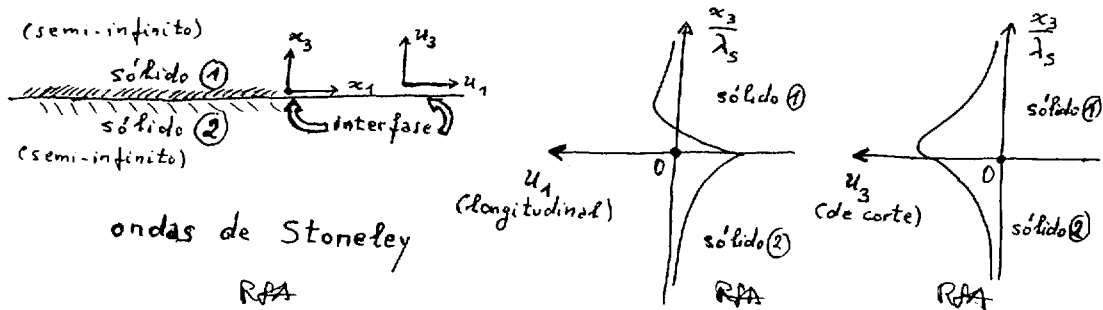


Figura 5

A su vez el fenómeno de reflexión total permite comprender la forma en la que una onda plana queda atrapada, por reflexión múltiple, en un estrato de baja velocidad –ondas de Love, Fig.6- o bien en una placa infinita en el vacío – ondas de Lamb, Fig7-.

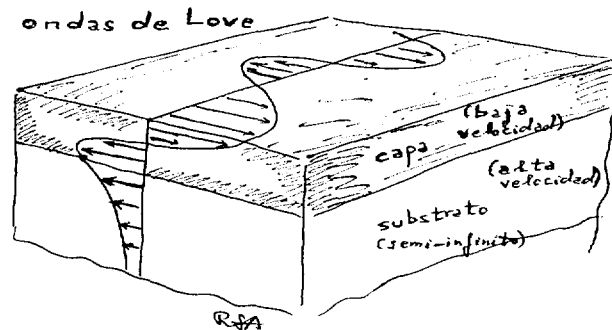


Figura 6

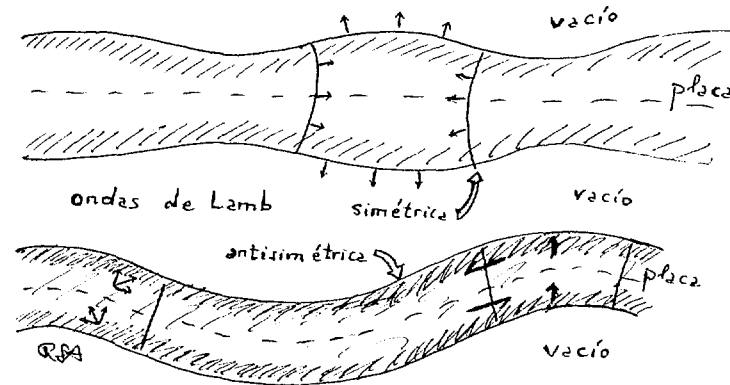


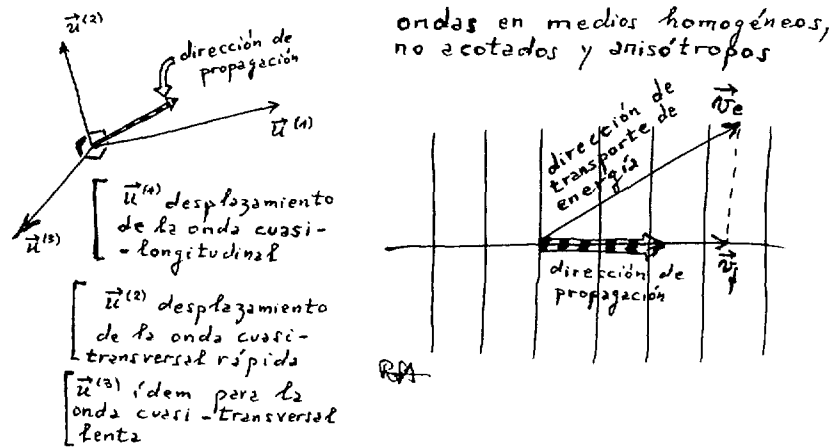
Figura 7

Se generan así las denominadas “**ondas canales**”.

Considérese ahora la descomposición de un pulso de emisión acústica en sus componentes armónicos. En un medio elástico homogéneo, las ondas P y S y las ondas de superficie R se propagan con velocidad de fase constante, independiente de la frecuencia de la componente armónica considerada. Entonces los pulsos viajan sin cambiar de forma, en estas condiciones. Pero las ondas canales, así como las ondas que se propagan en sólidos acotados de dimensiones comparables a la longitud de onda, presentan una marcada dependencia entre la velocidad de fase y la frecuencia.

Un pulso que viaja en estas condiciones cambia de forma: se produce el fenómeno denominado “**dispersión geométrica**”. A esto se añade la “**dispersión física**”, asociada a los fenómenos disipativos que se producen en puntos interiores del cuerpo, independientemente de interfases o fronteras. Ambas formas de dispersión deben ser tenidas en cuenta al describir la propagación de un pulso en un sólido. Por lo contrario, las ondas de Rayleigh y las ondas de Stoneley **no son dispersivas**.

Finalmente en un medio homogéneo, no acotado, pero **anisótropo**, se pueden propagar tres tipos de ondas en una dirección dada (Dieulesaint y Royer, 1987): una onda cuasi-longitudinal, una onda cuasi-transversal rápida y una onda cuasi-transversal lenta. Las polarizaciones de estas ondas son siempre ortogonales entre sí y sus velocidades son en general diferentes (Fig.8) La dirección en la que transportan energía mecánica en general no coincide con la dirección de propagación, a diferencia de lo que ocurre con las ondas en un sólido isótropo (Fig.9).



Figuras 8 y 9

El estudio de los transductores y ciertas otras situaciones que se encuentran en la práctica exigen el empleo de un modelo de sólido anisótropo para describir la propagación de los pulsos elásticos.

2. Los problemas directo e inverso para pulsos de emisión acústica

Desde el punto de vista de la mecánica de medios continuos, un pulso de emisión acústica en un sólido se puede describir mediante un campo elastodinámico definido en cada instante t y para cada punto del medio, de vector de posición \vec{r} .

El campo elastodinámico puede considerarse formado por el campo vectorial de desplazamientos de las partículas del sólido ($\vec{u}(t, \vec{r})$) junto con dos campos tensoriales asociados que describen el estado local de deformación (el tensor de deformaciones $\hat{\epsilon}(t, \vec{r})$ calculable directamente a partir de $\vec{u}(t, \vec{r})$) y el estado local de tensiones (el tensor de tensiones $\hat{\sigma}(t, \vec{r})$ calculable a partir de $\hat{\epsilon}(t, \vec{r})$, empleando la relación constitutiva entre tensión y deformación característica del sólido en cuestión).

A propósito del campo elastodinámico de un pulso de emisión acústica se plantean tres cuestiones básicas que presentan interés desde el punto de vista de los ensayos no destructivos:

- Su origen: la identificación de la naturaleza y la posición de los defectos radiantes que constituyen las fuentes del campo elastodinámico.
- Sus características: la relación entre la distribución temporal y espacial de desplazamientos, deformaciones y tensiones por un lado, y las características de las fuentes del campo, la geometría del sólido, sus propiedades físicas y las condiciones en la frontera a las que se encuentra sometido el cuerpo ensayado, por otro lado.

- c) Su transformación en una señal eléctrica: la relación entre el campo elastodinámico en la superficie de un transductor y la diferencia de potencial generada en ese transductor por acción del campo elastodinámico.

La segunda cuestión se puede formular como un problema directo: si se conoce la posición de la (o las) fuente (s) y su patrón de radiación, así como la geometría, propiedades mecánicas y condiciones de borde del cuerpo, calcular el campo elastodinámico generado. Desde el punto de vista experimental, el problema directo puede abordarse empleando una fuente de posición y patrón de radiación conocidos (simulador), determinando la respuesta mecánica del sólido a través de transductores situados en distintos puntos, más o menos alejados de la fuente del campo.

Esto último conduce naturalmente a la tercer cuestión: el transductor como funcional del campo elastodinámico. En efecto, como el transductor es generalmente de dimensiones apreciables respecto de las escalas espaciales en las que la amplitud del campo elastodinámico sufre variaciones significativas, resulta que dicho transductor efectúa una operación de promediado espacial sobre el campo, para originar la señal eléctrica que es efectivamente registrada como respuesta del cuerpo. Además, todo transductor es, en mayor o menor grado, un filtro en el dominio de las frecuencias. Si se conoce la funcional correspondiente al transductor y se conoce el campo elastodinámico generado por una distribución de fuentes dadas (simulador o defectos radiantes) el problema directo se puede considerar resuelto en forma experimentalmente verificable, puesto que se podría predecir la señal que sería captada por un transductor, situado en una posición dada, proveniente de una distribución conocida de fuentes del campo.

La primera cuestión sobre el campo elastodinámico se puede formular como un problema inverso del que se acaba de considerar : a partir de las señales eléctricas suministradas por transductores en determinados puntos de la superficie del sólido, reconstruir la posición y el patrón de radiación de las fuentes de campo.

Ahora bien, en las adyacencias de los defectos la hipótesis de linealidad del operador que conecta $\hat{\sigma}$ con $\hat{\varepsilon}$ en general no se cumple. Para poder emplear una teoría lineal es conveniente definir para cada defecto radiante un defecto equivalente inmerso en un medio lineal con las mismas propiedades que presenta el sólido considerado fuera de la zona de no linealidad asociada a cada defecto real.

El defecto real y su defecto equivalente deben generar la misma señal en la salida transductor, en cada posición en la que se sitúe respecto del defecto real considerado. El transductor se supone bastante alejado como para encontrarse en la zona de linealidad. Como consecuencia, el problema directo se reformulará en términos del cálculo del campo elastodinámico producido por una distribución de defectos radiantes equivalentes, inmersos en un sólido elástico ó anelástico lineal.

En forma análoga a como se caracteriza la radiación electromagnética de una antena en la zona lejana (mediante términos de dipolo, cuadrupolo, octapolo, etc.) se puede caracterizar la radiación mecánica de los defectos equivalentes mediante los términos de un desarrollo multipolar. Esto a su vez permite reformular el problema inverso en término de la identificación de la posición de los defectos equivalentes y de los momentos de los términos multipolares característicos de su campo de radiación mecánica.

Esta información puede relacionarse, en principio, con la posición, orientación y dimensiones de los defectos reales, que son el objeto último del ensayo.

Todo lo dicho anteriormente puede resumirse en el esquema causal de Hsu, Simmons y Ardy (Scott, 1991) en la Fig. 10.

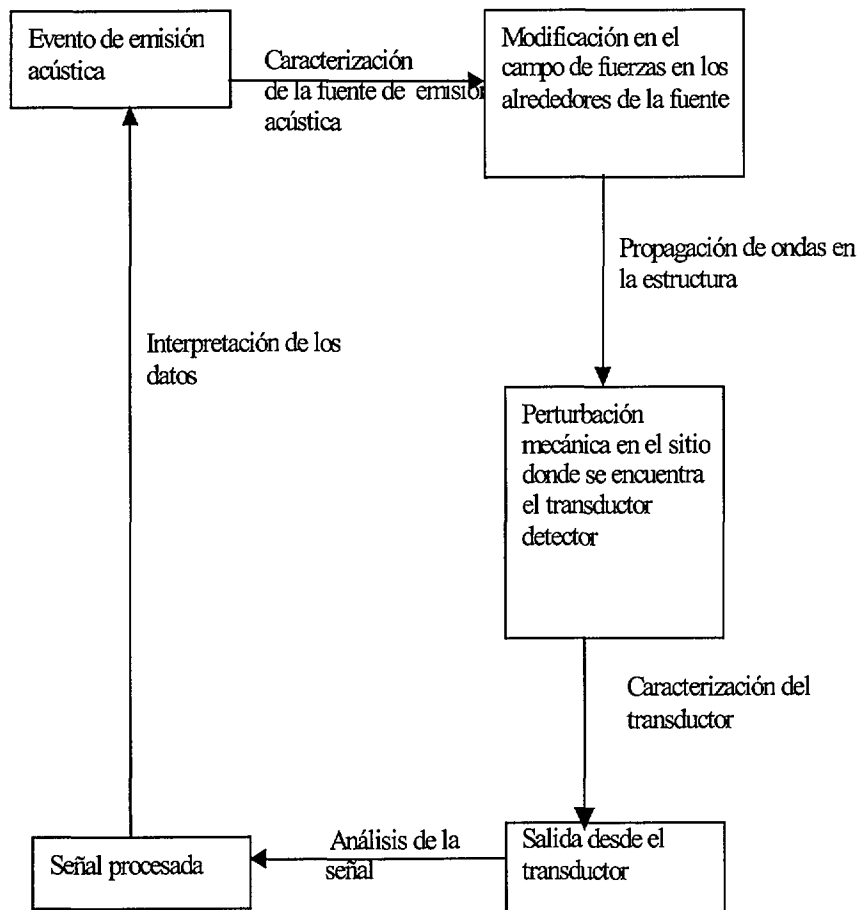


Figura 10 : Esquema causal de Hsu, Simmons y Ardy (Scott, 1991)

Comenzando por el evento de E.A. que produce una variación en el campo local de esfuerzos, dicha modificación se propaga como una perturbación mecánica sufriendo diversas alteraciones a medida que atraviesa la estructura (el cuerpo) y es detectada por el transductor, quien la convierte en una variación temporal de voltaje. Esta señal de voltaje, luego de procesada, debería permitir la identificación del evento fuente en el caso en que éste es

desconocido. Si dicho evento fuente es conocido al igual que las propiedades de propagación en la estructura y las características del transductor, se debería poder predecir la señal de voltaje.

Si las dimensiones de la región donde se produce el evento de E.A. son muy pequeñas comparadas con las dimensiones de la parte del cuerpo (estructura) que la rodea, el evento fuente de la perturbación puede asignarse a punto de vector de posición \vec{r}_0 y puede caracterizarse, para fijar ideas, mediante un tensor de orden dos (pero si se usa un desarrollo multipolar la descripción involucra tensores de diferente orden, según se verá) $\hat{S}(t, \vec{r}_0)$ que describe la variación en el estado local de esfuerzos ("Factor de la fuente"). El desplazamiento $\vec{u}(t, \vec{r})$ en un punto de vector de posición \vec{r} en el instante t puede hallarse entonces mediante la expresión:

$$\vec{u}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^t \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, t-t') \cdot \hat{S}(t', \vec{r}_0) dt' \quad (1)$$

donde $\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$ es un campo vectorial función de \vec{r} y de t ("Factor de la estructura"). La convolución se hace integrando el producto escalar de \vec{G} con \hat{S} .

Luego, si \mathfrak{S} representa la porción de la superficie de la estructura en la que se halla adherido el transductor, la señal de voltaje $V(t)$ y el campo de desplazamientos $\vec{u}(t, \vec{r})$ se relacionan a través de una funcional lineal:

$$V(t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{\mathfrak{S}} \vec{h}(t-t', \vec{r}) \cdot \vec{u}(t', \vec{r}) dS_r \quad (2)$$

donde la integral de superficie se extiende sobre toda la zona de contacto. El transductor viene representado por el campo vectorial $\vec{h}(t, \vec{r})$ ("Factor del transductor").

La señal de voltaje que finalmente es producida por un sensor se puede considerar entonces como la convolución de tres "factores": el de la fuente, el de la estructura y el del transductor.

Eliminado el campo de desplazamientos $\vec{u}(t, \vec{r})$ se obtiene directamente una relación entre $\hat{S}(t, \vec{r}_0)$ y $V(t)$:

$$V(t) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathfrak{S}} \vec{h}(t-t', \vec{r}) \cdot \left(\int_{-\infty}^t [\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, t'-t'') \cdot \hat{S}(t'', \vec{r}_0)] dt'' dS_r \right) \quad (3)$$

Pasando a componentes se tiene:

$$\hat{S}(t, \vec{r}_0) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij}(t, \vec{r}_0) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (4)$$

$$\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, t) = \sum_{k=1}^3 G_k(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \vec{e}_k \quad (5)$$

$$\vec{h}(t, \vec{r}) = \sum_{l=1}^3 h_l(t, \vec{r}) \vec{e}_l \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{t'} [\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, t' - t'') \hat{S}(t'', \vec{r}_0)] dt'' = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{t'} G_k(\vec{r}, \vec{r}_0, t' - t'') S_{kj}(t'', \vec{r}_0) dt'' \quad (7)$$

$$\int_{\mathfrak{S}} \vec{h}(t - t', \vec{r}) \left(\int_{-\infty}^{t'} \vec{G}(t' - t'', \vec{r}, \vec{r}_0) \hat{S}(t'', \vec{r}_0) dt'' \right) dS_r =$$

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\mathfrak{S}} h_j(t - t', \vec{r}) \left(\int_{-\infty}^{t'} \sum_{k=1}^3 G_k(t' - t'', \vec{r}, \vec{r}_0) S_{kj}(t'', \vec{r}) dt'' dS_r \right) \quad (8)$$

Entonces, finalmente resulta:

$$V(t) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^t dt' \int_{\mathfrak{S}} dS_r h_j(\vec{r}, t - t') \int_{-\infty}^{t'} dt'' G_k(\vec{r}, \vec{r}_0, t' - t'') S_{kj}(t'', \vec{r}_0) \quad (9)$$

Poniendo $H_{kj}(t, P, Q) = \int_{\mathfrak{S}} dS_r \int_{-\infty}^t dt' h_j(t - t', \vec{r}) G_k(\vec{r}, \vec{r}_0, t')$ donde P es el punto de vector de posición \vec{r}_p , en el que se produce el evento fuente, y Q representa un punto determinado de la estructura asociado al transductor (por ej: el punto medio de la superficie de contacto del transductor con la estructura) se obtiene:

$$V(t) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^t dt' H_{kj}(P, Q, t - t') S_{kj}(P, t') \quad (10)$$

Como consecuencia la conexión entre un evento, representado por su tensor \hat{S} asignado al punto P y la señal de voltaje $V(t)$, producida por un sensor situado en el punto Q, viene determinada por la función de respuesta impulsiva tensorial

$$\hat{H}(t, P, Q) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 H_{kj}(t, P, Q) \vec{e}_k \otimes \vec{e}_j \quad (11)$$

Mediante el empleo de la transformada de Fourier, es posible sustituir las convoluciones respecto del tiempo por productos en el dominio de las

frecuencias, pasando entonces a analizar el proceso de medición desde este punto de vista.

3. Ecuaciones de campo elastodinámicas

Para un sólido de densidad ρ sometido a perturbaciones mecánicas que originan pequeños campos de deformaciones la relación entre $\hat{\sigma}$ y \vec{u} puede formarse así:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \hat{\sigma} + \rho \vec{K} \quad (12)$$

donde ρ es la densidad de masa del sólido y \vec{K} es la densidad (por unidad de masa) de las fuerzas de volumen actuantes (Lin y Segel, 1976, caps. 13 y 14; Hudson, 1980, cap.1)

En el caso de un sólido isótropo es conveniente expresar el estado de esfuerzos y el estado de deformaciones como suma de la traza correspondiente con un tensor desviador:

$$\hat{\sigma} = p\hat{I} + \hat{\sigma}_D \quad (13)$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{3}D\hat{I} + \hat{\varepsilon}_D \quad (14)$$

Aquí, por definición la “presión” p y la dilatación D verifican:

$$p = \frac{1}{3}tr(\hat{\sigma}) \quad (15)$$

$$D = tr(\hat{\varepsilon}) \quad (16)$$

En ambos casos $tr ()$ indica la operación de sumar las componentes diagonales del tensor. Puesto que, para pequeñas deformaciones se define $\hat{\varepsilon}$ como la parte simétrica del tensor $\nabla \vec{u}(t, \vec{r})$, resulta que $D(t, \vec{r}) = \nabla \cdot \vec{u}(t, \vec{r})$ (es el campo de dilatación cúbica del sólido).

Si el sólido es, además, linealmente elástico y no disipativo, se verifican las ecuaciones constitutivas $p = KD$ (17) y $\hat{\sigma}_D = 2\mu\hat{\varepsilon}_D$ (18) donde K es el módulo de incompresibilidad volumétrica y μ es el módulo de cizalladura. Si el sólido es un sólido hereditario lineal, las ecuaciones (17) y (18) se generalizan a las siguientes expresiones integrales (Hudson, 1980, cap. 9)

$$P(t, \vec{r}) = K_0 D(t, \vec{r}) + \int_0^t \dot{R}_K(t - \tau) D(\tau, \vec{r}) d\tau \quad (19)$$

$$\hat{\sigma}_D(t, \vec{r}) = 2\mu_0 \hat{\varepsilon}_D(t, \vec{r}) + \int_0^t \dot{R}_\mu(t-\tau) \hat{\varepsilon}_D(t, \vec{r}) d\tau \quad (20)$$

donde $R_K(t)$ y $R_\mu(t)$ son funciones que describen la relajación del estado local de tensiones para un estado de deformaciones que se mantiene constante y $\dot{R}_K(t)$ y $\dot{R}_\mu(t)$ son sus derivados respecto del tiempo. En las ecuaciones (20) y (21) se supuso que los campos se anulan para valores de t negativos, de forma que el instante $t=0$ se puede considerar como el instante inicial del proceso.

Los módulos R_0 y μ_0 se denominan módulos de impacto (Flügge, 1975, cap. 2). Puesto que D y $\hat{\varepsilon}_D$ se expresan en términos de las componentes de $\nabla \vec{u}(t, \vec{r})$, sustituyendo las ecuaciones (20) y (21) en la ecuación (1) se obtiene una ecuación integro-diferencial para el campo vectorial de desplazamientos de un sólido isótropo y lineal, que permite describir la propagación de ondas incluso si el medio es anelástico.

En el caso particular de un sólido linealmente elástico, isótropo y homogéneo, se obtiene la siguiente ecuación para la descripción del campo elastodinámico (Nadeu, 1966, cap. 8 y Landau y Lifchitz, opcit, cap.3)

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = c_L^2 \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - c_T^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{u}) + \vec{K} \quad (20)$$

Aquí c_L y c_T son dos velocidades que verifican las ecuaciones

$$c_L = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (21) \quad \text{y} \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (22)$$

Los módulos K y μ se relacionan con los módulos E (Young) y ν (Poisson) a través de las ecuaciones: $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ y $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Sustituyendo en (21) y

(22) se obtienen, respectivamente, las expresiones $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$ y

$c_T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ generalmente utilizadas en la discusión de los ensayos no destructivos por ultrasonido. (Las ecuaciones de propagación para un medio hereditario se obtienen sustituyendo en la ecuación (20) los módulos K y μ por sus correspondientes operadores \hat{K} y $\hat{\mu}$, tal como se describe más adelante).

Considérese una región en la que se anulan las fuerzas de volumen y defínanse los campos de dilatación cúbica.

$$D(t, \vec{r}) = \nabla \cdot \vec{u}(t, \vec{r}) \quad (23)$$

y de rotación local del sólido

$$\vec{\Omega}(t, \vec{r}) = \nabla \wedge \vec{u}(t, \vec{r}) \quad (24)$$

De la definición de estos campos y de la ecuación 20 se desprende que D y $\vec{\Omega}$ verifican las ecuaciones de onda clásicas:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = c_L^2 \nabla^2 D \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial t^2} = c_T^2 \nabla^2 \vec{\Omega} \quad (26)$$

Entonces, el campo de dilatación se propaga con velocidad c_L mientras que el campo de rotación local lo hace con velocidad c_T .

De las restricciones sobre los módulos de elasticidad del sólido se desprende que $c_L > \sqrt{2}c_T$, de modo que el campo de dilatación se propaga sensiblemente más rápido que el campo de rotación local.

El conocimiento de los campos D y $\vec{\Omega}$ permite a su vez construir el campo de desplazamiento del sólido como suma de un campo irrotacional $\vec{u}_p(t, \vec{r})$ y un campo solenoidal $\vec{u}_s(t, \vec{r})$ empleando el teorema fundamental del análisis vectorial (ver, p.e., Borisenko y Tuparov, 1979, págs. 223-226)

El campo $\vec{u}_p(t, \vec{r})$ se propaga con velocidad c_L y corresponde a las denominadas ondas P (ondas primarias, de dilatación, con rotación local nula).

El campo $\vec{u}_s(t, \vec{r})$ se propaga con velocidad c_T y corresponde a las denominadas ondas S (ondas secundarias, de cizalladura o rotación local, con dilatación nula).

En medio no acotado y en ausencia de interfases estos campos se propagan en forma independiente el uno del otro. Para ver esto, descompongamos el campo de desplazamientos.

$$\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s \quad (27)$$

Puesto que $\nabla \wedge \vec{u}_p = \vec{0}$ y $\nabla \cdot \vec{u}_s = \vec{0}$ en todo instante y en todo punto del sólido, es posible introducir un potencial escalar φ y un potencial vector $\vec{\psi}$ tales que

$$\vec{u}_p = \nabla \varphi \quad (28) \quad \text{y} \quad \vec{u}_s = \nabla \wedge \vec{\psi} \quad (29)$$

Descomponiendo el campo $\vec{K}(t, \vec{r})$ mediante un potencial escalar F y un potencial vector \vec{G} , es posible escribir

$$\vec{K} = c_L^2 \nabla F + c_T^2 \nabla \wedge \vec{G} \quad (30)$$

De la ecuación 20 y de las ecuaciones 27, 28, 29, y 30 se desprende que los potenciales φ y $\vec{\psi}$ pueden construir de tal forma que verifican las ecuaciones de onda no homogénea (Achenbach, 1973, cap.):

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_L^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -F \quad (31), \quad \nabla^2 \vec{\psi} - \frac{1}{c_T^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = -\vec{G} \quad (32)$$

Las ecuaciones (31) y (32) son matemáticamente iguales a las ecuaciones de propagación de los potenciales del campo electromagnético (ver, p.e., Panofsky y Phillips, 1962, cap. 14). Al igual que en teoría electromagnética, el potencial vector se ha elegido de forma que resulte solenoidal: $\nabla \cdot \vec{\psi} = 0$.

Si el medio no es acotado, es posible estudiar por separado la propagación de los campos φ y $\vec{\psi}$, relacionándola con sus fuentes F y \vec{G} , respectivamente, así como con las condiciones iniciales impuestas a los potenciales y a su primera derivada parcial respecto del tiempo. Una vez hallados φ y $\vec{\psi}$, las ecuaciones de definición (28) y (29) permiten calcular las componentes \vec{u}_p y \vec{u}_s que determinan el campo de desplazamientos del sólido.

Pero en una interfase o en una frontera, las condiciones impuestas al campo de desplazamientos (continuidad en la interfase) y al campo de tensiones (continuidad de la tensión a través de la interfase, valor preestablecido de la tensión en puntos de una frontera), generalmente conducen al acoplamiento de los campos \vec{u}_p y \vec{u}_s (Landau y Lifchitz, op. cit.; Pílant, 1979, cap.8); Así, si $\vec{n}(\vec{r})$ es el versor normal que apunta hacia el exterior del cuerpo en un punto \vec{r}_F de su frontera con el vacío, la tensión $\vec{T}(t, \vec{r}_F) = \vec{n} \cdot \hat{\sigma}(t, \vec{r}_F)$ debe anularse para todo instante. Si el cuerpo es homogéneo, isótropo y linealmente elástico, esto equivale a imponer la condición:

$$\left(K - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{n} + 2\mu (\vec{n} \cdot \nabla \vec{u}) + \mu \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{u}) = \vec{0} \quad (33)$$

en todo instante y para cada punto de la frontera.

En general esta condición sólo puede satisfacerse cuando ambos campos, \vec{u}_p y \vec{u}_s son nulos. Si incide un campo \vec{u}_p o \vec{u}_s puro, generalmente se reflejará acompañado de un campo \vec{u}_s o \vec{u}_p , respectivamente (conversión de modos). El acoplamiento entre los componentes \vec{u}_p y \vec{u}_s conlleva un acoplamiento

entre los potenciales φ y $\bar{\psi}$ en las interfases o fronteras: las ecuaciones de onda (31) y (32) ya no se pueden resolver en forma independiente.

Finalmente, para el caso de un sólido elástico, lineal y no disipativo, de la ecuación (1) y de la ecuación constitutiva que relaciona $\hat{\sigma}$ con $\hat{\varepsilon}$, se obtiene la siguiente forma de la ecuación de continuidad de la energía:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} - \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot \vec{K} = 0 \quad (34)$$

donde $\vec{S} = -\hat{\sigma} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ es el vector de Poynting mecánico (la densidad de flujo de energía elástica) y $e = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma} : \hat{\varepsilon}$ es la densidad de energía (cinética y potencial asociada con la deformación). El doble producto escalar que aparece en la expresión de la densidad de energía potencial corresponde a la sumatoria del producto de las componentes con los mismos primer y segundo índice del estado de esfuerzos y del estado de deformación: $\hat{\sigma} : \hat{\varepsilon} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$. El término $\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot \vec{K}$ expresa el trabajo (por unidad de volumen) realizado sobre el sistema por las fuerzas de volumen actuantes en el sólido.

Bibliografía

Achenbach, J. (1973); "Wave Propagation in Elastic Solids"; North Holland; Amsterdam; Ho.

Borisenko, A. e I.Tuparov (1979); "Vector and Tensor Analysis"; Dover; N.Y; USA.

Dieulesaint. A. y G.Royer (1987); "Acoustic Waves in Solids"; Academic Press; N.Y; USA.

Flügge, S.; (1975); "Visoelasticity Theory"; Springer; Berlín; Alemania.

Hudson, J.; (1980); "The Excitation and Propagation of Elastic Waves"; Cambridge Univ.Press; Cambridge; U.K.

Landau, L.; Lifschitz, E.; (1985); "Theory of Elasticity"; Pergamon; N.Y.; USA.

Lin, C.; Segel A.; (1976); "Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences"; Mac Millan; N.Y; USA.

Nadeau. G; (1966); "Theory of Elasticity"; Holt; Rinehart and Winston; N.Y; USA.

Panofsky, W.; Phillips, M. (1962); "Classical Electricity and Magnetism"; Addison-Wesley; Mass; USA.

Pilant, W.; (1979); "Elastic Waves in the Earth"; Elsevier; Amsterdam; Ho.
Scott, A.; (1991); "Basic Acoustic Emission"; Gordon and Breach; N.Y.; USA.