

KAERI/TR-1860/2001

비탄성 고온구조 해석코드 개발 보고서

A Development Report
on the Inelastic Analysis Program
for the High Temperature Structures

KAERI
2001. 4.

한국원자력연구소

제 출 문

한국원자력연구소소장 귀하

본 보고서를 “액체금속로 기계설계기술개발” 과제의 기술보고서로 제출합니다.

2001년 4월 30일

과 제 명 : 액체금속로 기계설계기술개발

주 저 자 : 김 종 범

공동저자 : 이 형 연, 이 재 한

요 약 문

액체금속로의 고온운전환경으로 인해 원자로용기와 내부구조물과 같은 주요 구조물들은 발전소 수명 동안 크립과 크립피로 및 라체팅과 같은 고도의 비선형 거동 손상을 받기 쉽다. 본 연구에서는 등방성 경화와 이동성 경화를 동시에 모사하는 통합형 탄소성 구성식을 장착한 NONSTA-EP 코드와 소성과 크립을 동시에 모사하는 Chaboche 점소성구성식을 장착한 NONSTA-VP 코드를 개발한 바 있고 지속적으로 이를 보완해오고 있다. 2000년도 과제에서는 매 하중 사이클마다 소성변형이 누적되는 라체팅 현상을 좀 더 잘 모사할 수 있도록 Ohno-Wang 모델을 장착한 NONSTA-OW 코드를 개발하였고 본 보고서에서는 이를 중점적으로 전반적인 비탄성 고온구조해석코드에 대한 기술적 내용들을 설명하였다.

비탄성 구성식의 특징은 구성식이 복잡한 구조물의 거동을 모사할 수 있도록 많은 수의 재료상수를 갖고 있는데 이들 재료상수들을 적절히 구하는 것이 중요한 과제중의 하나이다. 본 연구에서는 최적기법을 적용하여 이들 재료상수들을 구하는 방법을 개발하고 있고 또한 고온 재료시험을 수행하여 독자적인 데이터를 구축하고 있다. 재료의 이동성 경화를 모사하는 기능을 강화하기 위해 9개의 이동성 경화 내부변수를 포함하는 Ohno-Wang 구성식을 장착한 프로그램을 적용한 예제를 통하여 개발한 프로그램의 성능을 일차적으로 확인하였다. 또한 해의 정확성을 개선하기 위해 새로운 시간증분 조절법을 적용하였는데 이를 Chaboche 점소성모델에 적용하고 환봉시편에 대한 반복 경화해석, 크립해석, 응력이완해석을 수행하여 개선된 프로그램의 적용성을 확인하였다.

Summary

LMR high temperature structures such as reactor vessel and reactor internal structures are subject to high temperature operating loads thus they can undergo damage due to creep, creep-fatigue, and ratcheting behavior. In this project, NONSTA-EP program implementing combined isotropic and kinematic hardening behavior and NONSTA-VP program implementing Chaboche model, which is so called viscoplasticity model, have been developed and have been continuously improved. In the year of 2000, NONSTA-OW program implementing Ohno-Wang model which can simulate progressive plasticity (that is ratcheting) more precisely compared to other models.

One of the characteristics of inelastic constitutive equations is to have various numbers of material parameters to simulate complex material behaviors realistically and it is very important to obtain these material parameters. In this project, the improved method to obtain these material parameters has been studied with the optimal technique and by conducting material characteristic tests under high temperature conditions. The feasibility of the developed program with Ohno-Wang model, which contains 9 isotropic constitutive equations, has been studied through the example problem.

목 차

I. 서 론	-----	1
II. 본론	-----	3
1. 비탄성 구성식의 일반화	-----	3
1.1 비탄성 구성식의 종류	-----	3
1.1.1 일반적인 탄소성 구성식	-----	3
1.1.2 통합형 점소성 구성식	-----	4
1.1.3 분리형 점소성 구성식	-----	4
1.2 상태변수의 발전식	-----	4
1.3 비탄성구성식의 일반적 형태	-----	4
2. 구성식의 선형화	-----	6
3. 접선 강성 행렬의 유도	-----	8
4. 프로그램의 작성	-----	10
4.1 Ohno-Wang 탄소성 구성식	-----	10
4.2 Ohno-Wang 탄소성 모델의 적분	-----	12
4.3 Ohno-Wang 모델의 프로그래밍	-----	13
5. 비탄성 구성식의 재료 상수의 결정	-----	23
5.1 최적화를 통한 재료상수의 결정	-----	23
5.2 초기값 결정	-----	24
5.3 이동성 경화 관련 상수	-----	25
5.4 점소성 변형률 관련 상수	-----	25
5.5 등방성 경화 관련 상수	-----	26
6. 프로그램 예제	-----	27
6.1 Ohno-WANG 모델을 이용한 유한 요소 해석	-----	27
6.2 시간 증분 조절법의 개선한 Chaboche 모델 적용 예제	-----	29
6.2.1 단축경화해석	-----	29
6.2.2 주응력방향이 변하는 하중의 해석	-----	32
6.2.3 노치가 있는 환봉 시편의 응력 해석	-----	34
III. 결론	-----	38
참고문헌	-----	39

표 목 차

- 표 1. 316 스테인레스강의 재료 상수 (600 °C)
- 표 2. 다축 경화 해석의 계산 결과 비교

그 립 목 차

- 그림 1. OHNO-WANG 모델을 적용한 인장 해석
- 그림 2. OHNO-WANG 모델의 내부 상태 변수의 거동
- 그림 3. OHNO-WANG 모델의 이동성 경화 변수의 거동
- 그림 4. 이동성 경화 변수의 성분별 거동
- 그림 5. 프로그램 구성도 개략
- 그림 6. 단축인장해석의 응력-변형률 선도
- 그림 7. 시간증분조절 기법을 적용한 단축인장해석 결과
- 그림 8. Non-proportional 다축하중의 하중경로
- 그림 9. 비례하지 않는 하중에 의한 다축 변형시 응력 이력
- 그림 10. 시간증분기법을 적용한 경우 축응력 거동
- 그림 11. 비례하지 않는 다축변형의 에러 이력
- 그림 12. 유한요소모델 및 하중 선도
- 그림 13. 인장시 변형률 이력
- 그림 14. 인장시 응력-변형률 선도
- 그림 15. 응력완화 시험에서 응력이력
- 그림 16. 크립시험에서 변형률 이력

1. 서 론

액체금속로의 압력 용기나 배관등과 같은 고온 구조물들과 화력 발전소의 터빈 로터나 보일러, 항공기의 가스터빈 등의 구조물들은 장시간 고온 운전 환경을 받아 크립 변형과 소성 변형과 같은 비탄성 변형이 발생할 수 있고 이들의 상호작용으로 인하여 구조물의 수명이 급격히 감소할 수 있게 된다. 이러한 고온 구조물의 안정성 평가를 수행하기 위해서는 재료의 거동을 정확히 예측할 수 있는 비탄성 구성식이 필수적으로 요구된다. Bodner[1], Miller[2], Chaboche[3]등은 통합형 점소성 구성식을 제안하였으며, Inoue et al[4] 은 다양한 구성식들의 비교 평가를 수행하였다.

개발된 구성식을 수치적 방법을 이용하여 구조해석에 적용하기 위한 연구 역시 활발하게 진행되고 있는데 Ortiz[5]는 탄성예측-소성보정법(elastic prediction-plastic correction method)을 이용한 해석코드를 개발하였으며 Hornberger[6], Chaboche[7]는 GMR (general midpoint rule) 시간 적분법을 이용하여 구성식의 수치적 적분에 관한 연구를 수행한바 있다.

고온구조물의 설계 해석에 구조물의 고온 비탄성 거동을 분석할 필요가 있는 경우에는 상용 유한해석 코드를 이용하여 비탄성 해석을 수행하게 되는데 이러한 코드들은 이미 개발되어있거나 새로 개발된 비탄성 구성식의 해석 기능을 충분히 보유하지 못하고 있어서 해석의 정밀도를 확보하는데 부족한 면이 있다. 이러한 면을 보강하기 위하여 ABAQUS, MARC, ADINA와 같은 범용 유한요소해석 코드에서는 사용자가 재료의 변형 거동을 정의할 수 있는 모듈을 제공하여 비탄성 해석 능력을 보완하고 있다.

본 연구에서는 다양한 형태를 갖는 구성식의 적분법을 일반화시켜 ABAQUS의 UMAT 루틴을 이용하여 유한요소 해석기법과 결합시키는 프로그램을 개발하여 왔다. 통합형 탄소성 해석코드인 NONSTA-EP[8]코드와 샤보시 점소성 구성식을 장착한 NONSTA-VP[9]코드를 초기개발하여 등록한 바 있다. 이 프로그램들은 비탄성 변형률의 정의와 사용된 상태변수에 따라 다양한 형태를 갖는 탄소성 구성식의 적분을 수행하기 위하여 개발되었으며, 프로그램의 개선을 위해 GMR시간 적분법을 이용하여 비탄성 구성식을 선형화시킨 후 선추적 기법을 결합시킨 Broydn방법을 이용하여 비탄성 구성식의 해를 구하도록 변경하였다. 구조물의 강성행렬을 구성하기 위해 필요한 접선 행렬은 계산 과정과 일관되게 유도하였으며 계산의 효율성과 정확성을 위하여 다양한 상태변수에 적용가능한 시간증분조절법을 개발하였다.

본 보고서에서는 기존에 개발된 NONSTA-EP, NONSTA-VP 코드를 포함한 비탄성 고온 구조해석코드 개발의 전반적인 내용들을 기술하고, 특히 최근 Ohno-Wang 구성식을 장착하여 개발한 NONSTA-OW 코드를 중심으로 구성식과 이를 프로그래밍하는 과정에 대해 설명하고 비탄성구성식의 재료상수를 구하는 방법과 개발한 프로그램의 예제를 수록하였다.

II. 본론

1. 비탄성 구성식의 일반화

1.1 비탄성 구성식의 종류

비탄성 구성식은 시간 의존성의 유무에 따라 점소성 구성식과 탄소성 구성식으로 구분할 수 있다. 점소성 구성식은 다시 소성 변형률과 크리프 변형률을 분리하여 고려하는 분리형 모델과 크리프 변형과 소성 변형을 동일한 변형기구에서 발생하는 현상으로 간주하는 통합형 모델로 구분할 수 있다.

비탄성 구성식의 기본적인 가정은 변형률을 성분별로 분리할 수 있다는 것이다. 즉 전체 변형률을 식 (1)과 같이 탄성 변형률, 열변형률, 비탄성 변형률로 분리할 수 있다[6].

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{th} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{in} \quad (1)$$

여기서 기호 위의 ‘·’은 시간에 대한 미분을 의미한다. 탄성 변형률과 열 변형률은 일반적으로 식 (2)~(3)과 같은 선형식으로 정의된다.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \frac{1+\nu}{E} \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}[\dot{\boldsymbol{\sigma}}] \mathbf{I} \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{th} = \gamma \dot{T} \mathbf{I} \quad (3)$$

여기서 E 와 ν 는 각각 영계수와 포아송비이며, γ 는 열팽창계수를 의미한다. 식 (1)~(3)을 정리하면 응력 변화율에 관한 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = & \mu \text{tr}[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{in}] \mathbf{I} + \lambda (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{in}) \\ & - \gamma (\mu + 3\lambda) \dot{T} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 λ 와 μ 는 Lamé 의 상수이며 비탄성 변형률의 정의에 따라서 탄소성, 분리형 점소성, 통합형 점소성 모델로 구분된다.

1.1.1 일반적인 탄소성 구성식

크리프 변형이나 속도 의존성이 작은 경우에는 탄소성 구성식을 사용하여 재료의 거동을 기술한다. 탄소성 구성식은 탄성영역과 소성영역을 구분하는 항복함수가 정의되며 경화변수의 종류에 따라 등방성 경화 모델과 이동성 경화 모델로 구분된다.

소성 변형률은 식 (5)과 같은 항복함수에 의하여 간접적으로 정의된다.

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}, T) = 0 \quad (5)$$

여기서 $\boldsymbol{\xi}$ 는 재료 내부의 비가역 반응을 모사하기 위해 도입한 내부 상태변수를 의미하며 대표적인 예로 등가 소성변형률($\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^p$)과 변형률 경화 응력이 있다. 여기서 주의할 점은 식

(4)에서 요구하는 소성 변형률의 변화율($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$)이 간접적으로 정의되어 있으므로 수치해석 과정에서 이 값을 변수로 하여 계산해야 한다는 것이다.

1.1.2 통합형 점소성 구성식

통합형 점소성 구성식은 크립 변형과 소성 변형을 동일한 변형기구에서 발생하는 현상으로 간주하고 비탄성 변형률의 변화율은 상태변수의 함수로 정의한다. 4 장에서 사용되는 Chaboche 점소성 구성식은 대표적인 통합형 점소성 구성식이다.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{in} = f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}, T) \quad (6)$$

식 (4)에 식 (6)를 대입시키면 응력의 변화율을 상태변수의 함수로 유도할 수 있다.

1.1.3 분리형 점소성 구성식

분리형 점소성 구성식은 비탄성 변형을 소성 변형과 점성 변형으로 분리하여 독립적으로 계산하는 계산 방법으로 탄소성 구성식과 통합형 점소성 구성식의 중간 형태라고 할 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{in} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \quad (7)$$

소성 변형률은 식 (5)의 항복 함수와 일치 조건에 의하여 정의되며 크립 변형률 속도는 식 (6)와 같이 상태변수의 함수로 주어진다.

1.2 상태변수의 발전식

앞 절에서 언급한 비탄성 변화율과 더불어 구성식을 구성하는 요소는 상태변수의 정의이다. 상태변수는 하중 이력이나 온도 변화에 의한 재료 내부의 비가역적 변화를 정량적으로 기술하기 위하여 도입되었다. 대부분의 경우 상태변수는 식 (8)과 같은 형태로 정의가 되지만 탄소성 구성식에서 사용되는 상태변수인 등가 비탄성 변형률은 간접적으로 정의된다.

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = H(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}, T) \quad (8)$$

따라서 식 (8)과 같이 미분방정식 형태로 정의되지 않는 상태변수를 ζ 를 이용하여 나타내기로 한다.

1.3 비탄성 구성식의 일반적 형태

앞에서 서술한 다양한 구성식을 일반적인 형태로 정리하면 응력의 발전식, 상태변수의 발전식과 이 변수들에 부가되는 제한 조건으로 정리할 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = G(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}, \lambda, T, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{T}) \quad (9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = H(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}, \lambda, T) \quad (10)$$

$$F(\sigma, \xi, \lambda, T) = 0 \quad (11)$$

식 (9) ~ (11)는 비탄성 구성식의 형태를 모두 포함할 수 있는 형태이며 다음 장에서 비탄성 구성식 적분법의 일반적인 해법을 유도하는데 사용된다. 여기서 주의할 점을 탄소성 구성식의 경우 소성 변형량은 항복 조건에 의하여 간접적으로 정의되지만 본 연구에서는 유효 소성 변형량을 새로운 상태변수 λ 을 도입하여 나타내었다. 점소성 구성식의 경우에는 상태변수 λ 를 사용하지 않는다.

2. 구성식의 선형화

비탄성 구성식은 여러 변수들이 복잡하게 얽혀있는 다원 일차 미분방정식의 형태를 갖는다. 이것을 수학적으로 간략히 표현하면 식 (12)와 식 (13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{y} = f(y, t) \quad (12)$$

$$g(t, y) = 0 \quad (13)$$

평형 방정식의 계산에 내연적 방법을 사용하는 ABAQUS[10]와 같은 유한요소 해석 코드의 경우 접선 강성 행렬이 필요하게 되는데 이 행렬은 적분 계산과정과 일관되게 구해야 한다. 이러한 이유로 비탄성 구성식의 적분은 오일러 법과 같은 선형화 방법을 사용한다.

일반적으로 구성식의 적분에 사용되는 선형화 방법으로는 일반 Trapezoidal 법(General Trapezoidal Rule: 이하 GTR)과 일반 중간점법(General Midpoint Rule: 이하 GMR)이 있다[11]. 식 (12) 형태의 미분방정식에 GTR 을 적용한 경우 변수의 증분은 식 (14)와 같이 구할 수 있다.

$$\Delta y = [(1 - \theta)f(y_t, t) + \theta f(y_{t+\Delta t}, t + \Delta t)]\Delta t \quad (14)$$

마찬가지로 식 (12)을 GMR 을 이용하여 선형화 하면 다음과 같다.

$$\Delta y = f(y_\theta, t + \theta\Delta t)\Delta t \quad (15)$$

여기서 θ 는 0 에서 1 사이의 임의의 수이며 $y_\theta = y_t + \theta\Delta y$ 이다. GTR 은 초기 상태의 변화율과 나중 상태의 변화율을 이용하여 변수의 증분을 계산하는 방법이고 GMR 은 중간점에서의 변화율을 이용하여 변수의 증분을 계산하는 방법이다. 이 두 방법은 θ 가 0 인 경우 외연적 오일러법, θ 가 1 인 경우 내연적 오일러법이 되어 서로 일치한다. 두 방법 모두 식 (12)의 형태의 미분방정식의 적분에 사용할 수 있지만 GTR 은 식 (13)의 제한조건을 부가할 변수가 명확하게 규정되지 않게 된다. 하지만 GMR 은 모든 식이 일관되게 중간점에서의 변수 값에 의존하므로 이러한 모호성이 발생하지 않는다.

$$g(t + \theta\Delta t, y_\theta) = 0 \quad (16)$$

GMR 은 $0.5 \leq \theta \leq 1$ 인 경우 무조건 안정하며 탄소성 구성식은 물론 통합형 점소성 구성식까지 적용할 수 있다. GMR 을 이용하여 식 (9)~(11) 을 선형화 시키면 다음과 같다.

$$\Delta \sigma = \Delta t G(\sigma_\theta, \xi_\theta, \varsigma_\theta, \epsilon_\theta, T_\theta) \quad (17)$$

$$\Delta \xi = \Delta t H(\sigma_\theta, \xi_\theta, \varsigma_\theta, T_\theta) \quad (18)$$

여기서 $\sigma_\theta = \sigma_t + \theta\Delta\sigma$ 이고 ξ_θ 도 같은 방법으로 정의된다.

$$\sigma_\theta = \sigma_t + \theta\Delta t G(\sigma_\theta, \xi_\theta, \varsigma_\theta, \epsilon_\theta, T_\theta) \quad (19)$$

$$\xi_\theta = \xi_t + \theta\Delta t H(\sigma_\theta, \xi_\theta, \varsigma_\theta, T_\theta) \quad (20)$$

이것을 다시 변형하면

$$\sigma_\theta - \sigma_t - \theta\Delta t G(\sigma_\theta, \xi_\theta, \varsigma_\theta, \epsilon_\theta, T_\theta) = 0 \quad (21)$$

$$\xi_\theta - \xi_t - \theta\Delta t H(\sigma_\theta, \xi_\theta, \varsigma_\theta, T_\theta) = 0 \quad (22)$$

따라서 식(22)~(23)은 식(19)의 항복 조건과 마찬가지로 0 을 만족시켜야 한다.

$$F(\sigma_{\theta}, \xi_{\theta}, \varsigma_{\theta}, T_{\theta}) = 0 \quad (23)$$

중간점의 변형률과 온도는 주어진 변형률 증분($\Delta \epsilon$)과 온도 증분(ΔT)에 의하여 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_{\theta} = \epsilon_t + \theta \Delta \epsilon \quad (24)$$

$$T_{\theta} = T_t + \theta \Delta T \quad (25)$$

결과적으로 선형화된 식 (21)~(22), 그리고 중간점에서 항복 함수 (23)은 모두 0 을 만족시켜야 하는 목적함수가 되고 이 때 미지수는 σ_{θ} , ξ_{θ} , ς_{θ} 이 가 된다.

비선형 연립방정식의 해법은 다양하게 제시되어 있으며 가장 흔하게 사용되는 것이 Newton-Raphson 방법이다. 이 방법은 매우 빠른 수렴성을 나타내는 우수한 방법이지만 반드시 자코비 행렬의 역행렬을 계산해야 한다는 단점을 지니고 있다. 특히 불연속 함수를 많이 사용하는 비탄성 구성식의 경우 해석적인 자코비 행렬을 구하기 어렵고 또한 그 역행렬 역시 구하기가 쉽지 않은 경우가 많다. 따라서 본 연구의 목적상 임의의 비탄성 구성식에 적용할 수 있도록 하기 위하여 유한차분 자코비 행렬을 이용한 Quasi-Newton 방법(이하 Broyden 방법)을 사용하여 비선형 방정식의 해를 구하였으며 초기값이 해와 차이가 클 경우에 해의 발산을 막기 위하여 선 추적 기법(Line search)을 결합시켜 초기값에 무관하게 해에 접근하는 방법을 사용하였다. 이 방법에 대한 자세한 설명은 참고문헌[11]에 잘 정리되어 있다.

3. 접선 강성 행렬의 유도

접선 강성 행렬은 뉴턴 방법을 사용하여 평형 방정식의 해를 구할 때 2 차 수렴도를 유지하기 위하여 필요한 성분이며 적분 과정과 일치하는 방법으로 결정되어야 한다. 접선 강성 행렬을 유도하기 위하여 먼저 식 (17) ~ (19)을 각 변수에 대하여 편미분을 취하면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$d\sigma_{t+\Delta t} - \Delta t \left\{ \frac{\partial G_\theta}{\partial \sigma_{t+\Delta t}} d\sigma_{t+\Delta t} + \frac{\partial G_\theta}{\partial \xi_{t+\Delta t}} d\xi_{t+\Delta t} + \frac{\partial G_\theta}{\partial \zeta_{t+\Delta t}} d\zeta_{t+\Delta t} + \frac{\partial G_\theta}{\partial \epsilon_{t+\Delta t}} d\epsilon_{t+\Delta t} + \frac{\partial G_\theta}{\partial T_{t+\Delta t}} dT_{t+\Delta t} \right\} = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$d\xi_{t+\Delta t} - \Delta t \left\{ \frac{\partial H_\theta}{\partial \sigma_{t+\Delta t}} d\sigma_{t+\Delta t} + \frac{\partial H_\theta}{\partial \xi_{t+\Delta t}} d\xi_{t+\Delta t} + \frac{\partial H_\theta}{\partial \zeta_{t+\Delta t}} d\zeta_{t+\Delta t} + \frac{\partial H_\theta}{\partial T_{t+\Delta t}} dT_{t+\Delta t} \right\} = \mathbf{0} \quad (27)$$

$$\frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_{t+\Delta t}} d\sigma_{t+\Delta t} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \xi_{t+\Delta t}} d\xi_{t+\Delta t} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \zeta_{t+\Delta t}} d\zeta_{t+\Delta t} + \frac{\partial F_\theta}{\partial T_{t+\Delta t}} dT_{t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (28)$$

함수 \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{F} 는 모두 중간점 변수를 인자로 갖는데 이를 최종점 변수로 미분하기 위해서 식(29)의 관계를 이용하였다.

$$\frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \sigma_{t+\Delta t}} = \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \sigma_\theta} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \sigma_{t+\Delta t}} = \theta \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \sigma_\theta} \quad (29)$$

식 (26)~(28)를 행렬식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} - \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \sigma_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \xi_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \zeta_\theta} \\ -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \sigma_\theta} & \mathbf{I} - \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \xi_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \zeta_\theta} \\ -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \sigma_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \xi_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \zeta_\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{t+\Delta t}}{\partial \sigma_\theta} \\ \frac{\partial \xi_{t+\Delta t}}{\partial \xi_\theta} \\ \frac{\partial \zeta_{t+\Delta t}}{\partial \zeta_\theta} \end{pmatrix} = \theta \Delta t \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \epsilon_\theta} & \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial T_\theta} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial T_\theta} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial T_\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \epsilon_{t+\Delta t}}{\partial \epsilon_\theta} \\ \frac{\partial T_{t+\Delta t}}{\partial T_\theta} \end{pmatrix}$$

좌변 첫 행렬의 역행렬을 계산하여 양변에 곱해주면 다음과 같이 응력과 상태변수를 온도와 변형률의 선형화식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{t+\Delta t}}{\partial \sigma_\theta} \\ \frac{\partial \xi_{t+\Delta t}}{\partial \xi_\theta} \\ \frac{\partial \zeta_{t+\Delta t}}{\partial \zeta_\theta} \end{pmatrix} = \theta \Delta t \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \sigma_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \xi_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \zeta_\theta} \\ -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \sigma_\theta} & \mathbf{I} - \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \xi_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \zeta_\theta} \\ -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \sigma_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \xi_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \zeta_\theta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \epsilon_\theta} & \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial T_\theta} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial T_\theta} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial T_\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \epsilon_{t+\Delta t}}{\partial \epsilon_\theta} \\ \frac{\partial T_{t+\Delta t}}{\partial T_\theta} \end{pmatrix} \quad (30)$$

식 (30)의 행렬 연산을 통하여 식(31)과 같은 행렬식을 유도할 수 있으며 계산된 행렬에서 응력 증분의 변형률 증분의 선형 관계($\frac{\partial \sigma_{t+\Delta t}}{\partial \epsilon_{t+\Delta t}}$)를 나타내는 부분이 접선강성행렬이다. 또한 응력 증분과 온도 증분의 선형관계($\frac{\partial \sigma_{t+\Delta t}}{\partial T_{t+\Delta t}}$)는 열전달 해석과 응력해석이 결합된 경우에 사용되는 성분이다

$$\begin{matrix} \text{Rate} \\ \text{Rate} \\ \text{Rate} \\ \text{Rate} \end{matrix} \left. \begin{matrix} \sigma_{t+\Delta t} \\ \xi_{t+\Delta t} \\ \epsilon_{t+\Delta t} \\ \zeta_{t+\Delta t} \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{t+\Delta t}}{\partial \epsilon_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \sigma_{t+\Delta t}}{\partial T_{t+\Delta t}} \\ \frac{\partial \xi_{t+\Delta t}}{\partial \epsilon_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \xi_{t+\Delta t}}{\partial T_{t+\Delta t}} \\ \frac{\partial \epsilon_{t+\Delta t}}{\partial \epsilon_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \epsilon_{t+\Delta t}}{\partial T_{t+\Delta t}} \\ \frac{\partial \zeta_{t+\Delta t}}{\partial \epsilon_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \zeta_{t+\Delta t}}{\partial T_{t+\Delta t}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Rate} \\ \text{Rate} \\ \text{Rate} \\ \text{Rate} \end{matrix} \left. \begin{matrix} \epsilon_{t+\Delta t} \\ T_{t+\Delta t} \\ \epsilon_{t+\Delta t} \\ T_{t+\Delta t} \end{matrix} \right\} \quad (31)$$

4. 프로그램의 작성

본 절에서는 프로그램의 작성에 대하여 기술하였는데 기존의 NONSTA-EP 의 기능을 보강하고 범용성을 확장하기 위해 다음 사항들을 고려하여 최근 개발한 NONSTA-OW 코드를 기준으로 설명하였다.

기존에 개발하였던 NONSTA-EP 코드는 Kinematic hardening 을 의미하는 Back stress 의 수를 3 개로 제한하였으나 개선 작업으로 Back stress 의 수에 제한을 두지 않았다. 기존의 NONSTA-EP 는 상태변수의 발전식이 속도형태로 정리된 구성식에 대하여 작성하였으나 함수형태 정의되는 상태변수의 발전식도 적용 가능하도록 개선하였다. 개선 사항 중에 주목할 점은 해를 구하는 과정인데, 기존에 적용한 Newton 방법은 해의 수렴도는 매우 우수하나 자코비 행렬의 역행렬을 계산해야 한다는 문제가 있었다. 특히 비선형성이 강한 구성식의 경우 자코비 행렬을 정의하는 것은 물론 그 역행렬을 계산하는 것은 많은 계산량과 수치적 문제를 일으키므로 유한차분 자코비 행렬을 이용한 Quasi-Newton 방법(Broyden)방법을 적용하여 이를 개선하였다.

4.1 Ohno-Wang 탄소성 구성식

이 모델의 구성식은 다음과 같다. 탄성 영역과 소성 영역을 구별짓는 항복함수는 다음과 같이 정의된다.

$$F = \frac{3}{2}(s - \alpha):(s - \alpha) - \rho^2 \quad (32)$$

항복 함수가 0 보다 큰 경우에는 소성 변형이 발생되며 소성변형률 속도는 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \lambda \frac{(s - \alpha)}{\sqrt{(s - \alpha):(s - \alpha)}} \quad (33)$$

여기서 유효 소성 변형률 속도를 나타내는 λ 는 앞절에서 언급하였듯이 다른 상태변수와 같이 미지수로 취급하게 된다.

Ohno-Wang 모델에는 총 9 개의 이동성 경화 상태 변수가 있으며 그 각각의 발전식은 다음과 같다.

$$\dot{a}_i = \zeta_i \left\{ \begin{matrix} \textcircled{\mathbb{R}} \\ \textcircled{\mathbb{C}} \\ \textcircled{\mathbb{B}} \\ \textcircled{\mathbb{M}} \end{matrix} r_i \dot{\epsilon}^p - H(f_i) \left\langle \frac{a_i}{\bar{a}_i} : \dot{\epsilon}^p \right\rangle a_i \right\} \quad (34)$$

여기서 $f_i = (\bar{a}_i)^2 - (r_i)^2$, $\bar{a}_i = \left\{ \begin{matrix} \textcircled{\mathbb{B}} \\ \textcircled{\mathbb{C}} \\ \textcircled{\mathbb{M}} \end{matrix} a_i : a_i \right\}$ 이다. H 는 heaviside 함수를, $\textcircled{\mathbb{R}}$ 은 Macauley

bracket 을 의미한다. 즉 $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ 이다.

역응력 α 는 각각의 이동성 경화 상태 변수들의 합으로 정의된다.

$$\alpha = \kappa(\xi) \sum_{i=1}^M a_i \quad (35)$$

항복 영역의 크기를 나타내는 ρ 는 다음과 같이 등방성 경화 함수 κ 함수에 의해 정의된다.

$$\rho = \kappa(\xi) \rho_0 \quad (36)$$

여기서 ρ_0 는 초기 항복 응력을 의미한다.

등방성 경화 함수 κ 와 이 함수의 인자인 최대 소성 변형률 ξ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\kappa(\xi) = (1 + a\xi)^b \quad (37)$$

$$\xi = \max_{t \geq 0} \left[\sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right] \quad (38)$$

따라서 Ohno-Wang Model 에서 사용되는 상태변수를 정리하면 다음과 같다.

기호	물리적 의미	Tensor/Scalar
$\dot{\lambda}$	유효 소성 변형률 속도	Scalar
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9$	이동성 경화 상태 변수	Tensor
ξ	최대 소성 변형률	Scalar

Ohno-Wang 모델은 온도가 주기적으로 변하는 조건에 대하여 적용할 수 있도록 확장되었으며 Influence function 을 이용하여 여러 온도에서의 상태변수의 변화를 규정하였다.

$$\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}^p(t), T(t)] = \phi(T) \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}^p(t), T(t)] \quad (39)$$

$$\alpha[\boldsymbol{\varepsilon}^p(t), T(t)] = \phi(T) \alpha[\boldsymbol{\varepsilon}^p(t), T(t)] \quad (40)$$

$$\rho[\boldsymbol{\varepsilon}^p(t), T(t)] = \phi(T) \rho[\boldsymbol{\varepsilon}^p(t), T(t)] \quad (41)$$

식(39)~(41)의 정의에 의하여 등은 Ohno-Wang 모델에서 바뀌는 부분은 다음과 같다.

$$\alpha = \phi(T) \kappa(\xi) \sum_{i=1}^M a_i \quad (42)$$

$$\rho = \phi(T) \kappa(\xi) \rho_0 \quad (43)$$

그리고 Influence function 은 다음과 같이 정의하였다.

$$\phi(T) = \exp \left(c \left(\frac{T - T_0}{T_0} \right)^m \right) \quad (44)$$

Ohno 와 Takahashi 는 이 모델이 온도가 주기적으로 변하는 조건에 적용하기 위해 기존의 모델을 개량하였으며 일반적인 변온조건에 대해서는 온도이력에 대한 고려가 필요하다고 하

였다.

4.2 Onho-Wang 탄소성 모델의 적분

주어진 변형률 증분과 온도 증분에 대하여 응력 및 상태 변수의 최종값을 정의하는 과정은 다음과 같다. 먼저 식(4)의 탄성변형률-응력 관계를 편차성분과 평균성분으로 나누면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma'_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) \quad (45)$$

$$\sigma_{mean} = \frac{E}{1-2\nu} (\varepsilon_V - \alpha(T - T_0)) \quad (46)$$

여기서 $\sigma_{mean} = \frac{1}{3} tr(\sigma'_{ij})$, $\varepsilon_V = \frac{1}{3} tr(\varepsilon'_{ij})$ 이다.

식(33)에서 알 수 있듯이 평균응력의 증가는 소성 변형량과는 상관이 없음을 알 수 있기 때문에 시작점의 응력을 평균 응력과 편차 응력으로 나누고 각각의 증분을 따로 계산하였다. 먼저 평균 응력의 증분은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\Delta\sigma_{mean} = \frac{E}{1-2\nu} (\Delta\varepsilon_V - \alpha\Delta T) \quad (47)$$

실제 편차 응력의 증분은 식(35)와 같지만 소성 변형량을 알 수 없기 때문에 식(36)과 같이 소성 변형률이 0 이라고 가정하여 편차응력의 증분을 계산한다.

$$\Delta\sigma'_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (\Delta\varepsilon'_{ij} - \Delta\varepsilon_{ij}^p) \quad (48)$$

$$\Delta\sigma'_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (\Delta\varepsilon'_{ij}), \quad \Delta\varepsilon_{ij}^p = 0 \quad (49)$$

나머지 상태변수는 모두 초기값과 동일하다고 가정하여 탄성 예측한 응력을 이용하여 중간점의 항복함수를 계산한다.

$$F = \frac{3}{2} (\mathbf{s}_E - \boldsymbol{\alpha}_t) : (\mathbf{s}_E - \boldsymbol{\alpha}_t) - \rho_0^2 \quad (50)$$

여기서 \mathbf{s}_e 는 탄성 예측한 편차 응력, $\boldsymbol{\alpha}_t$ 는 시작점의 역응력이다.

만일 항복 함수가 0 보다 작은 경우에는 탄성 예측된 응력이 최종 응력값이 되고 접선 강성 행렬은 탄성강성 행렬이 된다. 하지만 항복 함수가 0 보다 큰 경우에는 소성 변형이 발생되었기 때문에 상태변수의 변화를 계산해야 한다.

소성변형률 속도는 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{(\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta)}{\sqrt{(\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta) : (\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta)}} \quad (51)$$

여기서 유효 소성 변형률 속도를 나타내는 λ 는 앞절에서 언급하였듯이 다른 상태변수와 같이 미지수로 취급하게 된다.

식(51)에 의해 정의된 소성 변형률에 이용하면 중간점의 편차 응력을 구할 수 있다.

$$\mathbf{s}_\theta = \mathbf{s}_t + \theta \left[\frac{E}{1 + \nu^{TM}} \mathbb{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - \frac{3}{2} \lambda \mathbf{n}_\theta \right] \quad (52)$$

여기서 $\lambda = \dot{\lambda} \Delta t$, $\mathbf{n}_\theta = \frac{(\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta)}{\sqrt{(\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta) : (\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta)}}$ 이다.

식 (52)와 동일한 방법으로 중간점에서의 이동성 경화 상태 변수를 구할 수 있다.

$$(\mathbf{a}_i)_\theta = (\mathbf{a}_i)_t + \theta \zeta_i \left[\mathbb{C}_i \lambda \mathbf{n}_\theta - H(f_i) \left\langle \frac{(\mathbf{a}_i)_\theta}{\bar{a}_i} : \frac{3}{2} \lambda \mathbf{n}_\theta \right\rangle (\mathbf{a}_i)_\theta \right] \quad (53)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_\theta = \kappa(\xi) \frac{1}{M} (\mathbf{a}_i)_\theta \quad (54)$$

그리고 중간점에서 항복함수는 0 을 만족하여야 한다.

$$F = \frac{3}{2} (\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta) : (\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta) - \rho_\theta^2 \quad (55)$$

$$\rho_\theta = \kappa(\xi_\theta) \rho_0 \quad (56)$$

중간점의 응력은 편차 응력과 평균 응력의 합이므로 각각의 증분을 더한다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\theta &= (\boldsymbol{\sigma}_{mean})_\theta + \mathbf{s}_\theta \\ &= \boldsymbol{\sigma}_t + \theta \frac{E}{1 - 2\nu} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v - \alpha \Delta T) \mathbf{I} + \theta \left[\frac{E}{1 + \nu^{TM}} \mathbb{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - \frac{3}{2} \lambda \mathbf{n}_\theta \right] \end{aligned} \quad (57)$$

구성식을 선형화 하며 유도한 식(52),(53),(55)은 미지수가 \mathbf{s}_θ , $(\mathbf{a}_i)_\theta$, λ 인 비선형 방정식이다. 이 비선형 방정식의 해를 구하기 위하여 유한차분 자코비 행렬을 이용한 Quasi-Newton 방법(Broyden)방법을 적용하였다.

수차례의 반복 계산을 수행하여 식(52),(53),(55)을 만족시키는 \mathbf{s}_θ , $(\mathbf{a}_i)_\theta$, λ 를 얻으면 초기값과 중간값의 관계를 이용하여 최종값을 계산할 수 있다.

4.3 Ohno-Wang 모델의 프로그래밍

이 모델의 비탄성 재료 상수를 정리하면 다음과 같다.

분 류	기 호
Kinematic Hardening	$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_9$ $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9$
Isotropic Hardening	a, b
Temperature Dependency	c, T_0
Initial Yield stress	ρ_0

1) userinit04

OHNO-WANG 모델을 사용한 해석을 수행하고 탄성 변형률, 열 변형률, 소성 변형률, 유효소성변형률을 관찰하고자 한다. 그리고 최대 소성 변형률 ξ 를 추가한다.

STATEV 에는 저장되어있는 값들을 TV0 와 SV0 에 저장한다.

STATEV	ELASTIC STRAIN	♥	TV0(I,1)
	THERMAL STRAIN		TV0(I,2)
	PLASTIC STRAIN		TV0(I,3)
	EQUIVALENT PLASTIC STRAIN		SV0(1)
	MAXIMUM PLASTIC STRAIN		SV0(2)

STRESS		♥	X0
STATEV	BACK STRESS 1, a_1		
	BACK STRESS 2, a_2		
	BACK STRESS 3, a_3		
	BACK STRESS 4, a_4		
	BACK STRESS 5, a_5		
	BACK STRESS 6, a_6		
	BACK STRESS 7, a_7		
	BACK STRESS 8, a_8		
	BACK STRESS 9, a_9		

X0 에는 시작점의 STRESS 와 STATEV 에 저장되어 있는 BACK STRESS 들을 저장한다.

NTV 는 3 이고 NSV 는 2 이다.

NX 는 NTENS*10 이다.

작성된 프로그램은 다음과 같다.

```
Subroutine userinit04(stress,statev,ntens,nstatv,
& x0,tv0,sv0,nx,ntv,nsv,itvar)
implicit real*8 (a-h,o-z)
```

```

parameter (ntvmax = 10,nsvmax = 10, nxmax = 100)

dimension stress(ntens),statev(nstatv)
dimension itvar(ntvmax)
dimension tv0(ntens,ntvmax),sv0(nsvmax)
dimension x0(nxmax)

c      number of tensorial state variable
ntv = 3

c      number of scalar state variable
nsv = 2

c      type of tensorial variable
itvar(1) = 2
itvar(2) = 2
itvar(3) = 2

c
c      state variable -> tensor variable
c      tv1 : elastic strain
c      tv2 : thermal strain
c      tv3 : plastic strain
c
index = 1
do 15 j=1,ntv
do 10 i=1,ntens
tv0(i,j) = statev(index)
10  index = index +1
15  continue

c
c      state variable -> scalar variable
c      sv1 : eqperate
c
do 20 i=1,nsv
sv0(i) = statev(index)
20  index=index+1

c      stress variable -> x variable
do 30 i=1,ntens
30  x0(I) = stress(i)

c      tensor variable -> x variable
DO 40 i=1,ntens*9
x0(ntens+i) = statev(index)
40  index = index+1

c      scalar variable -> x variable
x0(10*ntens+1) = statev(index)

nx = 10*ntens

return
end

```

2) userfunc04

X 배열에는 STRESS 와 9 개의 이동성 경화 변수가 저장되어 있다.

HOOKE'S LAW 와 소성 변형률의 정의를 결합하여 응력의 증분을 다음과 같이 정리할 수 있다. (6 COMPONENTS 표기법 사용)

$$\Delta\sigma_j = \begin{cases} \frac{E}{1+\nu} [\Delta\epsilon'_j - \Delta(\epsilon_p)_j] + \frac{E}{1-2\nu} [\Delta\epsilon_v - \alpha\Delta T] & j=1,2,3 \\ \frac{E}{1+\nu} [\Delta\epsilon'_j - \Delta(\epsilon_p)_j] & j=4,5,6 \end{cases}$$

소성 변형률 증분은 다음과 같다.

$$\Delta\epsilon^p = \frac{3}{2} \lambda \frac{(\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta)}{\sqrt{(\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta) : (\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta)}} \Delta t$$

중간점에서의 이동성 경화 변수는 다음과 같다.

$$(\mathbf{a}_i)_\theta = (\mathbf{a}_i)_t + \theta \zeta_i \frac{3}{2} \lambda \mathbf{n}_\theta - H(f_i) \left\langle \frac{(\mathbf{a}_i)_\theta}{\bar{a}_i} : \frac{3}{2} \lambda \mathbf{n}_\theta \right\rangle (\mathbf{a}_i)_\theta$$

역응력은 이동성 경화변수의 합에 $\kappa(\xi)$ 를 곱한 값이다.

$$\boldsymbol{\alpha}_\theta = \kappa(\xi) \frac{M}{1} (\mathbf{a}_i)_\theta$$

그러면 목적함수 Residue 는 다음과 같이 정의된다.

$$RESIDUE = \begin{pmatrix} \sigma_\theta - [\sigma_t + \theta\Delta\sigma] \\ (a_1)_\theta - [(a_1)_t + \theta\Delta(a_1)] \\ (a_2)_\theta - [(a_2)_t + \theta\Delta(a_2)] \\ (a_3)_\theta - [(a_3)_t + \theta\Delta(a_3)] \\ (a_4)_\theta - [(a_4)_t + \theta\Delta(a_4)] \\ (a_5)_\theta - [(a_5)_t + \theta\Delta(a_5)] \\ (a_6)_\theta - [(a_6)_t + \theta\Delta(a_6)] \\ (a_7)_\theta - [(a_7)_t + \theta\Delta(a_7)] \\ (a_8)_\theta - [(a_8)_t + \theta\Delta(a_8)] \\ (a_9)_\theta - [(a_9)_t + \theta\Delta(a_9)] \end{pmatrix}$$

중간점에서의 DRAG STRESS 는 다음과 같다.

$$\rho_\theta = \kappa(\xi_\theta) \rho_0$$

항복함수 YIELD 는 다음과 같이 정의된다.

$$F = \frac{3}{2} (\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta) : (\mathbf{s}_\theta - \boldsymbol{\alpha}_\theta) - \rho_\theta^2$$

사용된 재료 상수의 배열은 다음과 같다.

분 류	기 호	저장 순서
Kinematic Hardening	$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_9$ $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9$	a(1),a(2),a(3),a(4),a(5),a(6),a(7),a(8),a(9), a(10),a(11),a(12),a(13),a(14),a(15),a(16),a(17),a (18)
Isotropic Hardening	a, b	a(19), a(20)
Temperature Dependency	c, T_0	a(21), a(22)
Initial Yield stress	ρ_0	a(23)

TV2(I,1)에는 최종점의 탄성 변형률, tv2(I,2)에는 최종점의 열변형률, TV2(I,3)에는 최종점의 소성변형률을 저장한다. SV2(1)에는 최종점의 equivalent plastic strain 을, SV2(2)에는 maximum plastic strain 을 저장한다.

작성된 프로그램은 다음과 같다.

```

subroutine userfunc04 (residue, yield, eqperate, x1, x0,
* tv2, sv2, tv0, sv0,
* stran, dstran, temp, dtemp, theta, dtime,
* young, poisson, cte, a, ntens, ntv, nsv, nx, nconst)

implicit real*8 (a-h, o-z)

dimension x0 (nx) , x1 (nx) , residue (nx)
dimension tv0 (ntens, ntv) , sv0 (nsv) , tv2 (ntens, ntv) , sv2 (nsv)
dimension stran (ntens) , dstran (ntens)
dimension a (nconst)
c
c   interface of user function
c

dimension stress (ntens) , stress0 (ntens)
dimension back (ntens, 9) , back0 (ntens, 9) , back_amp (9) , alpha (ntens)
dimension stres_dev (ntens) , stres_dev0 (ntens) , dstran_dev (ntens)
dimension perate (ntens) , ep (ntens)

c
c   restore the independent variable, 'x' array
c

index = 1
do 10 i=1, ntens
stress (i) = x1 (index)
stress0 (i) = x0 (index)
10  index = index + 1

do 15 j=1, 9
do 15 i=1, ntens
back (i, j) = x1 (index)

```

```

back0(i,j) = x0(index)
15  index = index + 1

pemax = x1(index)
pemax0 = x0(index)

c
c    fill the othe variable
c
EK = young/(1.d0-2.d0*poisson)
EG = young/(1.d0+poisson)

Dstran_vol = (dstran(1)+dstran(2)+dstran(3))/3.d0
shydro0 = (stress0(1)+stress0(2)+stress0(3))/3.d0
shydro = (stress(1)+stress(2)+stress(3))/3.d0

do 20 i=1,3
stres_dev(i) = stress(i)-shydro
stres_dev0(i) = stress0(i)-shydro0
dstran_dev(i) = dstran(i) - dstran_vol
20  continue

do 30 i=4,ntens
stres_dev(i) = stress(i)
stres_dev0(i) = stress0(i)
dstran_dev(i) = dstran(i)
30  continue

c
c    calculate current plastic strain
c
do 50 i=1,ntens
ep(i)= tv0(i,3) + theta*dstran_dev(i)
* -1.d0/EG*(stres_dev(i)-stres_dev0(i))
50  continue

c
c    Calculate the isotropic hardening function
c
pemax0 = sv0(2)
pemax1 = 0.d0
do 70 i =1,3
70  pemax1 = pemax1 + ep(i)**2
do 75 i =4,ntens
75  pemax1 = pemax1 + 2.d0*ep(i)**2

pemax1 = dsqrt(0.666*pemax1)
if(pemax1.lt.pemax0) then
pemax1 = pemax0
endif
akhai = (1.d0+a(19)*pemax1)**a(20)

c
c    Calculate the influence function
c
tempmid = temp+theta*dtemp
pi = dexp(a(21)/(tempmid+273.d0) - a(21)/(a(22)+273.))

```



```

c
c   Calculate the back stress components
c
do 80 i=1,ntens
80  alpha(i) = 0.d0

do 85 i=1,ntens
do 84 j=1,9
84  alpha(i) = alpha(i) + pi*akhai*back(i,j)
85  continue

c
c   calculate J2 stress invariant
c
c   psum = 0.d0
do 90 i = 1,3
90  psum = psum + (stres_dev(i)-alpha(i))**2
do 91 i = 4,ntens
91  psum = psum + 2.d0*(stres_dev(i)-alpha(i))**2

c
c   Calculate the plastic strain rate components
c
c   if(psum.gt.0.d0) then
do 100 i = 1,ntens
100  perate(i) = 1.5d0*eqperate*(stres_dev(i)-alpha(i))/dsqrt(psum)
c   else
do 105 i = 1,ntens
105  perate(i) = 0.d0
c   end if

c
c   1st object function : stress residual
c
c   index = 0
do 110 i =1,3
c   index = index + 1
c   residue(index) = stress(i) - stress0(i)
c   * - theta*EG*(dstran_dev(i)-perate(i)*dtime)
c   * - theta*EK*(dstran_vol-cte*dtemp)
110  continue

do 115 i = 4,ntens
c   index = index + 1
c   residue(index) = stress(i) - stress0(i)
c   * - theta*EG*(dstran_dev(i)-perate(i)*dtime)
115  continue

c
c   2nd object function : back stress residual
c
do 120 i = 1,9
back_amp(i) = 0.d0

do 121 k = 1,3

```

```

121  back_amp(i) = back_amp(i) + back(k,i)**2
      do 122 k= 4,ntens
122  back_amp(i) = back_amp(i) + 2.d0*back(k,i)**2

      back_amp(i) = dsqrt(1.5d0*back_amp(i))
120  continue

      do 130 i=1,9
      fsurf = back_amp(i)**2 - a(i)**2
      if(fsurf.le.0.d0) then
      fsurf = 0.d0
      else
      fsurf = 1.d0
      endif

      sum = 0.d0
      if(back_amp(i).gt.0.d0) then
      do 140 k=1,3
140  sum = sum + perate(k)*back(k,i)/back_amp(i)
      do 141 k=4,ntens
141  sum = sum + 2.d0*perate(k)*back(k,i)/back_amp(i)
      endif

      if(sum.le.0.d0) then
      sum = 0.d0
      endif

      do 150 j = 1,ntens
      index = index + 1
      residue(index) = back(i,j) - back0(i,j)
      *-theta*dtime*a(i+9)*(0.666*a(i)*perate(j)-fsurf*sum*back(j,i))
150  continue

130  continue

c
c      Definition of yield function
c
      yield = 1.5d0*psum - (akhai*pi*a(23))**2

c
c      tv1 : elastic strain
c      tv2 : thermal strain
c      tv3 : plastic strain
c
      do 170 i=1,3
      tv2(i,1) = tv0(i,1)+ (dstran(i)-cte*dtemp-dtime*perate(i))
      tv2(i,2) = tv0(i,2)+ cte*dtemp
170  tv2(i,3) = tv0(i,3)+ dtime*perate(i)

      do 175 i=4,ntens
      tv2(i,1) = tv0(i,1)+ (dstran(i)-dtime*perate(i))
      tv2(i,2) = tv0(i,2)
175  tv2(i,3) = tv0(i,3)+ dtime*perate(i)

c

```

```

c      sv(1) : equivalent plastic strain
c
c      sv2(1) = sv0(1) + eqperate*dtime
c
c      sv(2) : maximum plastic strain
c
c      pemax2 = 0.d0
c      do 180 i =1,3
180    pemax2 = pemax1 + tv2(i,3)**2
c      do 181 i =4,ntens
181    pemax2 = pemax1 + 2.d0*tv2(i,3)**2
c
c      pemax2 = dsqrt(0.666*pemax1)
c      if(pemax1.lt.pemax0) then
c      pemax2 = pemax0
c      endif
c
c      sv2(2) = pemax2
c
c      return
c      end

```

3) USERPOST04

계산이 완료된 X2 와 TV2, SV2 를 USERINIT04 와 일관되게 STATEV 와 STRESS 에 저장한다.

TV2(I,1)	ELASTIC STRAIN	♥	STATEV
TV2(I,2)	THERMAL STRAIN		
TV2(I,3)	PLASTIC STRAIN		
SV2(1)	EQUIVALENT PLASTIC STRAIN		
SV2(2)	MAXIMUM PLASTIC STRAIN		

X2	STRESS	♥	STRESS
	BACK STRESS 1, a ₁		STATEV
	BACK STRESS 2, a ₂		
	BACK STRESS 3, a ₃		
	BACK STRESS 4, a ₄		
	BACK STRESS 5, a ₅		
	BACK STRESS 6, a ₆		
	BACK STRESS 7, a ₇		
	BACK STRESS 8, a ₈		
BACK STRESS 9, a ₉			

작성된 프로그램은 다음과 같다.

```

subroutine userpost04 (statev, stress, x2, tv2, sv2,
* nstatv, ntens, nx, ntv, nsv)
implicit real*8 (a-h, o-z)

dimension statev(nstatv), stress(ntens)

```

```

dimension x2(nx),tv2(ntens,ntv),sv2(nsv)

c      tensor variable -> state variable
index = 1
do 30 j=1,ntv
do 30 i=1,ntens
statev(index) = tv2(i,j)
30    index = index +1

c      scalar variable -> state variable
do 40 i=1,nsv
statev(index) = sv2(i)
40    index=index+1

c      x array -> stress variable
do 10 i=1,ntens
10    stress(i) = x2(i)

c      x array -> state variable
do 50 i=1,9*ntens
statev(index) = x2(ntens+i)
INDEX = INDEX +1
50    continue

return
end

```

5. 비탄성 구성식의 재료 상수의 결정

비탄성 구성식은 필연적으로 많은 수의 재료 상수를 갖게 되며 구성식이 포함하는 변형기구의 폭이 넓을수록 수가 더 많아진다. 그래서 특정 재료의 구성식을 만드는 것 만크이나 재료 상수의 결정은 어려우면서 중요한 과정이다. 점소성 구성식은 비선형성이 매우 심하여 계산 과정에 상당한 어려움이 있다. 재료상수 결정 문제는 실제 실험 결과와 예측 결과와 비교하여 두 차이를 최소로 하는 상수를 결정하는 최적화 문제로 볼 수 있으며 지금까지 개발된 다양한 최적화 기법을 사용할 수 있다.

상수 결정에 사용되는 최적화 기법을 크게 보면 목적함수(object function)의 Gradient 를 이용한 Newton-Raphson Method, 재료상수의 모든 조합에 대하여 목적함수를 계산하여 그 최소값을 이용하는 방법(ex. Dynamic programming), 그리고 Random 한 재료상수의 조합을 구성하여 최적치를 추정해나가는 방법(ex. Genetic Algorithm)들이 사용되고 있다. 각 방법들마다 장단점이 있지만 계산의 효율성을 볼 때 첫번째 방법이 가장 유효하여 많은 연구자들에 의해 선호되고 있으며[12 ~ 14] 하드웨어의 발전에 힘입어 나머지 방법들에 대한 연구도 진행 중이다[15].

5.1 최적화를 통한 재료상수의 결정

기존의 재료 상수 결정 방법은 한 변형기구에 주로 영향을 주는 재료 상수를 먼저 구하고 다른 변형 기구에 영향을 주는 재료 상수를 나중에 구하는 순차적인 과정(step-by-step procedure)을 통하여 구하게 된다. 이것은 특정 상수는 특정 하중 상황에만 민감하게 반응하는 것을 근거로 하는 것인데 이렇게 구한 값들은 상수들간의 상호 관계에 대하여 과소평가하므로 해석 결과와 측정 결과와 차이를 보이게 된다.¹ 따라서 모든 재료 상수를 하나의 일관된 과정에서 결정하게 되면 순차적인 방법의 약점을 극복할 수 있으며 측정 결과와 매우 유사한 예측을 할 수 있다.

비탄성 구성식의 재료상수를 구하기 위하여 최적화 기법의 하나인 마퀴트(Marquardt)의 최소화 방법[16] 을 이용한다. 이 경우 목적 함수 (object function)는 재료의 실험치와 구성식을 이용한 예측치의 차이를 최소화시키는 최적화 문제로 전환되게 된다.

$$Q^2 = \sum_{\text{Experiment type}} \sum_1^{ND} \left\{ \frac{[\sigma_i^{ex}(\epsilon, \xi) - \sigma_i^{th}(\epsilon, \xi, \mathbf{a})]}{w_i} \right\}^2 = \min$$

여기서 $\sigma_i^{ex}(\epsilon, \xi)$ 는 측정된 응력값이고 $\sigma_i^{th}(\epsilon, \xi, \mathbf{a})$ 는 초기 재료 상수들로부터 계산된 응력이고 w_i 는 weighting factor, \mathbf{a} 는 재료 상수벡터를 의미한다. 이 Q 를 최소화시키는 재료상

수 벡터 \mathbf{a} 를 결정하기 위하여 Levenberg-Marquardt 방법을 사용한다.

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a}^k - \left(\mathbf{J}(\mathbf{a}^k)^T \mathbf{J}(\mathbf{a}^k) + \mu_c \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{a}^k)^T Q^2(\mathbf{a}^k)$$

여기서 \mathbf{a}^k 는 k 번째 반복계산에 의해 구한 재료상수벡터이고 \mathbf{J} 는 경사구배 벡터(**gradient vector**, ∇Q^2)이고 μ_c 는 조건에 의해 주어지는 상수이다. 이 방법은 일반적으로 다변수 최적화과정에 필요한 헤시안 행렬(Hessian Matrix, $\nabla^2 Q^2$)를 계산하지 않고 오직 경사구배 벡터 \mathbf{J} 만으로 계산하기 때문에 계산시간이 많이 감소된다[17].

재료 상수들 사이의 상관성을 알기 위하여 상관계수 (correlation coefficient) 을 구한다.

$$[\rho_{ij}] = \frac{H_{ij}}{\sqrt{H_{ii}H_{jj}}}$$

이 상관계수가 1 에 가까울수록 두 계수의 상관성이 매우 커지게 되므로 해의 유일성 (Uniqueness)이 약해지게 된다[18].

5.2 초기값 결정

앞 절에서 서술한 최적화 과정에 사용될 재료상수의 초기값을 결정하기 위해서는 점소성 구성식의 1 차원 형태를 이용하여 순차적 방법을 통하여 재료 상수를 결정한다. 본 절에서는 Chaboche 점소성 구성식을 예를 들어 설명하기로 한다. Chaboche 점소성 구성식의 1 차원 형태는 다음과 같다.

$$\text{항복조건} : f = |\sigma - X| - R - k$$

$$\text{변형률 분리} : \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

$$\text{응력 변형률 관계} : \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$$

$$\text{소성 변형률 속도} : \dot{\varepsilon} = \dot{p} \operatorname{sgn}(\sigma - X)$$

$$\text{누적 소성 변형률} : \dot{p} = \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle^n$$

$$\text{이동성 경화} : \dot{X} = C\dot{\varepsilon}_p - \gamma(p)X\dot{p}$$

$$\text{등방성 경화} : \dot{R} = b(Q - R)\dot{p}$$

5.3 이동성 경화 관련 상수

Kinematic hardening 에 관련된 재료 상수를 결정하는 데에는 안정화된 응력-변형률 곡선이 사용된다. Hysteresis 곡선이 안정화되면 등방성 경화 R 은 saturation value Q 에 도달하였고 방향성 경화 X 는 Xmax 와 Xmin 사이를 반복하고 있다고 할 수 있다. 따라서

$$X_{\max} = \frac{C}{\gamma} + (X_{\min} - \frac{C}{\gamma}) \exp(-\gamma \Delta \epsilon_p)$$

$$X_{\min} = \frac{C}{\gamma} + (X_{\max} - \frac{C}{\gamma}) \exp(-\gamma \Delta \epsilon_p)$$

두 식을 정리하면 $X_{\max} = \frac{C}{\gamma} \left. \tanh \left(\frac{\gamma \Delta \epsilon_p}{2} \right) \right\}$ 이고

최대 인장시의 응력은 $\sigma_t = X_{\max} + R + k + K(\dot{\epsilon}_p)_t^n$ (*) 이고 최대 압축일 때의 응력은 위의

가정에 의하여 $\sigma_c = X_{\min} + R + k + K(\dot{\epsilon}_p)_c^n$ 이 된다.

따라서

$$\frac{1}{2} \Delta \sigma = \left. \frac{C}{\gamma} \left[\tanh \left(\frac{\gamma \Delta \epsilon_p}{2} \right) \right] \right\} + y$$

여기서 $y = \frac{1}{2} (K(\dot{\epsilon}_p)_t^n - K(\dot{\epsilon}_p)_c^n)$ 이다.

변형률 속도가 다른 실험 결과로부터 C, γ 의 초기값을 얻게 되고 변형률 속도와 범위에 따라서 y 값을 저장하여 K와 n의 결정에 사용한다.

5.4 점소성 변형률 관련 상수

실험 결과로부터 소성 변형률 속도를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon} [1 - E^{-1}(d\sigma/dt)]$$

소성 변형에 의하여 응력의 변화가 매우 작게 되므로 $\dot{\epsilon}_p \approx \dot{\epsilon}$ 가 된다. 따라서 앞서의 계산을 통하여 얻은 y을 이용하여 K와 n의 최적치를 얻게 된다[19].

$$y = \frac{1}{2} (K(\dot{\epsilon}_p)_t^n - K(\dot{\epsilon}_p)_c^n)$$

여기서 K, n 은 반복 소성과 크리프 변형에서 변형율 속도의 영향을 지배하므로 중요하다.

본 절에서 구한 K 와 n 그리고 앞 절에서 구한 C, γ 를 사용하여 초기 항복응력 k 를 구할 수 있다.

5.5 등방성 경화 관련 상수

항복함수에서 등방 경화항을 유도하면 $R = \sigma_t - X_{max} + k + K(\dot{\epsilon}_p)_t^n$ 이다. 인장이 처음 걸릴 때의 R 을 0, 소성 변형율 속도가 매 주기 같다고 보면 n 번째 주기에서의 등방성 경화는 다음과 같이 된다.

$$R_n = \frac{1}{2}(\Delta\sigma_n - \Delta\sigma_0) - \frac{C}{\gamma} \left[\tanh\left(\frac{1}{2}\gamma(\Delta\epsilon_p)_n\right) - \tanh\left(\frac{1}{2}\gamma(\Delta\epsilon_p)_0\right) \right]$$

여기서 n 번째 주기의 응력 진폭 $\Delta\sigma_n$ 와 소성 변형률 진폭 $(\Delta\epsilon_p)_n$ 은 실험결과로부터 계산할 수 있는 값이다. 단축 하중이 작용하는 경우 누적 소성변형률은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$p_n = \frac{3}{2}(\Delta\epsilon_p)_1 + 2 \sum_{i=2}^n (\Delta\epsilon_p)_i$$

위의 식들로부터 P_n 을 구하고 이를 이용하여 Q, b 를 구한다.

$$R_n = Q(1 - \exp(-bp_n))$$

6. 프로그램 예제

6.1 Ohno-Wang 모델을 이용한 유한 요소 해석

이동성 경화 변수가 9 개인 OHNO-WNAG 모델을 이용한 단축 해석을 수행하여 결과를 분석하였다. 모델에 대한 설명과 재료 상수는 앞장에서 자세히 언급되어 있으므로 여기서는 생략하겠다. 그림 1 은 단순 인장 해석을 수행한 결과를 보여주고 있다.

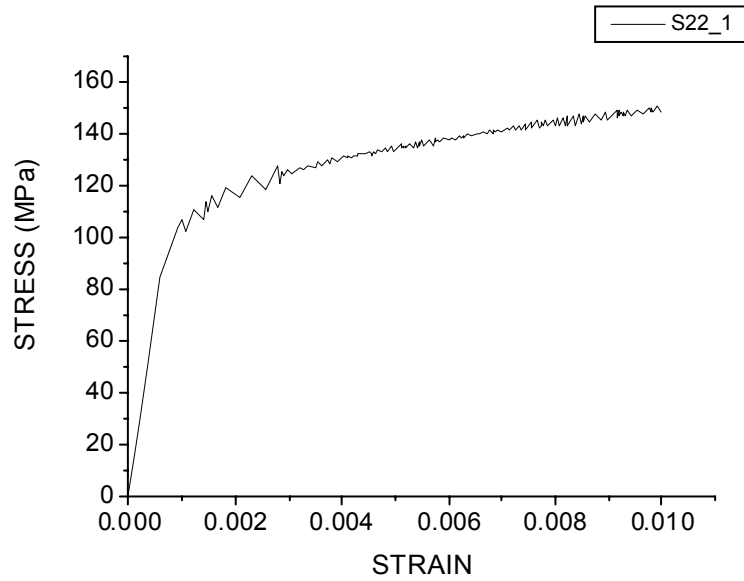


그림 1. OHNO-WANG 모델을 적용한 인장 해석

응력과 상태변수의 관계를 보기 위하여 그림 2 에서 역응력과 DRAG STRESS 의 거동을 응력 곡선과 비교하였다. 여기서 역응력 α 은 이동성 경화 변수($a_1 \sim a_9$)을 모두 합한 후 등방성 경화 함수 $\kappa(\xi)$ 를 곱하여 얻은 값이다. 등방성 경화 응력 ρ 은 초기 항복응력에 등방성 경화 함수 $\kappa(\xi)$ 를 곱하여 얻은 값이다.

$$\alpha = \kappa(\xi) \sum_{i=1}^M a_i$$

$$\rho = \kappa(\xi) \rho_0$$

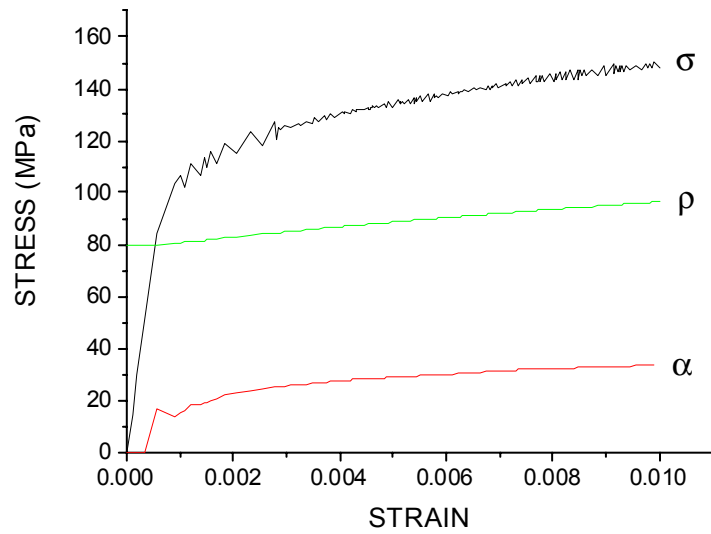


그림 2. OHNO-WANG 모델의 내부 상태 변수의 거동

여기서 알 수 있는 점은 인장 곡선에서 응력이 초기 항복 응력 이하에서는 탄성 거동을 보이지만 그 이상이 되면 소성 변형이 발생하여 역응력이 발전하게 되고 응력의 거동은 역응력에 초기 항복 항복응력 만큼을 더한 것과 같게 된다.

이동성 경화 변수($a_1 \sim a_9$)의 거동을 자세히 보기 위하여 그림 3 에서 9 개 내부변수의 거동을 나타내었다. 모두 다른 크기와 다른 속도로 발전함으로써 재료의 비탄성 거동을 적절히 표현하고 있다.

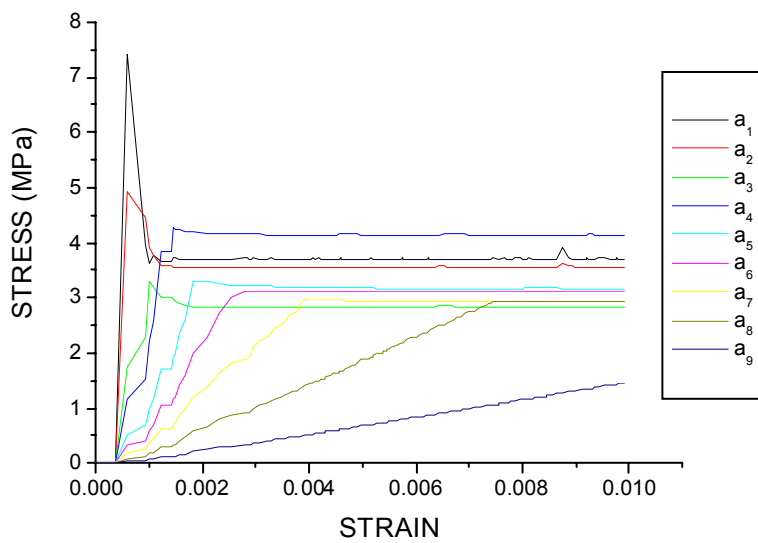


그림 3. OHNO-WANG 모델의 이동성 경화 변수의 거동

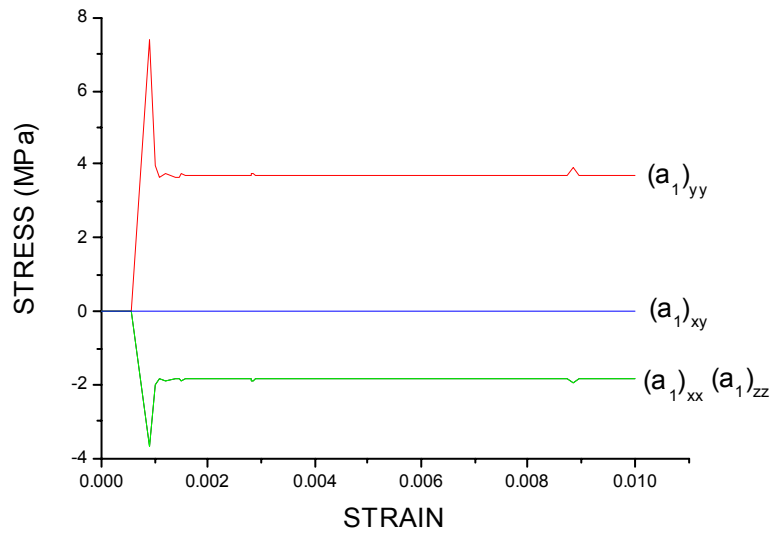


그림 4. 이동성 경화 변수의 성분별 거동

상태변수의 거동을 좀더 자세히 보기 위하여 그림 4 에서 이동성 경화 변수의 거동을 성분별로 나타내었는데 하중 작용 방향이 아닌 방향의 이동성 경화 변수의 성분은 서로 같은 값을 갖게 되고 세 성분의 합이 영이 됨을 알 수 있다. 이것은 이동성 경화 변수 텐서가 편차 텐서이고 비탄성 변형률의 비 압축성을 모사하고 있음을 나타내는 것이다.

6.2 시간 증분 조절법의 개선한 Chaboche 모델 적용 예제

6.2.1 단축경화해석

본 연구에서 구축한 프로그램의 수치적 정확도를 검증하기 위하여 단축 인장에 대한 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 비탄성 구성식은 Chaboche[3]가 제안한 통합형 점소성 모델로 구성식에 대한 설명은 기존 보고서[9]를 참조하고 해석에 사용한 316 스테인레스 강의 재료 상수는 Schwertel[12]의 논문에서 인용하였으며 표 1 에 수록하였다. Δt 의 변화에 대하여 나타나는 해석 결과를 분석하기 위하여 1 개의 3 차원 요소를 사용하여 단축 경화 해석을 수행하였다. 그림 5 는 작성된 프로그램과 ABAQUS 와의 관계와 작성 코드의 계산절차를 나타낸 것이다.

그림 6 은 시간 증분의 변화에 따른 구성식의 적분 결과를 나타낸 것이다. 여기서 θ 는 0.5 로, 변형률 속도는 1×10^{-5} (1/sec)로 고정하였으며 Δt 가 100sec, 200sec, 500sec, 1000sec 인

경우를 서로 비교하였다. 모든 경우에 대하여 각 증분의 중간값($t + \theta\Delta t$)에서는 정밀해 ($\Delta t=1$)와 정확히 일치하고 있지만 시간 증분이 커질수록 결과의 떨림 현상이 커지게 되는데 이러한 오차는 해가 발산하는 원인이 되기도 하기 때문에 적절한 시간 증분 조절법이 요구됨을 알 수 있다.

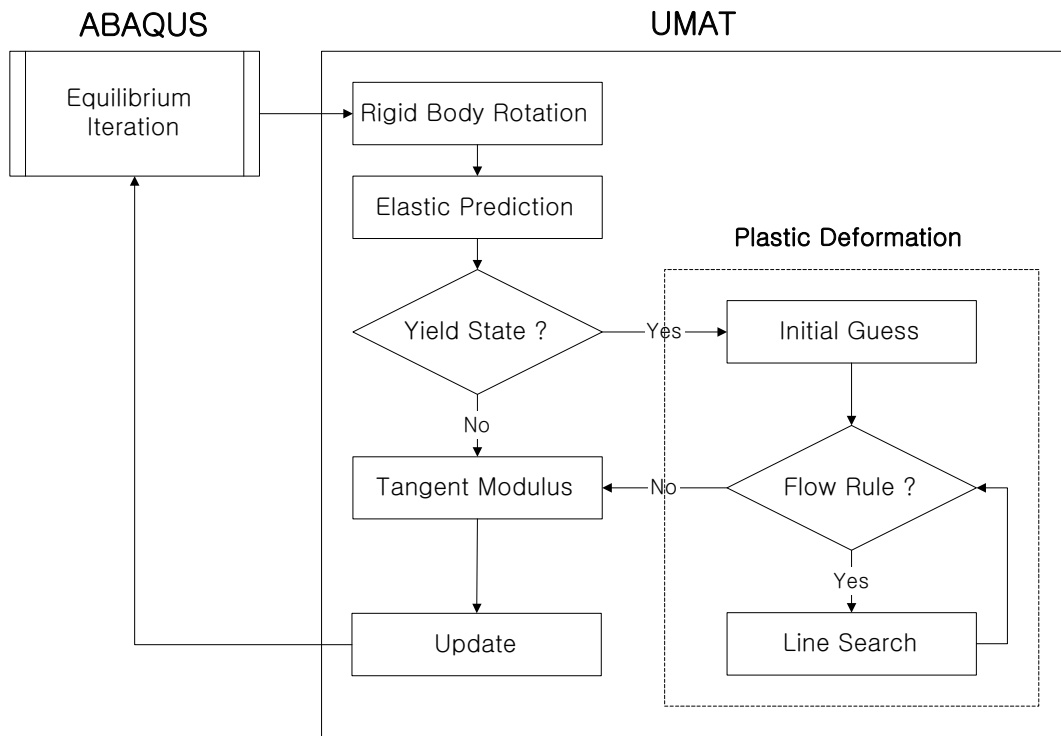


그림 5. 프로그램 구성도 개략

표.1 316 스테인레스강의 재료 상수 (600 °C) [12]

기호	재료 상수	기호	재료상수
E	152 Gpa	m_1	2.45
ν	0.3	h_1	3.98*e-8 /sec
K	939 Mpa	C_2	4820 MPa
α_k	0	γ_2	30.7
n	1.89	m_2	1.49
σ_y	59.4 Mpa	h_2	7.83*e-6 /sec
C_1	9.2*e4 Mpa	b	14.6
γ_1	1390	Q	51.1 Mpa

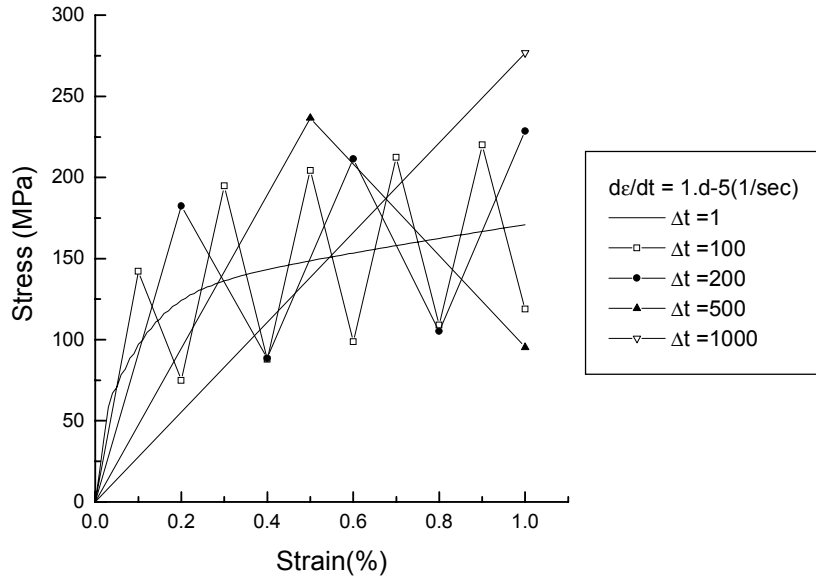


그림 6. 단축인장해석의 응력-변형률 선도

그림 7은 본 논문에서 제안한 시간 증분 조절 방법을 적용하여 해석을 수행한 결과를 나타낸 것이다. 시간 증분을 제외한 모든 조건은 그림 5와 동일하다. 첫 시간 증분을 10 sec로 하여 계산을 수행하는데 11개의 시간 증분이 사용되었으므로 증분 수로는 그리 큰 차이가 없지만 정확도는 그림 6에 나타난 $\Delta t = 100 \text{ sec}$ 의 경우에 비해 월등히 개선되었다.

현재의 해석은 단축 경화 해석이므로 소성 변형률의 방향이 고정되어 있어서 오차만을 이용한 시간 증분을 조절하게 되는데 해석 결과를 볼 때 현재의 시간 증분 조절법은 매우 효과적임을 알 수 있다.

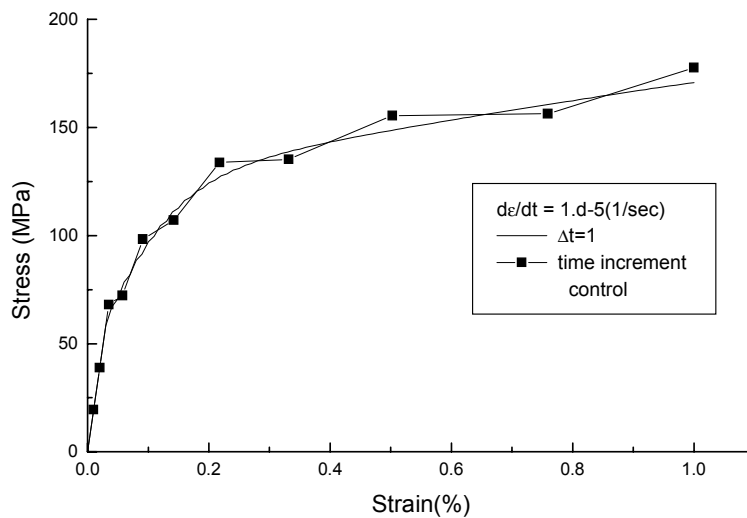


그림 7. 시간증분조절 기법을 적용한 단축인장해석 결과

6.2.2 주응력방향이 변하는 하중의 해석

앞 절에서 단축 경화 해석에 대한 본 프로그램의 해석 능력을 검증하였으며 시간 증분 조절법의 적용으로 해석 결과의 정확도가 개선됨을 확인하였다. 본 절에서는 다축 거동에 대한 해석 능력과 시간증분 조절법의 적용성을 평가하기 위하여 주응력 방향이 변하는 다축 하중(non-proportional multiaxial loading)에 대한 해석을 수행하였다. 하중은 그림 8 과 같이 먼저 1 방향으로 0.5%만큼의 변형률을 가한 다음, 이에 수직한 방향으로 0.5%의 변형률로 인장 시킨 후 여기서 1 방향과 2 방향 동시에 0.5%의 변형률을 가하는 경우에 대한 해석을 수행하였다. 처음 1 방향으로의 인장이 될 경우 2 방향으로는 하중을 작용하지 않으므로 1 방향 변형률의 포아송 비만큼 2 방향 변형률이 발생한 것이다. 그림 9 는 응력 해석 결과이며 시간 증분(Δt)을 10sec 로 고정하였으며 σ_{11} 과 σ_{22} 을 제외한 나머지 성분은 모두 0 이거나 0 에 근접한 값이므로 생략하였다.

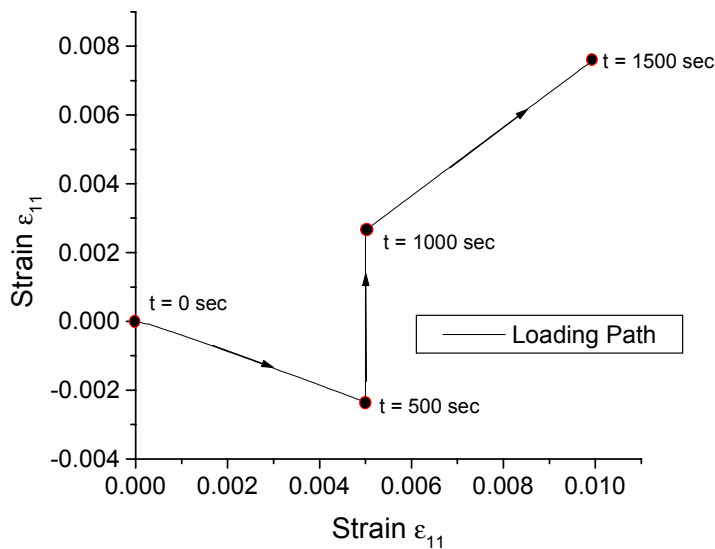


그림 8. Non-proportional 다축하중의 하중경로

시간 증분 조절의 영향을 비교하기 위하여 시간증분(Δt)을 50sec 인 경우에 대하여 해석을 수행하였으며 그 각각의 결과에서 σ_{11} 을 그림 10 에서 비교하였다. 시간 증분이 50 초인 경우 해의 떨림이 발생하지만 시간 조절 증분법에 의하여 정확도가 상당히 향상되었음을 알 수 있는데 이것은 그림 11(a)와 11(b)에서는 오차들의 양상을 보면 더욱 확실해 진다. 여기서는 시간 증분 조절을 수행하여 해석된 결과가 시간 증분이 10 인 경우 보다 더 작은

오차가 발생하고 있는 것을 알 수 있다.

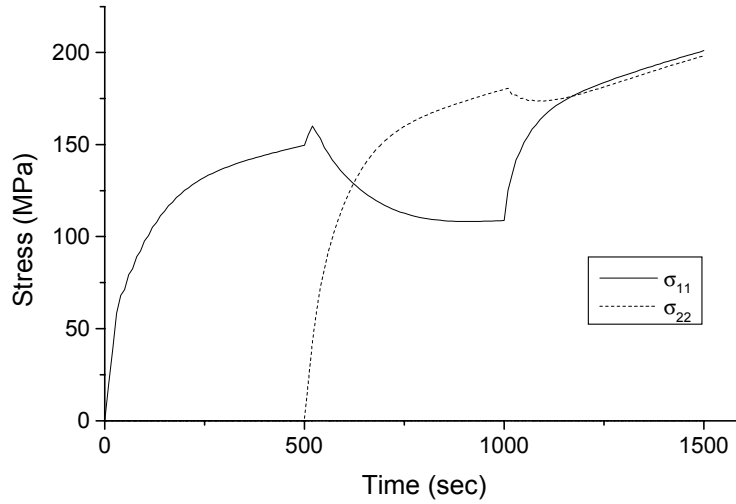


그림 9. 비례하지 않는 하중에 의한 다축 변형시 응력 이력

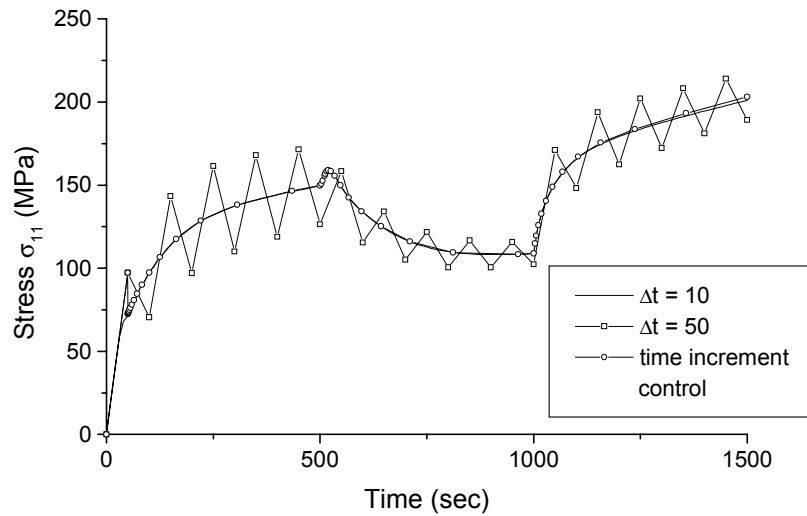


그림 10. 시간증분기법을 적용한 경우 축응력 거동

정확도와 함께 고려하여야 할 것은 계산 시간이므로 각 경우에 대하여 총 시간 증분의 수와 평형 반복 계산, 그리고 총 계산 시간을 표 2 에서 비교하였다. 시간증분이 10 인 경우가 가장 긴 계산 시간을, 시간증분이 50 인 경우가 가장 작은 계산 시간이 들었으나 시간 증분 조절에 의한 결과는 계산 시간의 증가가 크지 않다. 이를 통하여 시간 증분의 효과

적인 조절은 계산 시간과 정확도 면에 있어서 가장 우수한 결과를 도출할 수 있음을 확인할 수 있었다.

표.2 다축 경화 해석의 계산 결과 비교

Case	시간 증분의 수	# of Equilibrium iteration	CPU time
$\Delta t = 10$	150	153	45.05
$\Delta t = 50$	30	59	25.64
Time increment control	47	63	32.97

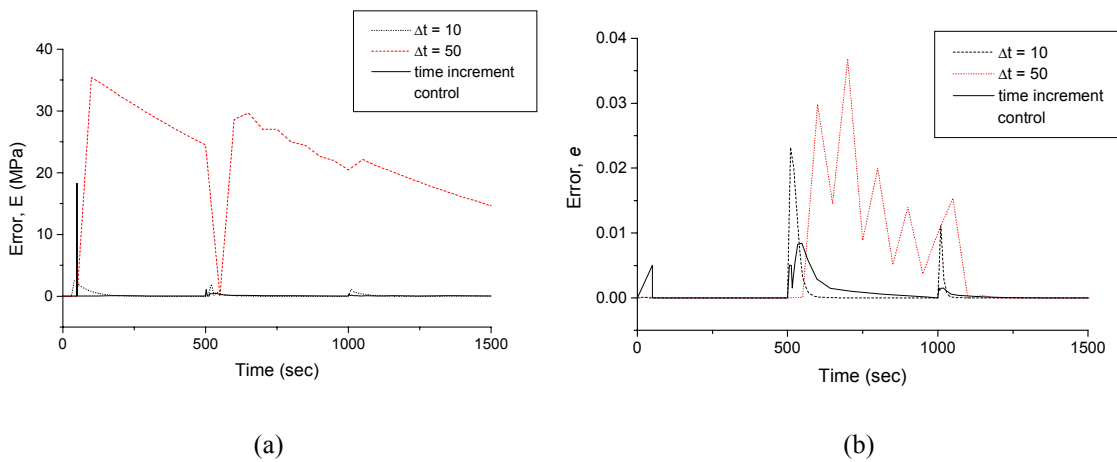


그림 11. 비례하지 않는 다축변형의 에러 이력

6.2.3 노치가 있는 환봉 시편의 응력 해석

앞 절의 단축 및 다축 경화 해석을 수행하여 검증한 프로그램의 시간 의존성 다축 거동 해석에의 적용성을 평가하기 위하여 둥근 노치가 있는 환봉 시편에 대하여 반복 경화 해석, 크립 해석, 응력 회복 해석을 수행하였다. 축대칭 요소를 사용하였으며 시편의 형상과 하중 조건은 그림 12에 나타나 있다. 해석에서 θ 는 0.5로 고정하였으며 시간 증분 조절법은 본 연구에서 제안한 방법을 적용하였다. 시편의 중심을 기준으로 하여 반경 방향 좌표를 x 로 하였으며 시편의 최소 반경이 d 이다.

그림 13은 인장 하중이 작용할 경우 위치에 따른 변형률 속도와 응력-변형률 관계를 나타낸 것인데 x 값이 커지면 변형률 속도가 증가하며, 작용 응력 역시 증가함을 볼 수 있다. 이것은 점소성 구성식의 속도 의존성을 보여주는 것으로 판단된다.

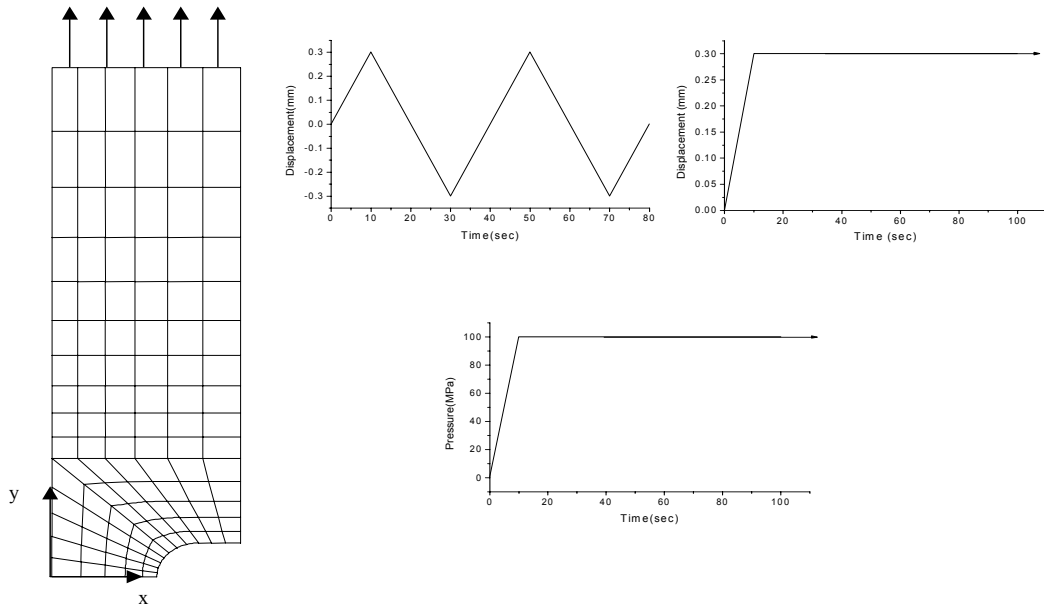


그림 12. 유한요소모델 및 하중 선도

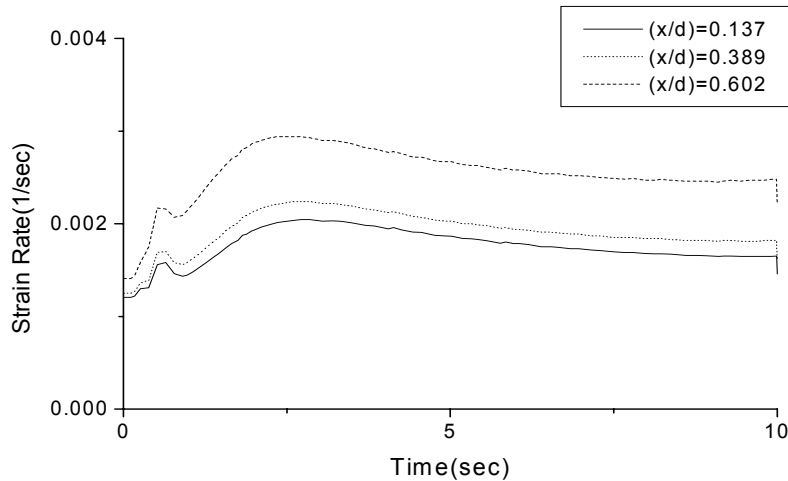


그림 13. 인장시 변형률 이력

그림 14 는 그림 13 과 동일한 위치의 응력-변형률 관계를 나타낸 것으로 중심축에서 멀어질수록 작용응력이 증가하는데 이로써 변형률 속도가 증가하면 작용응력이 증가하는 점소성재료의 속도 의존성을 작성된 프로그램이 잘 모사 해주고 있음을 할 수 있다..

그림 15 는 변형률 고정 하중을 가했을 때 발생하는 응력 이완 현상을 나타내는데, 여기서 초기에 변형률 속도의 급격한 감소로 인한 천이 효과를 제거하기 위하여 $t=20\text{sec}$ 이후부터 이완량을 나타내었으며 충분히 긴 시간 이후 뒤에서 계속적으로 응력 이완 효과가 잘

나타나고 있음을 알 수 있다.

그림 16은 응력 고정 하중이 작용하는 경우에 나타나는 크립 변형의 결과를 보여주고 있는데 일차 크립과 이차 크립의 전형적인 형태를 잘 나타내고 있어서 크립 변형과 같은 시간 의존적 거동에 대한 해석에의 적용성을 확인하였다.

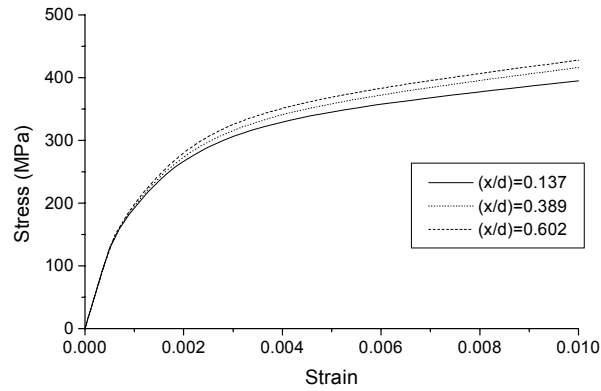


그림 14. 인장시 응력-변형률 선도

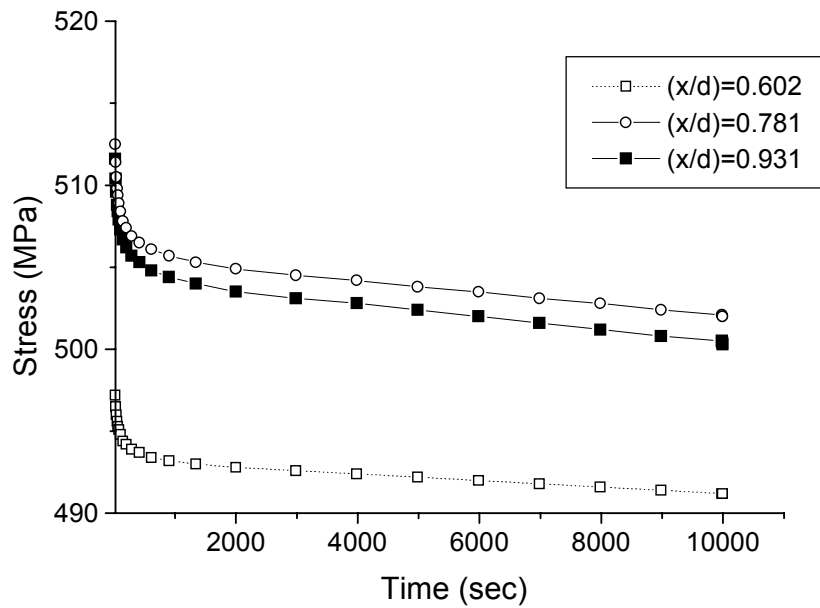


그림 15. 응력완화 시험에서 응력이력

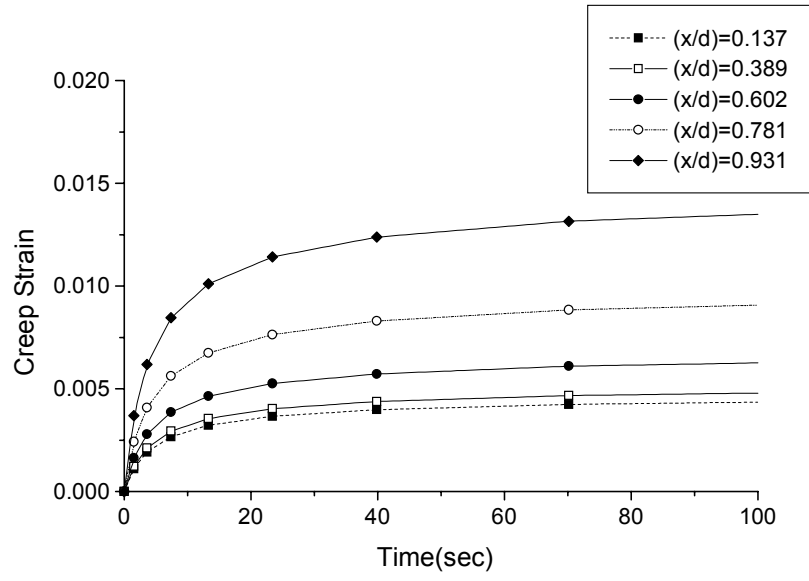


그림 16. 크립시험에서 변형률 이력

III. 결론

액체금속로의 고온운전환경으로 인해 원자로용기와 내부구조물과 같은 주요 구조물들은 발전소 수명 동안 크립과 크립피로 및 라체팅과 같은 고도의 비선형 거동 손상을 받기 쉽다. 따라서 현재 전 세계적으로 이러한 고도의 비선형 거동을 좀 더 신뢰성과 정확성을 확보한 비탄성 해석을 수행할 수 있도록 하기 위한 구성식의 개발과 이를 사용한 유한요소해석 기술의 개발이 진행되고 있다. 본 연구에서도 등방성 경화와 이동성 경화를 동시에 모사하는 통합형 탄소성 구성식을 장착한 NONSTA-EP 코드를 개발하였고 또 소성과 크립을 동시에 모사하는 Chaboche 점소성구성식을 장착한 NONSTA-VP 코드를 개발한 바 있고 지속적으로 이를 보완해오고 있다. 이러한 연구노력의 일환으로 매 하중 사이클마다 소성변형이 누적되는 라체팅 현상을 좀 더 잘 모사할 수 있도록 가장 활발한 노력을 기울이고 있는 Ohno-Wang 모델을 장착한 NONSTA-OW 코드를 개발하였고 본 보고서에서는 이를 중점적으로 기술하였다.

기존에 개발하였던 코드는 Kinematic hardening 을 의미하는 Back stress 의 수를 3 개로 제한하였으나 개선 작업으로 Back stress 의 수에 제한을 두지 않았고, 또 상태변수의 발전식이 속도형태로 정리된 구성식에 대하여 작성하였으나 함수형태 정의되는 상태변수의 발전식도 적용 가능하도록 개선하였다. 개선 사항 중에 주목할 점은 해를 구하는 과정인데, 기존에 적용한 Newton 방법은 해의 수렴도는 매우 우수하나 자코비 행렬의 역행렬을 계산해야 한다는 문제가 있었다. 특히 비선형성이 강한 구성식의 경우 자코비 행렬을 정의하는 것은 물론 그 역행렬을 계산하는 것은 많은 계산량과 수치적 문제를 일으키므로 유한차분 자코비 행렬을 이용한 Quasi-Newton 방법(Broyden)방법을 적용하여 이를 개선하였다.

비탄성 구성식의 특징은 복잡한 구조물의 거동을 모사할 수 있도록 많은 수의 재료상수를 갖도록 구성식이 개발되는데 이들 재료상수들을 적절히 구하는 것이 중요한 과제중의 하나이다. 본 보고서에서는 최적기법을 적용하여 이들 재료상수들을 구하는 방법을 개발하고 있고 이를 개략적으로 설명하였다. 재료의 이동성 경화를 모사하는 기능을 강화하기 위해 9개의 이동성 경화 내부변수를 포함하는 Ohno-Wang 구성식을 장착한 프로그램을 적용한 예제를 통하여 개발한 프로그램의 성능을 일차적으로 확인하였다. 또한 해의 정확성을 개선하기 위해 새로운 시간증분 조절법을 적용하였는데 이를 Chaboche 점소성모델에 적용하고 환봉시편에 대한 반복 경화해석, 크립해석, 응력이완해석을 수행하여 개선된 프로그램의 적용성을 확인하였다.

<참고문헌>

- [1] Bodner, S. R. and Partom, Y., 1975, "Constitutive Equations for Elasto -Viscoplasticity Strain Hardening Materials." *J. Appl. Mech.*, Vol. 42, p. 235.
- [2] Miller, A. K. , 1976, "An Inelastic Constitutive Model for Monotonic, Cyclic and Creep Deformation: Part 1, Equations, Development and Analytical Procedures," *J. Engng. Mat. Tech.*, Vol.98, p.97.
- [3] Chaboche, J. L., and Nouaihas, D., 1989, "A Unified Constitutive Model for Cyclic Viscoplasticity and Its Application to Various Stainless Steels," *J. Pres. Vessel. Tech.* , Vol.111, p.424.
- [4] Inoue, T., Yoshida, F., Ohno, N., Kawai, M., Niitsu, Y., and Imatani, S.,1991, "Evaluation of Inelastic Constitutive Models under Plastic-Creep Interaction in Multiaxial Stress State," *Nuclear Engng. Design*, Vol.126, p.1.
- [5] Orits, M., and Simo, J. C., 1986, "An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Equations," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.23, p.353.
- [6] Honberger, K., and Stamm, H., 1989, "An Implicit Integration Algorithms with a Projection Method for Viscoplastic Constitutive Equation," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.28, p.2397.
- [7] Chaboche, J. L. and Cailletaud, G., 1996, "Integration Methods for Complex Plastic Constitutive Equations," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, p.125.
- [8] 원자로구조물 비탄성해석을 위한 통합형 탄소성 프로그램(NONSTA-EP) 사용자 지침서, KALIMER/MS486-CM-02, 1999
- [9] 액체금속로 고온구조 설계해석을 위한 NONSTA 코드 개발, KAERI/TR-1256/99
- [10] ABAQUS, *User's manual*, Version 5.4, 1995, HKS, USA.
- [11] Numerical recipes in Fortran, 1992, Cambridge Press.
- [12] J. Schwertel and B. Schinke, "Automated Evaluation of Material Parameters of Viscoplastic Constitutive Equations," *Journal of Engineering Material and Technology*, 1996, v.118.
- [13] P. E. Sensory, N. S. Brodsky and K. L. DeVries ,Parameter Evaluation for a Unified Constitutive Model, *J.End.Mat.Tech.*,1993.,v.115
- [14] P. E. Sensory and A. F. Fossum, On Testing Requirements for Viscoplastic Constitutive Parameter Estimation, *J.Eng.Mat.Tech.*, 1995, v.117
- [15] Tomonari Furukawa and Genki Yagawa, Parameter Identification of Inelastic Constitutive Equations Using an Evolutionary Algorithm, ASME PVP 1995
- [16] Marquadt, D.W., *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol.11, pp.431, 1963

- [17] Yonathan Bard, Nonlinear Parameter Estimation, Academic Press, 1974
- [18] Ratkovsky, D.A., Nonlinear Regression Modelling: A Unified Practical Approach, Mardel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983
- [19] Duune, F.P.E., Makin. J. and Hayhurst, D.R. Automated procedures for the determination of high temperature viscoplastic damage constitutive equations, Proc.R.Soc.London. A.437. 1992.

서 지 정 보 양 식						
수행기관보고서번호		위탁기관보고서번호		표준보고서번호		INIS 주제 코드
KAERI/TR-1860 /2001						
제목/부제	비탄성 고온구조 해석코드 개발 보고서					
연구책임자 및 부서명 (TR, AR 인 경우 주저자)		김종범 / 액체금속로 기계설계기술개발				
연구자 및 부서명		이형연, 이재한/ 액체금속로 기계설계기술개발				
출판지	한국, 대전	발행기관	한국원자력연구소	발행년	2001.4	
페이지	42 p.	도 표	있음(V), 없음()	크 기	26cm	
참고사항						
비밀여부	공개(V), 대외비(), __ 급비밀		보고서종류	기술보고서		
연구위탁기관				계약 번호		
초록 (15-20 줄내외)	<p>액체금속로의 고온운전환경으로 인해 원자로용기와 내부구조물과 같은 주요 구조물들은 발전소 수명 동안 크립과 크립피로 및 라체팅과 같은 고도의 비선형 거동 손상을 받기 쉽다. 본 연구에서는 등방성 경화와 이동성 경화를 동시에 모사하는 통합형 탄소성 구성식을 장착한 NONSTA-EP 코드와 소성과 크립을 동시에 모사하는 Chaboche 점소성구성식을 장착한 NONSTA-VP 코드를 개발한 바 있고 지속적으로 이를 보완해오고 있다. 2000년도 과제에서는 매 하중 사이클마다 소성변형이 누적되는 라체팅 현상을 좀 더 잘 모사할 수 있도록 Ohno-Wang 모델을 장착한 NONSTA-OW 코드를 개발하였고 본 보고서에서는 이를 중점적으로 전반적인 비탄성 고온구조해석코드에 대한 기술적 내용들을 설명하였다.</p> <p>비탄성 구성식의 특징은 구성식이 복잡한 구조물의 거동을 모사할 수 있도록 많은 수의 재료상수를 갖고 있는데 이들 재료상수들을 적절히 구하는 것이 중요한 과제중의 하나이다. 본 연구에서는 최적기법을 적용하여 이들 재료상수들을 구하는 방법을 개발하고 있고 또한 고온 재료시험을 수행하여 독자적인 데이터를 구축하고 있다. 재료의 이동성 경화를 모사하는 기능을 강화하기 위해 9개의 이동성 경화 내부변수를 포함하는 Ohno-Wang 구성식을 장착한 프로그램을 적용한 예제를 통하여 개발한 프로그램의 성능을 일차적으로 확인하였다. 또한 해의 정확성을 개선하기 위해 새로운 시간증분 조절법을 적용하였는데 이를 Chaboche 점소성모델에 적용하고 환봉시편에 대한 반복 경화해석, 크립해석, 응력이완해석을 수행하여 개선된 프로그램의 적용성을 확인하였다.</p>					
주제명키워드 (10 단어내외)	액체금속로, 비탄성해석, 크립, 라체팅, 비탄성구성식, 고온구조물					

BIBLIOGRAPHIC INFORMATION SHEET					
Performing Org. Report No.		Sponsoring Org. Report No.		Standard Report No.	INIS Subject Code
KAERI/TR-1860/2001					
Title/ Subtitle	A Development Report on the Inelastic Analysis Program for the High Temperature Structures				
Project Manager and Department (Main Author)		Jong-Bum Kim/LMR Mechanical Structure Design Development			
Researcher and Department		H.Y.Lee, J.H.Lee /LMR Mechanical Structure Design Development			
Pub.Place	Taejon, Korea	Publisher	KAERI	Pub.Date	2001.4
Page	42 p.	Fig. & Tab.	Yes(V), No ()	Size	26cm
Note					
Classified	Open(V), Restricted(), ___ Class Document		Report Type	Technical Report	
Sponsoring Org.				Contract No.	
Abstract (15-20 Lines)		<p>LMR high temperature structures such as reactor vessel and reactor internal structures are subject to high temperature operating loads thus they can undergo damage due to creep, creep-fatigue, and ratcheting behavior. In this project, NONSTA-EP program implementing combined isotropic and kinematic hardening behavior and NONSTA-VP program implementing Chaboche model, which is so called viscoplasticity model, have been developed and have been continuously improved. In the year of 2000, NONSTA-OW program implementing Ohno-Wang model which can simulate progressive plasticity (that is ratcheting) more precisely compared to other models.</p> <p>One of the characteristics of inelastic constitutive equations is to have various numbers of material parameters to simulate complex material behaviors realistically and it is very important to obtain these material parameters. In this project, the improved method to obtain these material parameters has been studied with the optimal technique and by conducting material characteristic tests under high temperature conditions. The feasibility of the developed program with Ohno-Wang model, which contains 9 isotropic constitutive equations, has been studied through the example problem. The cyclic hardening problem, stress relaxation problem, and creep problem with center-edge notched specimen were analyzed with Chaboche model which is improved implementing time increment control strategy.</p>			
Subject Keywords (About 10 words)		LMR, Inelastic Analysis, Creep, Ratcheting, Inelastic Constitutive Equation, High Temperature Structure			