

Informes Técnicos Ciemat

1000
Septiembre, 2002



ES0200238

La Radiación Cherenkov en Sistemas No Triviales

Agustín Grau Carles

. . 3 3 / 5 0



MINISTERIO
DE CIENCIA
Y TECNOLOGÍA

Ciemat

Centro de Investigaciones
Energéticas, Medioambientales
y Tecnológicas

La Radiación Cherenkov en Sistemas No Triviales

Agustín Grau Carles

Asociación EURATOM/CIEMAT para Fusión - 81

Departamento de Fusión y Física de Partículas Elementales

Toda correspondencia en relación con este trabajo debe dirigirse al Servicio de Información y Documentación, Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas, Ciudad Universitaria, 28040-MADRID, ESPAÑA.

Las solicitudes de ejemplares deben dirigirse a este mismo Servicio.

Los descriptores se han seleccionado del Thesaurus del DOE para describir las materias que contiene este informe con vistas a su recuperación. La catalogación se ha hecho utilizando el documento DOE/TIC-4602 (Rev. 1) Descriptive Cataloguing On-Line, y la clasificación de acuerdo con el documento DOE/TIC.4584-R7 Subject Categories and Scope publicados por el Office of Scientific and Technical Information del Departamento de Energía de los Estados Unidos.

Se autoriza la reproducción de los resúmenes analíticos que aparecen en esta publicación.

Depósito Legal: M -14226-1995
ISSN: 1135 - 9420
NIPO: 402-02-001-x

CLASIFICACIÓN DOE Y DESCRIPTORES

S70

CHERENKOV RADIATION; DIELECTRIC PROPERTIES; WAVE PROPAGATION; HELICAL WAVEGUIDES; PLASMA; OPTICALLY THIN PLASMA; CRYSTAL

La Radiación Cherenkov en Sistemas No Triviales

Grau Carles, A.

73 pp. 18 figs. 52 refs.

Resumen

La trayectoria descrita por la carga y las propiedades dieléctricas del medio son dos características fundamentales en todo estudio de la radiación emitida por efecto Cherenkov. Se calcula la evolución del frente de ondas para cargas que describen trayectorias circulares o helicoidales. Así mismo, se deducen expresiones para calcular el índice de refracción de diversos medios transparentes (sólido, líquido o gas), prestando especial atención al caso de plasmas ópticamente activos. Estudiaremos las analogías ópticas de los plasmas y los cristales birrefringentes. Finalmente, mencionaremos algunos ejemplos de plasmas emisores de radiación Cherenkov.

The Cherenkov Radiation for Non-Trivial Systems

Grau Carles, A.

73 pp. 18 figs. 52 refs.

Abstract

The charge pathway and the dielectric properties of the médium are two essential aspects to be considered in the study of the emission of Cherenkov radiation. We describe the evolution of the Cherenkov wavefront when the charges follow circular or helical pathways. Also we derive expressions for the refractive Índex in different transparent media (solid, liquid or gas), focusing our attention on optically active plasmas. The optical analogies between the plasma and the birefringent crystals is studied in detail. Finally, we list some examples of plasmas, which can be considered emitters of Cherenkov radiation.

INDICE

1. Introducción	1
2. Generadores naturales de luz Cherenkov	2
3. Comparación de la luz Cherenkov con otros fenómenos de la naturaleza semejantes	6
4. Pérdidas de energía de un electrón de 1 MeV en agua	9
5. La radiación Cherenkov en cargas de cinemática no trivial	11
5.1. Las fórmulas de Lienard-Wiechert generalizadas a medios dieléctricos	11
5.2. Movimiento uniformemente acelerado de cargas en dieléctricos	17
5.2.1. Experimento de Cherenkov	19
5.2.2. Experimento de Collings y Reiling	20
5.3. Movimiento circular con velocidad angular constante	21
5.3.1. Experimento propuesto por Tsytoich	25
6. Distribución angular de frecuencias de la energía radiada por cargas Puntuales con movimientos no triviales	27
6.1. Deducción de la distribución de frecuencia para el caso general	27
6.2. Deducción de la distribución de frecuencias para movimientos circulares	28
6.3. Deducción de la distribución de frecuencias para movimientos Helicoidales	31
7. Detectores Cherenkov	32
7.1. Detectores Cherenkov sin posibilidad de enfoque	33
7.2. Detectores Cherenkov con capacidad de enfoque	33
7.3. Construcción simple de un detector Cherenkov con capacidad de enfoque	35
8. El índice de refracción	
8.1. El índice de refracción de un medio sin cargas libres en el que no existe dispersión de la radiación. Dieléctricos ideales	37
8.2. El índice de refracción de un medio con cargas libres en el que no existe dispersión de las cargas. Conductores y plasmas ideales	38
8.3. El índice de refracción de un medio con cargas libres en el que existe dispersión de las cargas. Conductores y plasmas reales	40
8.4. El índice de refracción de un medio diluido sin cargas libres en el que existe dispersión de la radiación. Dispersión en gases	41
8.5. El índice de refracción de un medio denso sin cargas libres en el que existe dispersión de la radiación. Dispersión en sólidos y líquidos	44
9. La radiación Cherenkov en medios dieléctricos dispersivos	47
10. La radiación Cherenkov en cristales birrefringentes	49
10.1. Radiación Cherenkov emitida por una carga que se mueve en la dirección del eje en un cristal uniaxial	50
10.2. Radiación Cherenkov emitida por una carga que se mueve perpendicular a la dirección del eje en un cristal uniaxial	51
11. La velocidad de la luz	53
11.1. Evolución de un impulso Cherenkov en un medio dispersivo	54
11.2. Frente de ondas y señal	55
12. La radiación Cherenkov en plasmas	56
12.1. Índice de refracción en plasmas en los que la radiación se propaga paralelamente al campo magnético externo	56

12.2. Ecuación general del índice de refracción en plasmas con ángulo arbitrario entre la dirección de propagación de la radiación electromagnética y el campo magnético externo	59
12.3. Emisión de radiación Cherenkov en plasmas	62
13. Algunos plasmas emisores de radiación Cherenkov	63
13.1. La ionosfera	63
13.2. Las manchas solares	63
13.3. Plasmas de fusión	64
13.4. Pulsares	65

La Radiación Cherenkov en Sistemas no Triviales

A. Grau Carles

Laboratorio de Fusión por Confinamiento Magnético, Ciemat.

1. INTRODUCCIÓN

La radiación de tipo luminoso emitida por una carga que se desplaza en un medio a velocidad mayor que la luz en dicho medio se denomina radiación Cherenkov. Estamos acostumbrados a emisores de radiación constituidos por cargas que sufren aceleración, tanto de origen clásico (radiación ciclotrón, de frenado, antenas), como de origen cuántico (radiación del cuerpo negro, transiciones atómicas o nucleares). En este sentido, la radiación Cherenkov no parece encajar dentro de esta clasificación. Su origen no tiene que ver con la aceleración de las cargas. ¿Qué fenómeno misterioso puede hacer que una carga emita radiación por el simple hecho de desplazarse a mayor velocidad que la luz en un medio?

Experimentalmente se observa para cargas que se desplazan en un medio de índice de refracción n la existencia de una velocidad umbral c/n , por encima de la cual, existe emisión de luz Cherenkov. Si la velocidad de la carga no supera c/n , la emisión de luz no se produce. Los primeros en dar una explicación teórica a este fenómeno fueron Frank y Tamm. Lo asombroso es que pudieran hacerlo completamente dentro del contexto del electromagnetismo clásico, es decir, basándose únicamente en las ecuaciones de Maxwell².

Los fenómenos cuánticos son intrínsecamente complicados para cualquier estudiante en sus comienzos. La razón es evidente. La naturaleza de las cosas a nivel cuántico es muy distinta de lo que estamos acostumbrados a observar en nuestro entorno. Por ejemplo, el principio de incertidumbre de Heisenberg, no tiene analogías con ningún otro fenómeno que pueda ofrecernos la Naturaleza. Sin embargo, la radiación Cherenkov, por ser de origen clásico, tiene la ventaja de poder compararse con algo observable en la vida cotidiana.

¹ I. M. Frank y I. M. Tamm Dokl. Akad. Nauk. SSSR 14 (1937) 109.

²En el proceso de emisión de luz Cherenkov se ven implicados entes cuánticos como el fotón y el electrón. La explicación del fenómeno mediante la teoría cuántica considera la interacción de una carga, que se desplaza a velocidades relativistas, con un fotón de luz. Para su desarrollo se emplea la teoría de perturbaciones dentro del contexto de la mecánica cuántica relativista

Como veremos más adelante, la estela producida por un motor fueraborda en un lago o río de aguas tranquilas tiene muchas semejanzas con el frente de ondas de la radiación Cherenkov.

En el presente informe no pretendemos estudiar el formalismo matemático necesario para la deducción de las propiedades de la luz Cherenkov en el caso simple de cargas que se desplazan a velocidad constante siguiendo trayectorias rectilíneas.³ Iremos más allá y estudiaremos particularidades sobre movimientos de cargas en trayectorias de geometría más compleja. Recalcaremos la influencia del índice de refracción del medio sobre la radiación Cherenkov. Finalmente, comprobaremos que esta puede originarse en cualquier medio ópticamente activo, no sólo en sólidos, líquidos o gases; sino también en otros estados de la materia, por ejemplo, plasmas.

2. GENERADORES NATURALES DE LUZ CHERENKOV

Lograr que una carga se desplace en un medio a mayor velocidad que la luz puede parecer algo difícil y complicado. Sin embargo, nada más lejos de la realidad, la Naturaleza lo ha conseguido sin la intervención del hombre y de sus aceleradores de partículas. Curiosamente los emisores de luz Cherenkov están por todas partes: en el suelo que pisamos, en las paredes de nuestras viviendas, incluso dentro de nosotros mismos. ¿Cómo es esto posible?

Sin ánimo de contribuir al pánico que provoca en nuestra Sociedad la palabra radiactividad, diremos que el potasio, un elemento sumamente abundante en la naturaleza y absolutamente necesario en la mayoría de los seres vivos, contiene inevitablemente cierta cantidad del isótopo radiactivo ^{40}K .⁴ La cantidad de átomos radiactivos en cualquier sustancia que contenga potasio no es en absoluto despreciable, en realidad uno de cada 10.000 átomos de potasio es radiactivo. Por dar una idea del número, ¡un solo gramo de una sal tan común como el KNO_3 contiene la increíble cifra de 7×10^{17} átomos radiactivos!

³ Sobre el particular puede consultarse numerosa bibliografía. Ver, por ejemplo, A. Grau Carles y A. Grau Malonda, Aplicación de la radiación Cherenkov a la metrología de radionucleidos, (Ciemat, Madrid, 1996)

⁴ Los iones potasio son absolutamente necesarios para el correcto funcionamiento del sistema nervioso

Puesto que los núcleos de ^{40}K , al desintegrarse espontáneamente, emiten electrones (partículas beta) a una velocidad media de $250.000 \text{ km s}^{-1}$,⁵ disolviendo 3 g de KNO_3 en un vaso con agua,⁶ obtenemos luz Cherenkov de forma natural.⁷ Obviamente, teniendo en cuenta que sólo se desintegran del orden de 30 núcleos de ^{40}K por segundo, la luz emitida es muy tenue, únicamente detectable con aparatos muy específicos, como los tubos fotomultiplicadores.⁸

La posibilidad de conseguir luz Cherenkov de una forma tan simple como la que hemos expuesto con anterioridad hizo que, por supuesto, este tipo de luz no pasara desapercibida a los primeros investigadores de la radiactividad. A principios del siglo XX el matrimonio Curie fue capaz de concentrar químicamente en estado puro una cantidad apreciable del elemento radiactivo ^{226}Ra presente en la naturaleza. El número de desintegraciones espontáneas que sufre el ^{226}Ra es considerablemente mayor que el del ^{40}K . Un solo gramo de ^{226}Ra en el fondo de un tubo de ensayo emite un promedio de $3,7 \times 10^{10}$ partículas α por segundo. Estas partículas alfa emitidas, a pesar de tener una energía cinética considerable, 5 MeV, no son capaces de producir luz Cherenkov en el vidrio. Sin embargo, el ^{226}Ra , al desintegrarse, no pasa a ser un isótopo estable; por el contrario, genera una larga cadena de descendientes radiactivos capaces de poner en movimiento electrones a velocidades cercanas a la de la luz. El matrimonio Curie habla de una luz azulada intensa, visible a simple vista ¿Es esta luz de origen Cherenkov? Evidentemente no. Una estimación rápida⁹ muestra claramente que ni siquiera 1 g de ^{226}Ra es suficiente para producir luz Cherenkov de suficiente intensidad como para ser detectada por el ojo humano. La luz observada por el matrimonio Curie es debida a la luminiscencia del ^{226}Ra , no a la luz Cherenkov, varios órdenes de magnitud menos intensa.

⁵ La energía de emisión de partículas beta sigue la distribución de Fermi, en el caso del ^{40}K entre 0 y 1.3 MeV

⁶ La solubilidad de esta sal es elevada, similar al NaCl

⁷ Teniendo en cuenta que el índice de refracción del agua es 1.3, todas aquellas partículas beta de energía mayor que 264 keV poseen velocidad mayor que $c/1.3$ y por tanto producen luz Cherenkov

⁸ Puesto que únicamente el 80% del espectro de emisión de partículas beta da lugar a partículas beta de energía mayor que 264 keV, de las 30 partículas beta emitidas por segundo por el ^{40}K , sólo 24 son capaces de emitir luz Cherenkov. Teniendo en cuenta que cada partícula beta implicada da lugar a 100 fotones de luz en el visible como máximo, la potencia luminosa de nuestro generador de luz es sólo de $6 \times 10^{-17} \text{ W}$, muy por debajo de las posibilidades del ojo de cualquier ser vivo

⁹ El número de fotones visibles producidos por un electrón de 1 MeV en agua es de aproximadamente 100. Un gramo de radio emite del orden de 10^{10} partículas por segundo. Puesto que la energía correspondiente a un fotón en el visible es 10^{-19} J , la potencia total en forma de luz es 10^{-8} W .

Los primeros en investigar con éxito la luz Cherenkov emitida por líquidos y sólidos transparentes con una fuente de ^{226}Ra fueron los científicos rusos Cherenkov y Vavilov. Para evitar la interferencia con la luminiscencia del ^{226}Ra cubrieron la fuente con un material opaco; consiguiendo, de esta forma, que únicamente la radiación gamma abandonara la fuente de ^{226}Ra . Aunque sólo una pequeña parte de los fotones gamma incidentes sobre la muestra dieléctrica fueron capaces de generar electrones Compton de energía suficiente como para producir luz Cherenkov, fue posible su detección mediante placas fotográficas. Así comprobaron que ciertas de las propiedades de dicha luz eran diferentes a las de la fluorescencia ordinaria. Por un lado, la luz parecía proceder únicamente de la radiación gamma dura, existiendo un umbral por debajo del cual no se emitía luz; por otro, la luz estaba fuertemente polarizada, pero de forma diferente a la obtenida por luminiscencia química. Vavilov entonces sugirió que la causa de la luz podía ser la radiación de frenado de los electrones Compton producidos en la interacción de la radiación gamma con el material. El carácter direccional de la luz pareció confirmar a esta como una parte del espectro de radiación de frenado. Sin embargo, los intentos posteriores de explicar la emisión de luz como parte del espectro de radiación de frenado se toparon con la dificultad de que la intensidad observada era mucho mayor de lo previsto. Fueron los también rusos Frank y Tamm los que consiguieron dar una explicación satisfactoria a cada una de las propiedades de este nuevo tipo de radiación.

Aunque la radiactividad natural fue la auténtica precursora de las primeras investigaciones sobre la luz Cherenkov, debemos decir que existen otros muchos generadores de luz Cherenkov. La mayoría de ellos son producto de la intervención humana, de sus reactores de fisión o aceleradores de partículas. Sin embargo, existe otro generador natural de luz Cherenkov que es interesante señalar: la radiación cósmica.

Sabemos que la Tierra se ve sometida a un bombardeo constante de objetos procedentes del espacio exterior de muy distinta naturaleza: rocas, polvo, partículas y radiación electromagnética. Afortunadamente es poco lo que consigue llegar hasta nosotros. La atmósfera es, sin duda, un escudo muy eficaz contra este tipo de agresiones. Sin embargo, es precisamente como consecuencia de la interacción de la radiación cósmica con la atmósfera, como los científicos han demostrado, en ciertos casos, la presencia de radiación muy energética procedente del espacio exterior.

Imaginemos, que en un momento dado, radiación gamma muy energética procedente de algún objeto del espacio exterior,¹⁰ se encuentra, en su deambular por el espacio, con la Tierra. El primer material con que interacciona es la atmósfera, átomos de distinta naturaleza atraídos por la gravedad de la Tierra. Dada la alta energía de la radiación incidente, en poco tiempo, se crean pares electrón-positrón. Estos últimos, además de emitir radiación de frenado, producirán también luz Cherenkov. La radiación de frenado posee energía suficiente como para generar nuevamente pares electrón-positrón, que a su vez darán lugar a nueva radiación de frenado y luz Cherenkov. El resultado final es una cascada de partículas cargadas y radiación de frenado, que es rápidamente absorbida por la atmósfera, y un destello de luz Cherenkov que consigue llegar a nosotros sin sufrir prácticamente absorción. No debe pues extrañar que los detectores de luz Cherenkov se hayan convertido en un instrumento inestimable para el estudio de todo tipo de partículas de radiación cósmica.

Atendiendo al lugar donde se sitúen los detectores podemos establecer 4 grandes grupos de experimentación: en satélites, atmosféricos, extensos de cascadas y bajo tierra.

Los detectores Cherenkov en satélites tienen la ventaja de evitar la barrera que supone la atmósfera para la radiación cósmica. Sin embargo, para energías $>1\text{GeV}$ se ven limitados por el tamaño, el cual suele ser demasiado pequeño como para contabilizar un número de sucesos estadísticamente significativo.¹¹ Los detectores Cherenkov atmosféricos¹² se sitúan en cimas de montañas, ocupando un área extensa con objeto de captar el mayor número de sucesos posibles. Aprovechan la atmósfera como medio dieléctrico para captar la luz Cherenkov producida por la cascada de partículas en las partes más altas de la atmósfera. Se emplean para estudiar la radiación cósmica dentro del intervalo de energías $100\text{GeV} < E < 1\text{TeV}$. Por lo que respecta a los detectores extensos de cascadas de partículas¹³ ocupan generalmente áreas muy grandes, $>1000\text{ m}^2$, y se destinan al estudio de radiación cósmica de energías $>100\text{TeV}$, cuya cascada es capaz de atravesar la totalidad de la atmósfera. Finalmente, los detectores bajo tierra pretenden filtrar la radiación cósmica

¹⁰ Entre los objetos emisores de radiación electromagnética de alta energía tenemos Cisne X3. J.M. Bonnet-Bidaud y G. Chardin, *Cygnus X-3, A critical review*. Phys. Rep. 170 (1988) 325-414.

¹¹ COS-B <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/cosb/cosb.html> EGRET <http://cossac.gsfc.nasa.gov/cossac/egret/> (Energetic Gamma-Ray Experiment Telescope)

¹² http://www.astropa.unipa.it/Telescopi_Ottici/MMT.html

¹³ <http://ww2.lafayette.edu/~starkm/thesis/detector.html>

capaz de llegar a la superficie terrestre, dejando pasar únicamente aquellas partículas de muy baja probabilidad de interacción: muones y neutrinos.¹⁴

Como vemos la luz Cherenkov está presente en la naturaleza con cierta frecuencia. Cabe ahora preguntarse: puesto que una parte importante de nuestro Universo está constituido por objetos dieléctricos en estado de plasma (las estrellas son un ejemplo), ¿es posible la existencia de emisores intensos de radiación Cherenkov en otras partes del Universo? Como veremos la idea no es nueva en Astrofísica.

3. COMPARACIÓN DE LA LUZ CHERENKOV CON OTROS FENÓMENOS DE LA NATURALEZA SEMEJANTES

La emisión de luz Cherenkov es comparable a cualquier otro fenómeno físico en que se ven implicados generadores de perturbación que se desplazan a mayor velocidad que la perturbación en el medio. Consideremos una barca con el motor fueraborda en marcha que se encuentra en reposo en el centro de un río ancho y de aguas tranquilas. Las hélices del motor perturban el medio circundante agitando el agua de forma similar a como lo haría el campo electrostático de una carga. Cualquier objeto flotante (por ejemplo una boya) cerca de la barca puede emplearse como detector, la agitación del objeto probará la presencia de un campo de energía en torno a la barca. La perturbación producida por las hélices del motor cuando la barca se encuentra en reposo parece, sin embargo, disminuir rápidamente, pasando a ser nula a pocos metros de ésta¹⁵. La energía de la perturbación disminuirá proporcionalmente con la distancia.¹⁶

Supongamos ahora que la barca abandona su estado de reposo anterior y se desplaza a cierta velocidad mayor que la velocidad de propagación de una ola¹⁷. En este caso observamos que la barca deja una estela tras de sí, capaz de alcanzar zonas bastante alejadas sin sufrir apenas atenuación. Aún en ríos bastante anchos, la estela parece alcanzar

¹⁴ <http://hepunix.rl.ac.uk/soudan2/>

¹⁵ Podemos situar boyas a distancias sucesivas de la barca y observar el fenómeno

¹⁶ Al propagarse la perturbación por una superficie, la energía de ésta se 'diluirá' conforme aumente la longitud de la circunferencia $2\pi r$. En cambio, para cargas electrostáticas en el espacio la energía disminuirá con el cuadrado de la distancia, ya que la energía debe distribuirse en toda la superficie esférica $4\pi r^2$.

la orilla con fuerza suficiente. La diferencia fundamental con el caso anterior de reposo es que, al poner la barca en marcha, hemos conseguido que las sucesivas perturbaciones que producen las hélices del motor en lugares distintos del agua formen un frente de ondas común, es decir, se muevan en una única dirección. Dicho de otra manera, se genera un par de olas que se desplazan con ángulos α y $-\alpha$ respecto a la dirección de avance de la barca.

Para estudiar los estados de reposo y movimiento de la barca emplazamos nuestro detector (boya) en un lugar como el que muestra la figura 1, observamos que su comportamiento es radicalmente distinto en cada caso. Con la barca en reposo, el motor producirá una oscilación de la boya de amplitud constante. Por el contrario, con la barca en movimiento, observaremos una alternancia en la que se pasa de reposo a una oscilación de gran amplitud, para acabar finalmente en reposo. Hemos conseguido que una cantidad grande de energía atraviese un determinado punto en un tiempo muy corto (una ola).

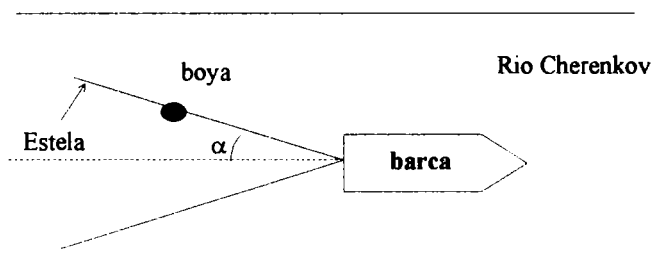


Fig. 1. Estela generada por el movimiento de la barca que se desplaza a mayor velocidad que la de propagación de una ola. En el detector (boya) se observa una oscilación brusca y breve al paso de la ola.

Evidentemente, una vez observado el fenómeno, podríamos hacernos algunas preguntas: ¿Cuál es la condición de aparición de la estela?, ¿De que depende el ángulo de apertura de la estela de la barca?, ¿Qué forma tendría la estela si la barca se moviera en círculos en lugar de en línea recta o si la barca parara bruscamente? No incluiremos las respuestas, dejaremos que el lector intente contestarlas por sí mismo mediante la observación.

¹⁷ Una ola en un río avanza aproximadamente a $\frac{1}{2}$ metro por segundo.

Otro ejemplo interesante de producción de un frente de ondas debido a que la fuente generadora de la perturbación se desplaza a mayor velocidad que la perturbación es la rotura de la barrera del sonido en los aviones supersónicos. Si la velocidad del avión es $v < 300 \text{ ms}^{-1}$, la intensidad del sonido generado por el motor decrece con el cuadrado de la distancia. De esta forma, si el avión vuela a gran altura, el ruido del motor no es audible. Por el contrario, si la velocidad del avión es $v > 300 \text{ ms}^{-1}$ la situación cambia radicalmente, se forma un frente de ondas similar al de la estela de la barca, el cual es capaz de propagarse a grandes distancias sin sufrir apenas atenuación. Por ello, aunque el avión supersónico vuele a gran altura, el motor es audible con gran intensidad (como si estuviera junto a nosotros). Sin embargo, el ruido desaparece al poco tiempo, una vez pasado el frente de ondas.

Cualquier carga en reposo es generadora de una perturbación electrostática cuya intensidad decrece con el cuadrado de la distancia. Sin embargo, si consigue desplazarse a mayor velocidad que dicha perturbación, dará lugar a un frente de ondas similar al de la barca o al del avión supersónico. Tratemos de explicar el experimento de Cherenkov y Vavilov. Veamos que sucede. Los innumerables hijos del ^{226}Ra emiten fotones gamma, los cuales colisionan con los electrones poco ligados de los átomos del vidrio produciendo electrones Compton. Algunos de estos electrones Compton tienen energía suficiente y superan la velocidad de la luz en el vidrio (índice de refracción $n=2,4$). Aunque los electrones Compton son frenados instantáneamente por el material dieléctrico, la luz lo atraviesa fácilmente y llega al detector, en este caso una placa fotográfica. Puede sorprender que la luz Cherenkov adelanta a su auténtico generador, la carga. Por ello invitamos a que el lector observe que ocurre con la estela de una barca cuando esta se detiene bruscamente.

En otro contexto, sabemos que el hecho de frenar bruscamente los electrones en el cristal produce radiación de frenado. Cabe por tanto preguntarse: ¿Acompaña la radiación de frenado a la luz Cherenkov o sigue un camino diferente? ¿son la misma cosa o se diferencian en algo? En el apartado siguiente daremos el bagaje matemático necesario para entender los distintos tipos de radiación que pueden presentarse en el caso de cargas en movimiento dentro de medios materiales. En lugar de las ecuaciones de Maxwell,

emplearemos directamente las conocidas fórmulas de Lienard-Wiechert, las cuales permitirán darnos una idea mucho más intuitiva sobre el fenómeno.

4. PÉRDIDAS DE ENERGÍA DE UN ELECTRÓN DE 1 MeV EN AGUA

Los posibles mecanismos de pérdida de energía de un electrón de 1 MeV en el agua son esencialmente tres. Por un lado, el electrón ioniza y excita los átomos de hidrógeno y oxígeno cercanos a su trayectoria perdiendo energía cinética por ionización. Por otro, el electrón emite radiación al ‘percibir’ el campo eléctrico de los núcleos atómicos del agua (radiación de frenado). Por último, al desplazarse en un dieléctrico transparente a velocidad mayor que la luz, el electrón emite luz Cherenkov. Los tres procesos se han representado esquemáticamente en la figura 2. Por descontado, la pérdida de energía en cada caso es de diferente magnitud.

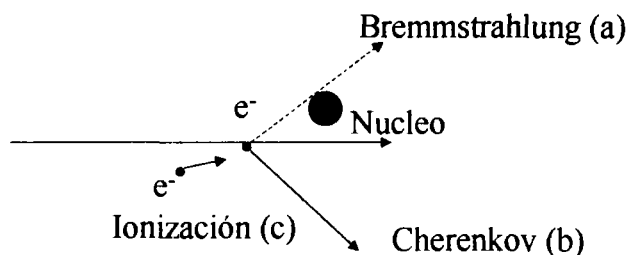


Fig. 2. Algunas de las formas de pérdida de energía del electrón en movimiento: (a) bremsstrahlung o emisión de radiación de frenado al interactuar el electrón con los núcleos atómicos, (b) Cerenkov o emisión de luz al propagarse el electrón en un medio a mayor velocidad que la luz, (c) ionización atómica.

Para comparar las pérdidas por ionización y por radiación de frenado, nos basaremos en las expresiones teóricas de Bethe-Bloch¹⁸ para las pérdidas por ionización y en las de

¹⁸ Ann. Physik, 5, 1930, 325

Bethe-Heiler¹⁹ para la radiación de frenado. De las que se puede obtener la expresión aproximada²⁰

$$\frac{(dE/dx)_{fre}}{(dE/dx)_{ion}} \cong \frac{EZ}{1600mc^2} \quad (1)$$

Puesto que $E=1$ MeV y $Z \cong 2.3$, concluimos que, en el caso que nos ocupa, las pérdidas por ionización son 400 veces mayores que las producidas por radiación de frenado.²¹

Basándose en los resultados de Sternheimer²² y de Allen²³ se tiene que $(dE/dx)_{Cher} / (dE/dx)_{ion} < 10^{-3}$. De donde, comparando ahora este último resultado con (1) se obtiene $(dE/dx)_{Cher} \cong (dE/dx)_{fre}$. Ahora bien, el espectro de emisión de la radiación de frenado se extiende hasta los rayos X, mientras que el de la radiación Cherenkov únicamente al visible y ultravioleta cercano. Por tanto, si se restringe el estudio comparativo a la misma región del espectro visible concluimos que $(dE/dx)_{Cher} / (dE/dx)_{fre} < 10^{-4}$.

Tanto la luz Cherenkov como la radiación de frenado se emiten direccionalmente en el sentido de avance de la partícula. Sin embargo, existe una diferencia fundamental. El ángulo θ de emisión de luz Cherenkov aumenta con la velocidad β de la carga, es decir según $\cos\theta = 1/n\beta$. Por el contrario, el ángulo de máxima intensidad para la emisión de la radiación de frenado en partículas relativistas, disminuye con la velocidad de la carga, es decir, según la función $f(\theta) = \text{sen}^2\theta / (1 - \beta \cos\theta)^6$.²⁴

¹⁹ Proc. Roy. Soc. A146, 1934, 83

²⁰ ed. L. C. L. Yuan, Chien-Shiung Wu, Nuclear Physics, Methods of experimental Physics, Academic Press, New York, 1961

²¹ Obsérvese que para electrones mucho más energéticos, caso de las cascadas electromagnéticas producidas por la radiación cósmica, las pérdidas por radiación de frenado pueden ser mucho mayores que las sufridas por ionización

²² Phys. Rev. 93, 1954, 1434

²³ Phys. Rev. 93, 1954, 353

²⁴ L. Eyges, The Classical Electromagnetic Field, Dover, New York, 1972, p 292

5. LA RADIACIÓN CHERENKOV EN CARGAS DE CINEMÁTICA NO TRIVIAL

5.1. Las fórmulas de Lienard-Wiecher, generalizadas a medios dieléctricos

Las fórmulas de Lienard-Wiechert son una herramienta muy eficaz cuando se desea obtener de forma directa los campos eléctrico y magnético generados por una carga en movimiento. Sin embargo, en la mayoría de los casos, la geometría de la trayectoria de la carga complica de tal forma su resolución, que únicamente se pueden emplear métodos numéricos. En este informe, consideraremos dos geometrías sencillas: movimiento rectilíneo pero de deceleración constante (radiación de frenado) y trayectorias circulares con velocidad constante (radiación sincrotrón). En ambos casos generalizaremos el problema a medios dieléctricos transparentes, analizando en que condiciones se produce la emisión simultánea de luz Cherenkov.

Como veremos a continuación, un estudio completo del fenómeno de emisión de radiación Cherenkov debe considerar tres aspectos fundamentales: la cinemática de la carga, las particularidades del dieléctrico y las características de la carga. La cinemática está relacionada con la aparición de zonas de discontinuidad del campo electromagnético, en las que, para un determinado lapso de tiempo, el campo puede pasar de tener una única contribución retardada a tener dos o más contribuciones. Puesto que todo medio dieléctrico es dispersivo, es decir, el índice de refracción es siempre función de la frecuencia de la radiación, cualquier cálculo de la energía Cherenkov radiada debe tener en cuenta inevitablemente dicha función. Por último, las características de la carga, tanto en tamaño como distribución, juegan un papel muy importante evitando singularidades en el frente de ondas Cherenkov.

Consideremos una carga que se mueve en un medio dieléctrico, transparente e isótropo siguiendo una trayectoria determinada en coordenadas paramétricas $\mathbf{r}(t)$. Deseamos calcular el campo eléctrico y magnético en un punto P cualquiera dentro del dieléctrico. La perturbación producida por la carga en forma de campo eléctrico y magnético se propaga en el dieléctrico a velocidad $u=c/n<c$. Transcurrido un tiempo t , la carga se encuentra en A , y los campos eléctrico y magnético detectados en P tuvieron su origen en cierta posición

retardada sobre la trayectoria $\mathbf{r}(t')$. Denominemos B a dicha posición. Dada la isotropía del medio, la perturbación se propaga siguiendo ondas esféricas. Por tanto, el tiempo necesario para que la onda generada en B alcance P será:

$$t - t' = \frac{R}{u} = \frac{nR}{c}, \quad (2)$$

siendo R la distancia entre los puntos B y P . Si el medio considerado es transparente, los campos eléctrico y magnético no sufren atenuación.

Las fórmulas de Lienard-Wiechert que aparecen frecuentemente en la bibliografía²⁵ suelen considerar únicamente el caso de cargas que se desplazan en el vacío. En el problema que nos ocupa la perturbación se propaga a velocidad $u=c/n$, lo cual da lugar, como veremos, a efectos adicionales. Si repetimos los pasos implicados en la deducción de las fórmulas de Lienard-Wiechert a partir de los potenciales retardados, pero esta vez considerando (2), obtenemos las fórmulas generalizadas siguientes²⁶:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}'' = \frac{\mathbf{q}}{4\pi n^2 \epsilon_0} \left[\frac{\hat{\mathbf{R}} - n\boldsymbol{\beta}}{s^3 R^2} (1 - n^2 \beta^2) + \frac{\hat{\mathbf{R}} \times ((\hat{\mathbf{R}} - n\boldsymbol{\beta}) \times n\dot{\boldsymbol{\beta}})}{cs^3 R} \right], \quad (3a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}'' = n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{\mathbf{R}} \times (\mathbf{E}' + \mathbf{E}''), \quad (3b)$$

siendo $\boldsymbol{\beta} = \dot{\mathbf{r}}(t')/c$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \ddot{\mathbf{r}}(t')/c$ los vectores velocidad y aceleración de la carga en la posición retardada B normalizados a c , mientras que el valor de s en el denominador viene dado por la expresión:

²⁵Consultar, por ejemplo, M. Heald, Classical Electromagnetic Radiation (Academic Press, New York, 1980).

²⁶Las ecuaciones (3a) y (3b) pueden deducirse fácilmente de las del vacío sustituyendo la velocidad de la luz en el vacío c por la del medio u y la permitividad eléctrica del vacío ϵ_0 por la del medio $\epsilon = n^2 \epsilon_0$. La permeabilidad magnética del medio se considera igual a la del vacío. Los factores que relacionan las permitividades y las permeabilidades del medio con las del vacío no son otras que la constante dieléctrica ϵ_r y diamagnética $\mu_r=1$

$$s = |1 - n \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}|. \quad (4)$$

Para resolver las ecuaciones (3a) y (3b) se necesita conocer la evolución temporal del vector \mathbf{R} . Según la figura 3 tenemos que:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}(t'). \quad (5)$$

Sustituyendo ahora (2) en la expresión anterior y calculando producto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$ se obtiene el módulo del vector \mathbf{R}

$$R^2 = r_p^2 + [\mathbf{r}(t - nR/c)]^2 - 2\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}(t - nR/c). \quad (6)$$

Despejar R en la ecuación (5) puede parecer trivial. Sin embargo, excepto en cinemáticas muy sencillas, la estructura de la función $\mathbf{r}(t)$ hace que la ecuación (6) sea únicamente resoluble por métodos numéricos. Sin pretender adelantar acontecimientos diremos que un movimiento de la carga uniformemente acelerado convierte la ecuación (6) en una ecuación polinómica de cuarto orden, mientras que un movimiento circular a velocidad constante la transforma en trascendente.

En la mayoría de tratados sobre la resolución de las fórmulas de Lienard-Wiechert en el vacío se emplea, con el fin de facilitar el estudio de los campos eléctrico y magnético en las proximidades de la carga, un sistema de referencia solidario a la carga. Según la figura 3, la ecuación resultante en dicho sistema de referencia quedaría de la forma

$$R^2 = \rho^2 + [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - nR/c)]^2 - 2\rho \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - nR/c)), \quad (7)$$

la cual es de dificultad similar a (6) en lo referente a despejar R .

Tomar un sistema de referencia solidario a la carga, que se mueve a velocidades relativistas, en lugar del sistema fijo en O , parece requerir un tratamiento especial. Sin embargo, debemos señalar que cualquier tratamiento relativista se refiere siempre a la

cinemática del observador. Por tanto, el uso de relatividad no es necesario si el observador en P se encuentra en reposo o se desplaza a velocidad no relativista.

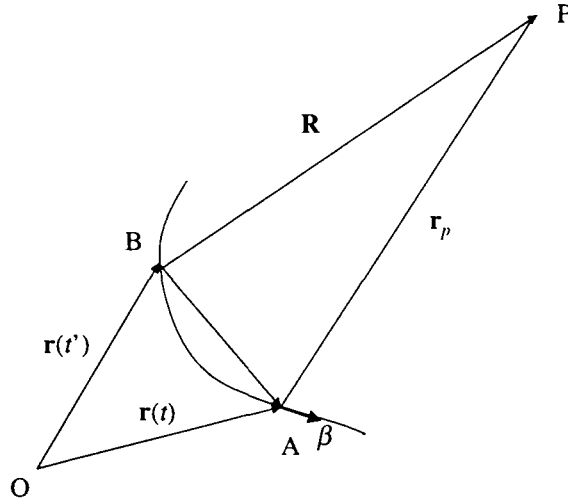


Fig. 3. Determinación del campo eléctrico en P producido por la carga en la posición retardada B

Aunque en la versión de la ecuación (6) para vacío ($n=1$), las soluciones de R reales y positivas (si existen) son siempre únicas; en el caso de dieléctricos ($n>1$), R puede tener más de una solución real y positiva. Es decir, las contribuciones a los campos eléctrico y magnético en dieléctricos pueden provenir de dos o más posiciones retardadas de la carga. Por tanto, las fórmulas de Lienard-Wiechert para dieléctricos, en su forma más general, deben expresarse como:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^m (\mathbf{E}_i' + \mathbf{E}_i'') = \frac{\mathbf{q}}{4\pi n^2 \epsilon_0} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}_i - n\beta_i}{s_i^3 R_i^2} (1 - n^2 \beta_i^2) + \frac{\hat{\mathbf{R}}_i \times ((\hat{\mathbf{R}}_i - n\beta_i) \times n\dot{\beta}_i)}{cs_i^3 R_i} \right], \quad (8a)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^m (\mathbf{H}_i' + \mathbf{H}_i'') = n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_{i=1}^m (\hat{\mathbf{R}}_i \times (\mathbf{E}_i' + \mathbf{E}_i'')), \quad (8b)$$

siendo m el número de soluciones R de la ecuación (5) reales positivas. En el caso de que $m=0$, los campos eléctrico y magnético no han alcanzado todavía P , $\mathbf{E}=\mathbf{H}=0$.

Otro aspecto importante que diferencia las fórmulas de Lienard-Wiechert generalizadas para medios dieléctricos y las del vacío es que, en un determinado lugar geométrico de puntos P , $s=0$. En dichos puntos el campo se hace infinito, indicando que las fórmulas generalizadas no son estrictamente correctas. En el caso particular de emisión de luz Cherenkov en dieléctricos materiales, las posibilidades de un índice de refracción $n>1$ están limitadas al visible y al ultravioleta cercano, es decir, a una franja muy estrecha del espectro. Por tanto, cualquier cálculo de la energía radiada por la carga en forma de radiación Cherenkov debe tener en cuenta que el índice de refracción del medio considerado depende de la frecuencia de la radiación emitida. Este no es el caso de las fórmulas de Lienard-Wiechert, tal y como se expresan en (8). Para hacer los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} dependientes de la frecuencia se calcula la transformada de Fourier. En el caso particular del campo eléctrico tenemos:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} e^{i\omega t} dt, \quad (9)$$

deduciendo el campo eléctrico según el espectro de frecuencias como la transformada inversa

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega. \quad (10)$$

Aunque los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} se hagan infinitos en $s=0$, sabemos que las integrales (9) y (10) no pueden ser infinitas. De lo contrario, la potencia radiada por la carga, o lo que es lo mismo, el flujo del vector de Poynting sería infinito. Frank y Tamm, valiéndose de los potenciales vectores, ya dedujeron que la energía radiada por unidad de longitud por una carga en movimiento rectilíneo es en unidades SI:

$$\frac{dW}{dl} = \frac{q^2 \mu_0}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right) \omega d\omega. \quad (11)$$

Como puede apreciarse, si suponemos que el índice de refracción es $n > 1$ para cualquier frecuencia de la radiación, la energía resultante de integrar (11) es infinita. Por el contrario, si como ocurre en realidad, un índice de refracción $n > 1$ solo es posible en un intervalo de frecuencias (ω_1, ω_2) , la energía radiada por unidad de longitud, suponiendo n constante, es

$$\frac{dW}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right) (\omega^2 - \omega_1^2). \quad (12)$$

Puesto que el comportamiento de los campos es: infinito sobre el frente de ondas ($s=0$), nulo después del frente de ondas, y distinto de cero antes de este; se puede asumir que una función delta y una función escalón modulan la evolución temporal de los campos, de tal forma que:

$$\mathbf{E} = I(t - t_c) \mathbf{E} + \delta(t - t_c) \mathbf{E}. \quad (13a)$$

$$\mathbf{H} = I(t - t_c) \mathbf{H} + \delta(t - t_c) \mathbf{H}. \quad (13b)$$

De esta forma es factible la obtención de transformadas de Fourier finitas integrando (9).

Se puede evitar la singularidad en $t=t_c$ de ondas Cherenkov asumiendo una carga de tamaño finito. Asumiendo una densidad de carga gaussiana, la integración de (11) entre cero e infinito es posible, puesto que la energía radiada por unidad de longitud resulta ser

$$\frac{dW}{dl} = \frac{q^2 \mu_0}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right) \omega e^{-(\omega T_0)^2 / 2} d\omega, \quad (14)$$

donde T_0 es una magnitud relacionada con el tamaño de la carga.

5.2. Movimiento uniformemente acelerado de cargas en dieléctricos

Consideremos el caso particular de cargas, que partiendo del origen O con velocidad inicial $v_0 > c/n$, se desplazan en un dieléctrico a lo largo del eje X sufriendo deceleración uniforme $-a$. En este caso:

$$R = x(t) - x(t') = a(t'^2 - t^2) + v_0(t - t') \quad (15)$$

Según la figura 4, considerando únicamente puntos P en el plano XY , resulta de sustituir (15) en (6)

$$\begin{aligned} R^4 \left(\frac{a n^4}{4 c^4} \right) + R^3 \left[\frac{n^3}{c^3} a (v_0 - at) \right] + R^2 \left[\frac{n^2}{c^2} (v_0 - at)^2 - \frac{n^2}{c^2} a \cos \theta - 1 \right] \\ + R \left[-2\rho (v_0 - at) \frac{n}{2} \cos \theta \right] + \rho^2 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores ρ y $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t')$. Mediante la ecuación (16) calculamos las soluciones retardadas para cualquier punto de coordenadas $P(\rho, \theta)$ en un sistema de coordenadas solidario a la carga. Para un sistema de coordenadas cartesiano con origen en O realizamos los cambios de variable

$$\rho = \left[\left(-\frac{at^2}{2} + v_0 t - x \right)^2 + y^2 \right]^{1/2} \quad (17a)$$

$$\theta = \text{sen}^{-1}(y / \rho) \quad (17b)$$

Como puede apreciarse la ecuación (16) no depende de la posición inicial de la carga $x=0$ ni de la posición final de reposo $x = v_0^2 / 2a$. Puesto que $x(t)$ y $x(t')$ están siempre en la trayectoria de la carga, debe verificarse que $0 < t - nR/c < t < v_0/a$.

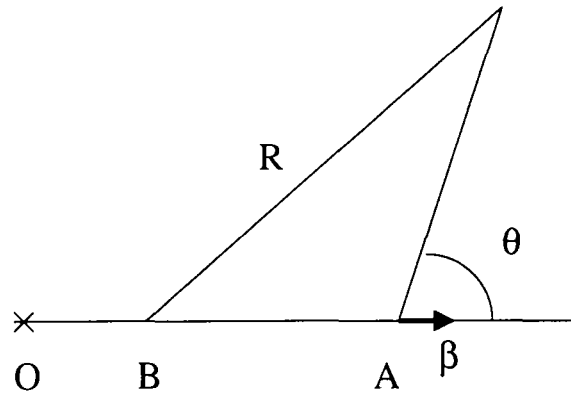


Fig. 4. Determinación del campo eléctrico en cargas que sufren movimiento uniformemente acelerado

Para el estudio de la evolución temporal del frente de ondas son de interés: (i) la posición de la carga en la cual cesa la emisión luz Cherenkov $x = (v_0^2 - c^2/n^2)/2a$; (ii) a pesar de que la carga se detiene, el frente de ondas persiste en su avance, la posición de máximo avance del frente de ondas es coincidente con la carga para $v > c/n$, y sobre el eje X llega a $x = (v_0^2 - c^2/n^2)/2a + c(t - (v_0 - c/n)/2)/n$ para $v < c/n$. En la figura 5 se muestra la evolución del frente de ondas en el caso particular $t=6$, $v_0=0.8c$, $a=0.1$, $n=2$.

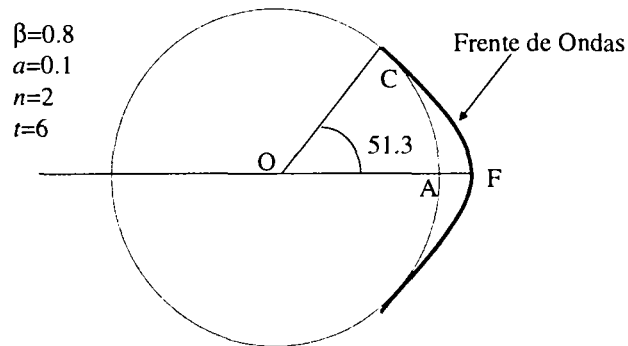


Fig. 5. Frente de onda Cherenkov generado por una partícula con deceleración uniforme

La contribución de la radiación de frenado a la zona del visible del espectro se considera, como vimos anteriormente, despreciable.

5.2.1. Experimento de Cherenkov

En la figura 6 se muestra la disposición experimental empleada por Cherenkov²⁷ para demostrar el carácter direccional de la luz emitida. La radiación gamma procedente de una fuente de ²²⁶Ra penetra en una cubeta con líquido (agua, benceno), dispersando electrones Compton en la dirección de avance de la radiación. Algunos de estos electrones Compton poseen energía suficiente como para producir luz por efecto Cherenkov, la cual después de reflejarse en un espejo en forma de cono invertido incide sobre una placa fotográfica.

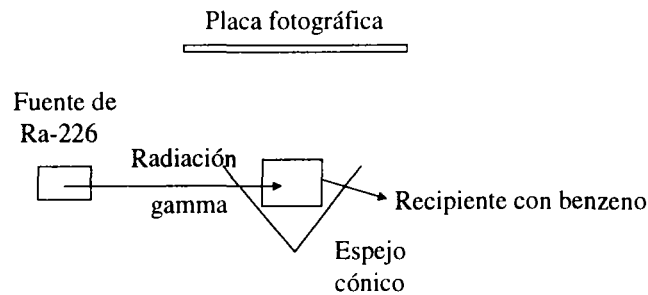


Fig. 6. Esquema del experimento realizado por Cherenkov para comprobar la distribución angular de intensidades de la luz generada al hacer incidir radiación gamma sobre un material dieléctrico transparente

Dada la anchura de la cubeta, los electrones Compton se frenarán completamente en el seno del líquido, ilustrando claramente la emisión de radiación Cherenkov en cargas que sufren deceleración. Puesto que la velocidad de los electrones Compton varía dentro del intervalo $0 \leq v \leq v_0$, el ángulo de emisión de la luz Cherenkov lo hará dentro del intervalo $-\text{sen}^{-1}(c/nv_0) \leq \theta \leq \text{sen}^{-1}(c/nv_0)$. Evidentemente, la intensidad de luz irá decreciendo conforme disminuye el valor absoluto de θ , ya que también lo hace la velocidad de los electrones Compton dispersados.

²⁷Letters to the Editor. Visible Radiation Produced by Electrons Moving in a Medium with Velocities Exceeding that of Light. Physical Review, 52 (1937) 378.

5.2.2. Experimento de Collings y Reiling

En 1938, poco tiempo después del experimento llevado a cabo por Cherenkov, G. B. Collins y V. C. Reiling realizaron un experimento similar haciendo incidir electrones procedentes de un generador electrostático sobre placas delgadas de distintos materiales (figura 7). Las placas fotográficas resultantes para películas de agua de dos espesores diferentes (1 y 0.3 mm), vidrio (0.06 mm), mica (0.02 mm) y celofán (0.02 mm) se muestran también en la figura 8. A diferencia del experimento de Cherenkov, para muestras suficientemente delgadas, los electrones no tienen por qué frenarse completamente. Puede ocurrir que una vez atravesada la lámina, su velocidad sea mayor que la del valor umbral de emisión de luz Cherenkov. En ese caso, la luz se emite para ángulos θ dentro del intervalo $\text{sen}^{-1}(c/nv_0) - \delta \leq |\theta| \leq \text{sen}^{-1}(c/nv_0) + \delta$, siendo δ un valor que tiene que ver con el espesor de la lámina y con el poder de frenado (dE/dx) del material con que está construida. Obviamente, para un mismo material, δ crecerá con el espesor de la lámina, de acuerdo con lo observado en las láminas ‘thick water film’ y ‘thin water film’.

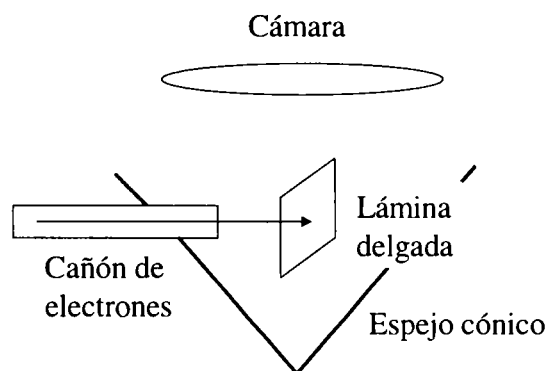


Fig. 7. Esquema de la disposición experimental empleada por Collings y Reiling para estudiar el efecto Cherenkov en distintos materiales

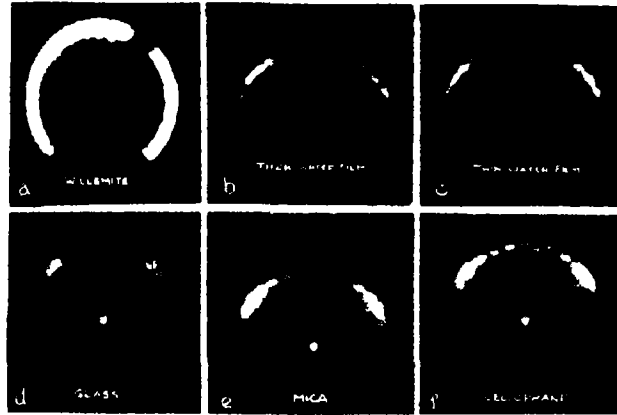


Fig. 8. Fotografías obtenidas por Collings y Reiling en sus experimentos. La primera de las fotos (a) corresponde a un material fluorescente (willemite), para el cual se observa una distribución angular uniforme e isotrópica.

5.3. Movimiento circular con velocidad angular constante

Supongamos que una carga se mueve en un dieléctrico a velocidad angular constante siguiendo una trayectoria circular de radio a . Por un lado, para conseguir una trayectoria de la carga circular es preciso aplicar un campo magnético externo H_0 . Por otro lado, para evitar que la carga acabe deteniéndose como consecuencia de las pérdidas de energía por emisión de radiación y por la ionización del medio, es necesario suministrarle energía suplementaria mediante un campo eléctrico. Según la figura 9, resulta la ecuación trascendente:

$$R^2 = 4a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\beta R}{2a} + \rho^2 - 4\rho a \operatorname{sen} \frac{n\beta R}{2a} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\beta R}{2a} - \theta\right). \quad (18)$$

Después de que la carga efectúe sucesivas vueltas, los campos eléctrico y magnético producidos por la carga en movimiento llenarán todo el espacio. En la figura 10 se ha representado para $a=1$, $\beta=0.8$ y $n=1.5$ la disposición de las zonas de discontinuidad en las

que, para un instante dado, coexisten 2 frentes de onda de forma espiral. Los frentes de onda separan las soluciones triples de R de las soluciones únicas.

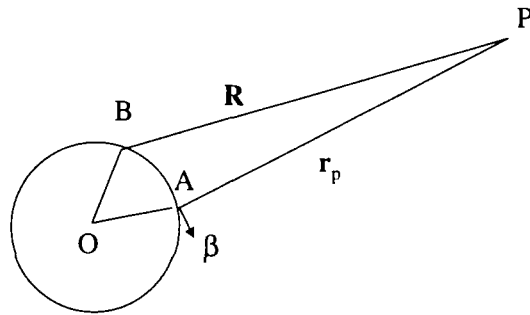


Fig.9. Deducción del campo eléctrico generado por una carga con movimiento circular

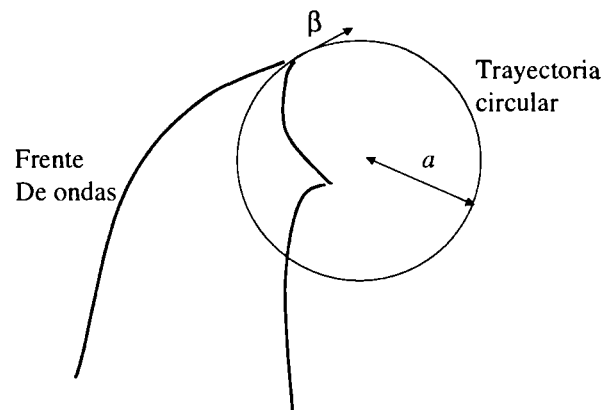


Fig.10. Frentes de onda Cherenkov originados por el movimiento circular de una carga en un dieléctrico

Al contrario de lo que ocurre con la radiación de frenado, la distribución de frecuencias de la radiación ciclotrón es un pico centrado en torno a la frecuencia ciclotrón $\omega_c = a/v = eH_0/m$. Si deseamos que el pico de la radiación ciclotrón se encuentre, por ejemplo, en la zona del visible, debemos conseguir que la carga efectúe 10^{15} vueltas

completas por segundo. Puesto que la velocidad de la carga v no puede ser mayor que la velocidad de la luz en el vacío c , el radio $a < 1 \mu\text{m}$. Por otro lado, el campo magnético externo H_0 necesario en el caso de que la carga sea un electrón sería de $5 \times 10^3 \text{ T}$, bastante lejos de nuestras posibilidades.²⁸

En realidad, cuando asumimos un pico estrecho para la distribución de frecuencias de la radiación ciclotrón consideramos únicamente velocidades no relativistas. Conforme la velocidad de la carga se aproxima a la velocidad de la luz, el pico característico del espectro de frecuencias se ensancha y cambia de posición. Para el vacío, la energía de la radiación sincrotrón²⁹ emitida por unidad de ángulo sólido viene dada por³⁰

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{cq^2\beta^4}{16\pi^2\epsilon_0 a^2(1-\beta^2\text{sen}^2\vartheta)^{7/2}} \left[1 + \cos^2\vartheta - \frac{\beta^2}{4}(1+3\beta^2)\text{sen}^4\vartheta \right]. \quad (18)$$

En la figura 11 vemos que la radiación se hace direccional, casi tangencial a la trayectoria, para velocidades relativistas. Esta direccionalidad de la radiación sincrotrón conduce inevitablemente a un frente de ondas de similares características al de la radiación Cherenkov. A cierta distancia, un detector se activará apreciablemente únicamente durante un lapso muy corto de tiempo. Es decir, conforme la velocidad de la carga se aproxima a la velocidad de la luz en el vacío, los impulsos detectados serán más breves e intensos. De la transformada de Fourier del campo (9) deducimos que, cuanto más breve sea el impulso, más ancho será el espectro de frecuencias.

El radio de los aceleradores sincrotrón es en general del orden de metros, por lo que la frecuencia ciclotrón se sitúa en torno a 10^8 s^{-1} . Sin embargo, esto no quiere decir que no pueda emitirse radiación de mayor frecuencia (infrarrojo, visible e incluso rayos X). El espectro de frecuencias, además de ensancharse también se desplaza, quedando su centro en torno a la denominada frecuencia crítica $\omega_c = 3\beta c / 2a(1-\beta^2)^{3/2}$.³¹ Así pues, para que el

²⁸ Los mayores campos magnéticos obtenidos por el hombre son del orden de 10^2 T

²⁹ Obsérvese que hemos sustituido el término ciclotrón por sincrotrón para dejar constancia de que la carga se mueve a velocidades relativistas

³⁰ L. Eyges, *The Classical Electromagnetic Field*, Dover, 1972, New York, p.295

³¹ CERN Accelerator School, *Fifth General Accelerator Physics Course* (Ed. S. Turner) Vol I. (CERN, Ginebra 1994) p. 446.

centro del pico de frecuencias alcance la zona del visible en un acelerador sincrotrón de electrones de 1m de radio, β debe ser 0.999975 ($\cong 70$ MeV). Por otro lado, la potencia radiada depende de la energía suministrada a la carga. Cuanto más se aproxime la velocidad de la carga a la velocidad de la luz en el vacío, mayores serán las pérdidas de energía de la carga en forma de radiación sincrotrón.

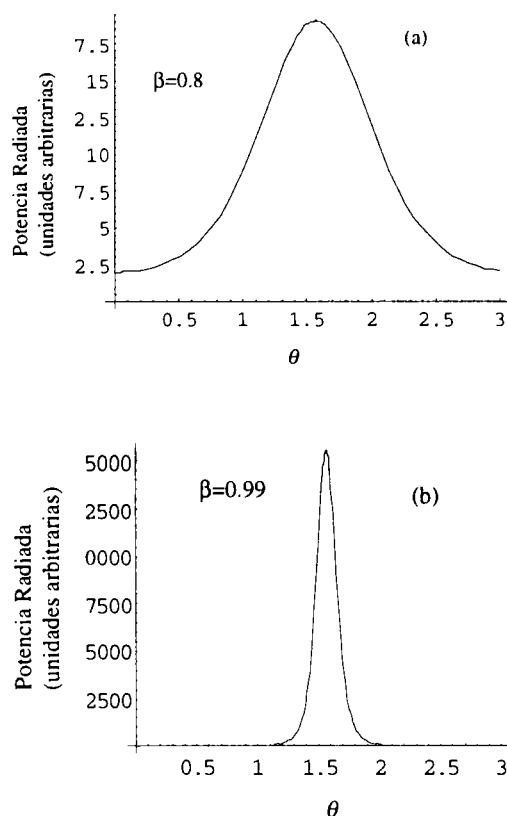


Fig.11. Distribución angular de la radiación sincrotrón para $\beta=0.8$ y 0.99

En aceleradores como el LEP³² del CERN se pretende ante todo que la energía suministrada a las cargas se convierta lo más eficientemente posible en energía cinética. Para disminuir en lo posible las pérdidas por radiación sincrotrón, las trayectorias circulares efectuadas por las cargas deben tener un radio lo más grande posible (del orden de kilómetros en el caso del LEP). De esta forma el centro del pico del espectro de frecuencias

se encuentra desplazado hacia la zona de bajas energías, con lo que se consigue disminuir las pérdidas por radiación sincrotrón.

5.3.1 Experimento propuesto por Tsytovich

El estudio experimental la radiación luminosa Cherenkov y sincrotrón emitida por electrones que describen una trayectoria circular en un dieléctrico es factible. En 1951 Tsytovich³³ propuso un experimento en el que un haz de electrones de 70 MeV se inyectaban en una cámara llena de helio a 1 atm en un campo magnético externo $H_0=0.8$ T. En estas condiciones se podría conseguir que la frecuencia crítica de la radiación sincrotrón coincidiera con el visible, y de esta forma comprobar el efecto conjunto de las radiaciones Cherenkov y sincrotrón. Desgraciadamente el experimento nunca llegó a realizarse.

Tanto Tsytovich como posteriormente Schwinger³⁴ han insistido en la imposibilidad de separar los fenómenos de emisión de radiación Cherenkov y sincrotrón. Ambos tipos de radiación actúan de forma sinérgica, haciendo que la acción conjunta de ambos efectos tenga unas propiedades muy distintas a su contribución por separado.

La expresión aportada por Tsytovich para la potencia radiada a frecuencias mayores que la crítica ω_c cuando $n\beta > 1$ es la siguiente:

$$Wd\omega = \frac{3q^2\beta^3c}{8\pi\epsilon_0an^2\beta^2\sqrt{n^2\beta^2-1}} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[1 + \sqrt{\frac{2\omega_c}{3\pi\omega}} \cos\left(\frac{\omega}{\omega_c} + \frac{\pi}{4}\right)\right] d\omega \quad (19)$$

En la figura 12 puede apreciarse la distribución en frecuencias de la energía radiada. El término multiplicativo entre corchetes hace que la potencia radiada oscile cada vez con mayor amplitud, aunque siempre siguiendo el comportamiento lineal de la radiación Cherenkov, que como sabemos es de la forma $Wd\omega = A\omega d\omega$. La frecuencia de oscilación resulta ser la frecuencia crítica de la radiación sincrotrón ω_c .

³² <http://www.cern.ch/>

³³ V.N.Tsytovich, Vestnik MGU, No.11, 27. 1951.

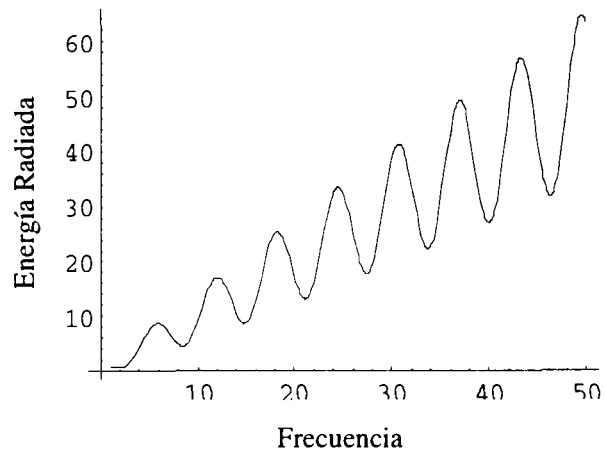


Fig. 12. Distribución de frecuencias de la energía radiada

³⁴ J. Schwinger y Wu-Yang Tsai, Classical and Quantum Theory of Synergic Synchrotron-Cerenkov Radiation, *Annals of Phys.* 96 (1976) 303-332.

6. DISTRIBUCIÓN ANGULAR DE FRECUENCIAS DE LA ENERGÍA RADIADA POR CARGAS PUNTALES CON MOVIMIENTOS NO TRIVIALES

6.1. Deducción de la distribución de frecuencia para el caso general

Tanto en el la radiación de frenado como en la radiación ciclotrón hemos estudiado la dependencia angular $dW/d\Omega$ de la energía radiada. Es necesario, no obstante, comprender mejor como se comporta el espectro de frecuencias inherente a dicha radiación. Partimos de la base de que la energía recibida por unidad de ángulo sólido en la dirección del vector \mathbf{n} y a distancia r de la carga es:

$$\frac{dW}{d\Omega} = r^2 \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dt = \frac{r^2}{\mu_0 c} \int |\mathbf{E}_r|^2 dt \quad (20)$$

Valiéndose de la transformada de Fourier \mathbf{E}_ω de \mathbf{E}_r según la ecuación (8) tenemos que:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{r^2}{\mu_0 c} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{i\omega t} d\omega \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega \right) \quad (21)$$

De donde, teniendo en cuenta que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt = 2\pi\delta(\omega-\omega')$ llegamos a

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{2\pi r^2}{\mu_0 c} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega \quad (22)$$

Puesto que $|\mathbf{E}_\omega|^2 = |\mathbf{E}_{-\omega}|^2$ podemos integrar únicamente para valores positivos de la frecuencia y multiplicar el resultado por dos.

Añadiendo ahora el segundo término de Lienard-Wiechert para el campo eléctrico a grandes distancias $R \cong r$ y calculando la transformada inversa

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times \left[(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right]}{s^3} e^{i\omega t} dt \right)^2 \quad (23)$$

Como

$$\frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta})}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right] \quad (24)$$

Integrando por partes (23), se obtiene después de hacer el cambio de variable $t = t' - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} / c$

$$\frac{d^2 W'}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{R}} \times [\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}] e^{i\omega(t' - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}'/c)} dt' \right)^2 \quad (25)$$

6.2. Deducción de la distribución de frecuencias para movimientos circulares

En el caso de que el movimiento de la carga sea periódico, la energía emitida (20) suele promediarse a un solo período. Es decir,

$$\frac{d\bar{W}}{d\Omega} = \frac{r^2}{\mu_0 c} \int_0^T |\mathbf{E}_r|^2 dt \quad (26)$$

Para expresar el campo eléctrico puede recurrirse a una representación en serie de Fourier que incluya funciones ortogonales $\exp[i l \omega_0 t]$ con frecuencias múltiplo de la frecuencia de giro de la carga $\omega_0 = 2\pi / T$.

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_l(r) e^{i l \omega_0 t} \quad (27)$$

Sustituyendo el desarrollo en serie de Fourier (27) en la ecuación (26) y repitiendo los pasos empleados para deducir (25) obtenemos para un punto suficientemente alejado de la órbita $r \cong R$

$$\frac{d^2 W}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega_0^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \sum_{l=0}^{\infty} l^2 \left(\int_0^{2\pi/\omega_0} \hat{\mathbf{R}} \times [\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}] e^{i\omega_0 l(t - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}'/c)} dt \right)^2 \quad (28)$$

Para puntos muy distantes de la órbita, el vector $\hat{\mathbf{R}}$ es prácticamente constante e independiente del tiempo. En ese caso, podemos suponer que

$$[\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}(t))] [\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}(t'))] = (\boldsymbol{\beta}(t) \times \hat{\mathbf{R}}) (\boldsymbol{\beta}(t') \times \hat{\mathbf{R}}) \quad (29)$$

La expresión (28) queda de la forma

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega_0^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \sum_{l=0}^{\infty} l^2 \left(\int_0^{2\pi/\omega_0} \boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{R}} e^{i\omega_0 l(t - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}/c)} dt \right)^2 \quad (30)$$

Suponiendo que la órbita circular de radio a se encuentra sobre el plano XY , tenemos que

$$\mathbf{r}(t) = a(\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t) \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \frac{\omega_0 a}{c} (-\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t) \quad (32)$$

Para un punto P suficientemente alejado de la órbita, el vector $\hat{\mathbf{R}}$

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta \quad (33)$$

Puesto que $\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{R}}$ es perpendicular al vector $\hat{\mathbf{R}}$ podemos considerar las dos componentes ortogonales

$$(\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{R}})_\theta = \frac{\omega_0 a}{c} \cos \omega_0 t \quad (34a)$$

$$(\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{R}})_\varphi = \frac{\omega_0 a}{c} \cos \theta \sin \omega_0 t \quad (34b)$$

correspondientes a los vectores unitarios en coordenadas esféricas \mathbf{u}_θ y \mathbf{u}_φ . De esta forma, la energía media emitida para cada período y por unidad de ángulo sólido es según (30)

$$\frac{d\bar{W}}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega_0^4}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \sum_{l=0}^{\infty} l^2 (\Gamma_\theta^2 + \Gamma_\varphi^2) \quad (35)$$

donde

$$\Gamma_{\theta} = \frac{a}{c} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \exp[i l (\alpha - \beta \operatorname{sen} \theta \cos \alpha)] d\alpha \quad (36a)$$

$$\Gamma_{\varphi} = \frac{a \cos \theta}{c} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \alpha \exp[i l (\alpha - \beta \operatorname{sen} \theta \cos \alpha)] d\alpha \quad (36b)$$

Las integrales (36a) y (36b) pueden expresarse en términos de funciones Bessel, de donde resulta finalmente:

$$\frac{d\bar{W}}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega_0^4 a^2}{16\pi^3 c^3 \epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} l^2 \left[(J_l(l\beta \operatorname{sen} \theta))^2 + \frac{\cot^2 \theta}{\beta^2} (J_l(l\beta \operatorname{sen} \theta))^2 \right] \quad (37)$$

En el caso de aceleradores ciclotrón, lo común es situar los detectores de radiación en el mismo plano que la órbita. Para $\theta = \pi/2$ la ecuación (36) se simplifica quedando

$$\frac{d\bar{W}}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega_0^4 a^2}{16\pi^3 c^3 \epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} l^2 [(J_l(l\beta))^2] \quad (38)$$

Puesto que los dos términos entre corchetes de la expresión (37) provienen de las componentes θ y φ del campo eléctrico en coordenadas esféricas. Cada uno de estos términos indicará el grado de polarización de la luz en los planos vertical y horizontal. Cuando los detectores se encuentran en el mismo plano que la órbita, la radiación detectada será linealmente polarizada en el plano horizontal, como indica (38).

Si el giro de la carga es consecuencia de un campo magnético externo B_0 , la frecuencia de giro coincide, en el caso de cargas no relativistas, con la frecuencia ciclotrón $\omega_0 = qB_0/m$. Es interesante observar que la potencia radiada es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la masa en reposo de la carga. Así, para la misma energía y campo magnético externo, los electrones radian 10^{13} más energía por unidad de tiempo que los protones.

En cargas que se desplazan a velocidades relativistas debe tenerse en cuenta el incremento de la masa en un factor $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Es decir, la frecuencia de giro de la carga queda como $\omega_0 = qB_0 / \gamma m$.

6.3. Deducción de la distribución de frecuencias para movimientos helicoidales

Consideremos una carga que se desplaza siguiendo un movimiento helicoidal según el eje Z, con proyección circular de la órbita sobre el plano XY. En ese caso

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_z \hat{\mathbf{z}} + \beta_\varphi (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t) \quad (39)$$

de donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\boldsymbol{\beta}}) \exp i \omega (t - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r} / c) = & \left[\hat{\mathbf{x}} (\beta_z \cos \theta \sin \theta - \beta_\varphi \cos^2 \theta \cos \omega_0 t) \right. \\ & \left. - \hat{\mathbf{y}} \beta_\varphi \sin \omega_0 t + z (-\beta_z \sin^2 \theta + \beta_\varphi \sin \theta \cos \theta \cos \omega_0 t) \right] \\ & \times \exp i \omega (t - \beta_\varphi \sin \theta \sin \omega_0 t / \omega_0 - \beta_z t \cos \theta) \end{aligned} \quad (40)$$

Después de algo de cálculo se puede obtener la distribución de potencia

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} = & \frac{q^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\cos \theta - \beta_z}{\sin \theta} \right)^2 J_m^2(\xi) + \beta_\varphi^2 J_m'^2(\xi) \right] \\ & \times \frac{\delta[(1 - \beta_z \cos \theta)\omega - m\omega_0]}{1 - \beta_z \cos \theta} \end{aligned} \quad (41)$$

siendo

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_0} \beta_z \sin \theta \quad (42)$$

Obsérvese como, en el movimiento helicoidal, la serie de armónicos discretos es $\omega_m = m\omega_0 / (1 - \beta_z \cos\theta)$, en lugar de $\omega_m = m\omega_0$ del movimiento circular.

7. DETECTORES CHERENKOV

Los detectores Cherenkov han jugado, y siguen jugando, un papel esencial en la detección de partículas dentro de un amplio rango de energías. Las posibles ventajas de este tipo de detectores frente a otro tipo de detectores tienen que ver con la forma tan singular con la que se emite este tipo de luz. Teniendo en cuenta que la energía de N fotones es $W = \hbar\omega N$, podemos obtener de (11), el número total de fotones emitidos por una carga q , que se desplaza a velocidad β en un medio dieléctrico de índice de refracción n

$$\frac{d^2N}{d\ell d\omega} = \frac{q^2 \mu_0}{4\pi\hbar} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2} \right) \quad n\beta > 1 \quad (43)$$

La expresión anterior lleva implícita una característica importante y exclusiva de la radiación Cherenkov: la existencia de un umbral para la emisión de luz. Como sólo se produce luz si se verifica que $n\beta > 1$, un detector Cherenkov puede discriminar de forma natural partículas de energía por debajo de un determinado umbral.

Otra característica aprovechable por los detectores Cherenkov es la forma direccional en que se emite la luz. Puesto ésta sigue una superficie cónica con generatriz de ángulo $\theta = \cos^{-1}(1/n\beta)$, es posible, con ayuda de un sistema de enfoque, conocer la energía de la partícula que deseamos estudiar.

Aquellos detectores Cherenkov que emplean exclusivamente la condición $n\beta > 1$ para discriminar partículas se denominan *detectores Cherenkov sin posibilidad de enfoque*. Por otro lado, los que se basan en la condición angular de emisión de luz se conocen como *detectores Cherenkov con posibilidad de enfoque*.³⁴

³⁴actualmente, Ring Image Cherenkov detectors, RICH

7.1. Detectores Cherenkov sin posibilidad de enfoque

Uno de los primeros detectores Cherenkov sin capacidad de enfoque fue construido por Jelley en 1951 para medir radiación cósmica.³⁵ Consistía de un depósito de paredes reflectantes lleno de agua al que unió un tubo fotomultiplicador. Belcher³⁶ en 1953 empleó un fotomultiplicador refrigerado por nitrógeno líquido para determinar la intensidad de radiación Cherenkov en disoluciones acuosas de distintos radionucleidos beta como: ^{60}Co , ^{131}I o ^{32}P . Los diseños posteriores de Lindenbaum y col.³⁷ contaban ya con 2 fotomultiplicadores en coincidencia con lo que se reducía considerablemente el problema de la emisión termiónica de los tubos fotomultiplicadores.

En 1957 se emplearon detectores de este tipo en la identificación de mesones K^+ en colisiones protón-protón del Cosmotrón de Brookhaven.³⁷ En una primera fase se seleccionaron las partículas según su momento mediante un campo magnético. Posteriormente, varios detectores Cherenkov se utilizaron a modo de espectrómetro de masas permitiendo únicamente detectar las partículas con velocidades dentro de un intervalo $\beta_1 < \beta < \beta_2$. Para acotar el límite inferior del intervalo se exigía coincidencia con los detectores Cherenkov de umbral β_1 , mientras que para conseguir el límite superior exigía anticoincidencia con los detectores de umbral β_2 .

6.2. Detectores Cherenkov con capacidad de enfoque (RICH)

El sistema de enfoque consiste generalmente de espejos y lentes que concentran la luz Cherenkov emitida en un determinado ángulo. La luz generada al incidir el haz de partículas sobre un dieléctrico transparente denominado emisor se selecciona para un determinado ángulo y, tras sucesivas reflexiones, se hace incidir sobre un dispositivo de dos o más tubos fotomultiplicadores en coincidencia. La figura 13 muestra esquemáticamente dos detectores de este tipo.

³⁵ J. V. Jelley, Proc. Phys. Soc. A64 (1951) 82.

³⁶ E. H. Belcher, Proc. Royal Soc. A216 (1950) 90.

³⁷ S. J. Lindenbaum y L. C. L. Yuan, Phys. Rev. 105 (1957) 1931.

En 1955 Chamberlain y col.³⁸ emplearon en Berkeley un detector Cherenkov con capacidad de enfoque similar al de la figura 13 para descubrir el antiprotón por primera vez distinguiéndolo de los piones negativos.

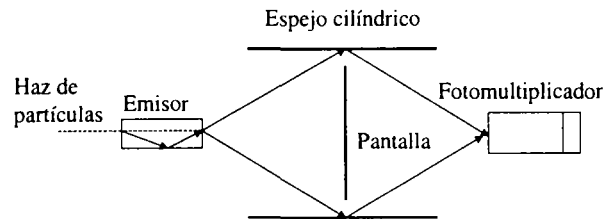


Fig. 13. Esquema de las componentes esenciales de un detector con capacidad de enfoque

La figura 14 muestra el detector RICH de espejo esférico empleado por von Dardel y col. en el CERN Para separar antiprotones de mesones K^- y π^- . Este detector empleaba gas etileno como emisor dieléctrico. La denominación RICH tiene que ver con la imagen al final de sistema óptico, que generalmente tiene forma de anillo.

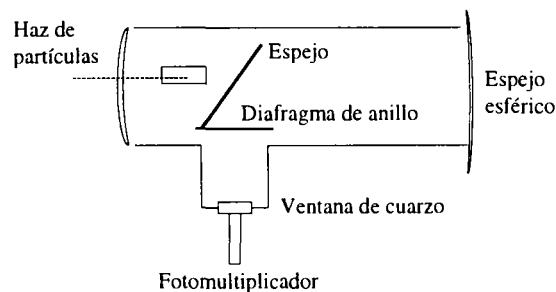


Fig. 14. Esquema del detector RICH empleado por Dardel en el CERN para la detección de antiprotones

Uno de los problemas más importantes a resolver en los detectores RICH es conseguir una buena resolución, o lo que es lo mismo, valores altos de $\partial\theta/\partial\beta$

³⁸ O. Chamberlain, E. Segre, C. Wiegand y T. Ypsilantis, Phys. Rev. 100 (1955) 947.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{1}{n^2 \beta^2 \sin \theta}. \quad (44)$$

Puesto que para partículas relativistas $\beta \rightarrow 1$ y $n \cong 1$, el ángulo θ debe ser pequeño si deseamos obtener buena resolución. Por otra parte, θ debe ser lo suficientemente grande como para que se genere una cantidad suficiente de fotones. Los gases a presión variable son los más adecuados a este fin, ya que proporcionan ángulos pequeños de apertura del cono Cherenkov.

7.3. Construcción simple de un detector Cherenkov con capacidad de enfoque

Recientemente Porter y col.³⁹ han publicado la construcción de un detector Cherenkov con capacidad de enfoque en un artículo de la revista *American Journal of Physics*, el cual dada su sencillez, merece la pena tratar. En esencia el sistema de detección consiste de una barra acrílica conectada a un fotomultiplicador. La barra puede orientarse con distintos ángulos respecto a un haz de partículas beta procedente de una fuente de ^{106}Ru . La ventaja de este sistema es que aprovecha el ángulo de reflexión interna total del acrílico ($42,2^\circ$) como discriminador. De esta forma, no llega luz al tubo fotomultiplicador cuando el ángulo de apertura del cono Cherenkov es menor que el ángulo de reflexión interna.

La figura 15 muestra el diagrama de los componentes electrónicos del detector. En él se puede apreciar, aparte del tubo fotomultiplicador conectado a la barra de acrílico, otros dos tubos fotomultiplicadores en coincidencia. Los 3 tubos activan una puerta electrónica cuando simultáneamente el haz de partículas incidente produce luz en el material centelleador y la luz Cherenkov en el acrílico llega por reflexión interna total al tubo fotomultiplicador.

³⁹ B. Porter, P. Auchincloss, P. de Barbaro, A. Bodek y H. Budd. A study of an acrylic Cherenkov radiation detector, *Am. J. Phys.* 67 (1999) 1022.

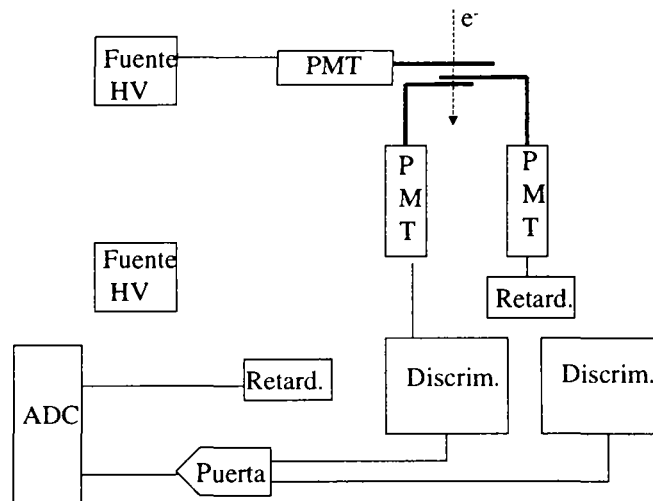


Fig. 15. Esquema del detector Cherenkov de acrílico diseñado por Porter et al. (PMT tubo fotomultiplicador, HV alta tensión, ADC convertidor analógico digital)

8. EL ÍNDICE DE REFRACCIÓN

Puesto que la velocidad de la carga nunca puede ser mayor que la velocidad de la luz en el vacío, el índice de refracción debe ser siempre mayor que la unidad para que se produzca emisión de luz Cherenkov. Sabemos que la condición $n > 1$ se cumple para la totalidad de los materiales transparentes, ya sean sólidos líquidos o gases. En general, para longitudes de onda en el rango del visible, puede afirmarse que en los gases $1 < n < 1,2$, en los líquidos $1,2 < n < 1,5$ y en los sólidos $1,5 < n < 2,5$. En consecuencia, el índice de refracción parece ser mayor cuanto más compacto sea el medio. En realidad, el índice de refracción tiene que ver con la capacidad del medio de polarizarse como consecuencia de la acción un campo electromagnético. Por tanto, cuanto mayor sea la concentración de entes susceptibles de sufrir polarización, mayor será el índice de refracción del medio.

No obstante, debemos distinguir entre materiales con cargas libres (conductores o plasmas), materiales sin cargas libres, pero donde la polarización del medio afecta al campo

eléctrico (sólidos y líquidos), y materiales en los que no existen cargas libres y donde la polarización del medio no afecta al campo eléctrico (gases).

8.1. El índice de refracción de un medio sin cargas libres ($\rho=0$) en el que no existe dispersión de la radiación. Dieléctricos ideales.

El material aislante de separación entre las placas de un condensador tiene como misión evitar que la carga fluya de una placa a la otra. En caso de que el material de separación fuera el vacío, cualquier carga q en el interior del condensador sería atraída hacia una de las placas por una fuerza $F = qE = qV/d$. Si el material entre las placas fuera un dieléctrico, y colocáramos la carga en un hueco dentro del dieléctrico, la fuerza que actuaría sobre la carga sería $F = qE/\epsilon_r = qV/\epsilon_r d$, donde ϵ_r es la constante dieléctrica del medio. Dicho de otra forma, el campo eléctrico total en el centro del condensador disminuiría como consecuencia de la polarización del medio.

En un medio dieléctrico sin cargas libres o corrientes, las ecuaciones de Maxwell son de la forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (45a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (45b)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (45c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (45d)$$

en donde el vector desplazamiento $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$ e inducción magnética $\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$ incluyen las cargas y corrientes inducidas en el dieléctrico como consecuencia de la variación temporal de \mathbf{E} y \mathbf{H} . Calculando ahora el rotacional a ambos lados de la ecuación (45a) obtenemos las ecuaciones de propagación para el vector campo eléctrico \mathbf{E} y el vector campo magnético \mathbf{H}

$$\left(\nabla^2 - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad (46a)$$

$$\left(\nabla^2 - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H} = 0, \quad (46b)$$

Suponiendo ahora que $\mu_r = 1$ y sabiendo que $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$, concluimos que los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} se propagan en el dieléctrico con velocidad $c/\sqrt{\epsilon_r} = c/n$.

Vemos pues que el índice de refracción n no es otra cosa que un índice más en la ecuación de ondas. Podríamos estudiar otros medios mas complicados que el dieléctrico. Por ejemplo, un medio conductor en el que además de cargas y corrientes inducidas existan cargas libres. Desde luego, los conductores convencionales, como pueden ser los metales, dada su opacidad no interesan demasiado en lo que se refiere a la emisión de luz Cherenkov. Los plasmas, sin embargo, poseen cargas libres y además son, por lo general, transparentes a la radiación electromagnética.

8.2. El índice de refracción de un medio con cargas libres ($\rho \neq 0$) en el que no existe dispersión de las cargas. Conductores y plasmas ideales

En el caso de que existan corrientes $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ y cargas libres ρ en el medio, las ecuaciones de Maxwell quedarían de la forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (47a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (47b)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (47c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (47d)$$

de donde resultan las ecuaciones de propagación de los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{H} siguientes:

$$\left(\nabla^2 - \sigma \mu_r \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \frac{\nabla \rho}{\varepsilon_r \varepsilon_0}, \quad (48a)$$

$$\left(\nabla^2 - \sigma \mu_r \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H} = 0, \quad (48b)$$

Las ecuaciones (48a) y (48b) se diferencian de las (46a) y (46b) en los términos $\nabla \rho / \varepsilon_r \varepsilon_0$ y $\partial / \partial t$. Puesto que la densidad de carga varía poco en todo el material en el que se propaga la onda electromagnética, supondremos $\nabla \rho = 0$. El segundo término $\partial / \partial t$ indica amortiguamiento en la onda electromagnética. Si sustituimos soluciones de la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (49a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (49b)$$

en las ecuaciones (48a) y (48b), obtenemos

$$(k^2 - i\omega\sigma\mu_r\mu_0 - \omega^2\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0)\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + kx) = 0 \quad (50a)$$

$$(k^2 - i\omega\sigma\mu_r\mu_0 - \omega^2\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0)\mathbf{B}_0 \exp(-i\omega t + kx) = 0 \quad (50b)$$

de donde

$$k^2 = \frac{\mu_r \varepsilon_r \omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\sigma}{\varepsilon_r \omega} \right), \quad (51)$$

Por tanto, el índice de refracción debe expresarse como un número imaginario

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \mu_r \epsilon_r \left(1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_r \omega} \right) \quad (52)$$

Vemos que la parte real coincide con el índice de refracción en dieléctricos, mientras que la parte imaginaria interviene únicamente cuando la frecuencia de la radiación es menor o del mismo orden que la conductividad del medio. Sin embargo, cuando introducimos en la ecuación (52) los datos de conductividad del cobre $\sigma = 5.7 \times 10^7 \text{ AV}^{-1}\text{m}^{-1}$ y la frecuencia de la radiación electromagnética en el visible $\nu = \omega / 2\pi \cong 10^{15} \text{ s}^{-1}$, la parte imaginaria se anula, y obtenemos un índice de refracción de un dieléctrico. La explicación es que no hemos tenido en cuenta la influencia de la red cristalina del conductor (o de los iones en el caso de un plasma) sobre la corriente de electrones \mathbf{J} .

8.3. El índice de refracción de un medio con cargas libres ($\rho \neq 0$) en el que existe dispersión de las cargas. Conductores y plasmas reales

Debido a la acción del campo eléctrico \mathbf{E} , los electrones libres del conductor (o plasma) se desplazan produciendo una corriente de electrones \mathbf{J} . Estos electrones sufren, no obstante, dispersión al colisionar con la red cristalina del conductor (o con los iones en el caso del plasma). Puede tenerse en cuenta la dispersión de la corriente de electrones en las ecuaciones de Maxwell (47) añadiendo un término de atenuación inversamente proporcional al tiempo entre colisiones, o lo que es lo mismo, proporcional a la velocidad de los electrones. Podemos estudiar el movimiento de un conjunto de electrones libres en un conductor (o plasma) bajo la acción de una fuerza debida a la acción del campo electromagnético $e\mathbf{E}$ empleando la ecuación de Newton. Si asignamos el subíndice i a cada uno de los electrones del conjunto de N electrones libres tenemos

$$m \ddot{\mathbf{r}}_i + l_i \dot{\mathbf{r}}_i = e \mathbf{E} \quad (53)$$

Suponiendo ahora que todos los electrones se comportan de idéntica forma, la corriente generada por todos ellos será

$$\mathbf{J} = \frac{Ne^2 \mathbf{E}}{l - im\omega} \quad (54)$$

Sustituyendo ahora (54) en las ecuaciones de Maxwell (47), obtenemos como resultado para el índice de refracción

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \mu_r \varepsilon_r \left(1 + i \frac{1}{\varepsilon_r \omega} \frac{Ne^2}{l - im\omega} \right), \quad (55)$$

Para un plasma diluido en que $\varepsilon_r \cong 1$, $\mu_r \cong 1$ y $l \cong 0$, la componente imaginaria del índice de refracción se hace prácticamente nula. Por tanto,

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (56)$$

siendo $\omega_p = Ne/m$ la denominada frecuencia del plasma.⁴⁰ Por otro lado, en un plasma denso, $\omega_p > \omega$, la contribución de la componente imaginaria al índice de refracción será mucho mayor que la real, y la radiación electromagnética será rápidamente absorbida por el plasma.

8.4. El índice de refracción de un medio diluido sin cargas libres ($\rho=0$) en el que existe dispersión de la radiación. Dispersión en gases.

Al contrario que en los apartados anteriores, la constante dieléctrica ε_r del vector desplazamiento $\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}$, no será constante como tal, y dependerá de la frecuencia de la radiación. Para ello supondremos que el campo eléctrico de la radiación electromagnética

⁴⁰ podría parecer que por ser $n < 1$ la velocidad de la luz en el medio se hace mayor que c . Trataremos el tema en el Apartado 11

produce una oscilación amortiguada de los electrones de los átomos polarizados. En ese caso, los electrones verificarán la ecuación de Newton

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + l_i \dot{\mathbf{r}}_i + \omega_i^2 \mathbf{r}_i = \frac{e}{m} \mathbf{E}. \quad (57)$$

La ecuación (57) difiere de la ecuación (53) en el término fuerza de recuperación del oscilador armónico $\omega_i^2 \mathbf{r}_i$. Los electrones oscilan en torno a una posición de equilibrio pero van amortiguándose según el término $l_i \dot{\mathbf{r}}_i$.

El momento dipolar resultado del desplazamiento del electrón i es según (57)

$$\mathbf{p}_i = e \mathbf{r}_i = \frac{(e^2 / m) \mathbf{E}}{(\omega_i^2 - \omega^2) - il_i \omega}, \quad (58)$$

En el caso de que sólo una fracción f_i de los N electrones polarizables que existen por unidad de volumen tengan una frecuencia de oscilación característica ω_i , el momento dipolar total será

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N N f_i \mathbf{p}_i = \mathbf{E} \sum_{i=1}^N \frac{f_i e^2 / m}{(\omega_i^2 - \omega^2) - il_i \omega} \quad (59)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = (\epsilon_0 + \chi) \mathbf{E}$, concluimos que:

(i) La susceptibilidad eléctrica:

$$\chi = \sum_{i=1}^N \frac{f_i e^2 / m}{(\omega_i^2 - \omega^2) - il_i \omega}. \quad (60)$$

(ii) La constante dieléctrica:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{f_i e^2 / m}{(\omega_i^2 - \omega^2) - i l_i \omega}. \quad (61)$$

(iii) El índice de refracción:

$$n^2 = 1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{f_i e^2 / m}{(\omega_i^2 - \omega^2) - i l_i \omega}. \quad (62)$$

8.4.1. La ecuación de Cauchy

Tomando únicamente los 2 primeros términos de la expansión binomial para $\sqrt{\varepsilon_r}$, y separando las partes real e imaginaria resulta

$$n \cong 1 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{(\omega_i^2 - \omega^2) f_i e^2 / m}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + l_i^2 \omega^2} + i \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{\omega f_i l_i e^2 / m}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + l_i^2 \omega^2} \quad (63)$$

Obsérvese como el segundo sumando de (63) pasa de positivo a negativo para frecuencias $\omega = \omega_i$, mientras que el término imaginario posee un máximo en este mismo punto.⁴¹

En un gas diluido, el coeficiente de atenuación $l_i \ll \omega$. Por tanto,

$$n \cong 1 + c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\omega_i^2 - \omega^2}, \quad (64)$$

⁴¹ Nuevamente nos encontramos con la paradoja de que para $\omega > \omega_i$ se tiene que $\text{Re}(n) < 1$. El hecho de que el índice de refracción sea mayor que la unidad parece indicar que la velocidad de la luz es mayor que c en el medio. Aclaremos este particular en el Apartado 11

siendo $\rho_i = f_i e^2 / 2c^2 \epsilon_0 m$ una magnitud proporcional al número de electrones por unidad de volumen, por tanto relacionada con la densidad del gas. Ahora bien, como $\omega / 2\pi = c / \lambda$, obtenemos

$$n \cong 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda^2 \lambda_i^2 \rho_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2} = 1 + a + \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \quad (65)$$

siendo

$$a = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \rho_i, \quad (66)$$

$$b_i = \lambda_i^4 \rho_i \quad (67)$$

Podemos asumir que las únicas resonancias importantes provienen de la zona violeta del espectro. De donde, para la zona visible se verificará $\lambda \gg \lambda_i$. Resultando la ecuación de Cauchy:

$$n - 1 \cong A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right), \quad (68)$$

Los coeficientes A y B se denominan coeficientes de refracción y de dispersión, respectivamente. Una vez ajustados A y B , la ecuación de Cauchy se aproxima con bastante precisión al comportamiento óptico de los gases, así como de muchos sólidos y líquidos transparentes.

8.5. El índice de refracción de un medio denso sin cargas libres ($\rho=0$) en el que existe dispersión de la radiación. Dispersión en sólidos y líquidos.

En este caso, se debe incluir la influencia de la polarización del medio \mathbf{P} sobre el campo eléctrico \mathbf{E} . Según la ecuación de Clausius-Mossotti, el campo eléctrico local es

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}, \quad (69)$$

Después de definir la polarizabilidad del medio α como $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}'$

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}' = \alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\chi \mathbf{E}}{3\epsilon_0} \right) \quad (70)$$

podemos despejar la susceptibilidad eléctrica, obteniendo

$$\chi = \frac{\alpha}{1 - \alpha/3\epsilon_0} \quad (71)$$

Puesto que la susceptibilidad eléctrica y la constante dieléctrica verifican $\epsilon_r = (1 + \chi)/\epsilon_0$, tenemos que

$$\epsilon_r = 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\alpha}{1 - \alpha/3\epsilon_0} \quad (72)$$

de donde despejando la polarizabilidad

$$\alpha = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad (73)$$

La expresión (73) se denomina fórmula de Lorentz-Lorenz, y es de gran interés experimental. Por ejemplo, en el agua, los valores de f_i , ω_i y l_i son similares independientemente de la temperatura. No ocurre así con N , que depende de la densidad ρ . Así pues, con bastante aproximación, debe verificarse:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho} = \text{constante} \quad (74)$$

Por tanto, si conocemos el índice de refracción del agua a temperatura ambiente, podemos calcular el índice de refracción a cualquier otra temperatura a partir de la densidad.

9. LA RADIACIÓN CHERENKOV EN MEDIOS DIELECTRICOS DISPERSIVOS

Después de estudiar el comportamiento del índice de refracción en medios dieléctricos dispersivos, que, como vimos en el apartado anterior, se aproxima a la ecuación (64), vamos a intentar deducir el espectro de emisión de radiación Cherenkov. Ya comprobamos que la ecuación de Frank y Tamm (11) era una integral divergente en el caso de que se considerara el intervalo de frecuencias $0 < \omega < \infty$. En este apartado veremos que ocurre si sustituimos el índice de refracción n constante de la ecuación (11) por el obtenido en la ecuación (63).

En 1953, Budini⁴² propuso para resolver el caso general del cálculo de la energía emitida por una carga en un medio dieléctrico dispersivo la siguiente integral

$$\frac{dW}{dl} = \frac{q^2 \mu_0}{4\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega x \operatorname{Im}(\epsilon_r)}{c}\right) \left(1 - \frac{\operatorname{Re}(\epsilon_r)}{(\epsilon_r)^2 \beta^2}\right) \omega d\omega . \quad (75)$$

Como puede apreciarse, la parte imaginaria $\operatorname{Im}(\epsilon_r)$ condiciona la absorción de la radiación por parte del medio, mientras que la parte real $\operatorname{Re}(\epsilon_r)$ determina la condición de emisión de luz Cherenkov $\operatorname{Re}(\epsilon_r)\beta > 1$. Sin embargo, el trabajo de Budini concluye con la ecuación (75), sin calcular el espectro de emisión de luz Cherenkov.

Fülöp y Biró⁴³, en un trabajo reciente de 1991, han considerado el problema de un medio dieléctrico dispersivo con absorción despreciable, es decir, en el que $\operatorname{Im}(\epsilon_r) = 0$. En ese caso

$$\sqrt{\epsilon_r} \cong 1 + \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{(\omega_i^2 - \omega^2) f_i e^2 / m}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + l_i^2 \omega^2} . \quad (76)$$

Asumiendo ahora que todos los electrones del medio poseen los mismos valores de $f_i = f_0$, $l_i = l$ y $\omega_i = \omega_0$, el índice de refracción queda de la forma

⁴² P. Budini, On the Energy Lost by a Relativistic Ionizing Particle in a Material Medium and on the Cherenkov Radiation, *Il Nuovo Cimento* 10 (1953) 236-257.

⁴³ L. Fülöp y T. Biró, Cherenkov Radiation Spectrum, *Int. J. Theor. Phys.* 31 (1992)

$$\sqrt{\varepsilon_r} \cong 1 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)a_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + l^2\omega^2} \quad (77)$$

siendo $a_0 = Nf_0e^2/2m\varepsilon_0$. Puesto que $\sqrt{\varepsilon_r} = 1$ cuando $\omega = \omega_0$, debe existir una frecuencia $\omega_M < \omega_0$ que verifique la condición Cherenkov $\varepsilon_r\beta_u^2 = 1$. Después de un cálculo simple se obtiene

$$1 + \frac{a_0}{2l\omega_0 - l^2} = \frac{1}{\beta_u} \quad (78)$$

Valiéndose de la ecuación (76), asumiendo $f_0 \cong 1$ y teniendo en cuenta que para frecuencias bajas en el visible el coeficiente de atenuación es despreciable ($l \cong 0$), Fülöp y Biró calcularon para el agua ($\beta_u = 0.75$, $n = 1.33$, $\omega_0 = 6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$) los valores $a_0 = 23.7 \times 10^{30} \text{ s}^{-2}$ y $l = 3.7 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$. La figura 16 muestra la función $\varepsilon_r(\omega)$ resultante.

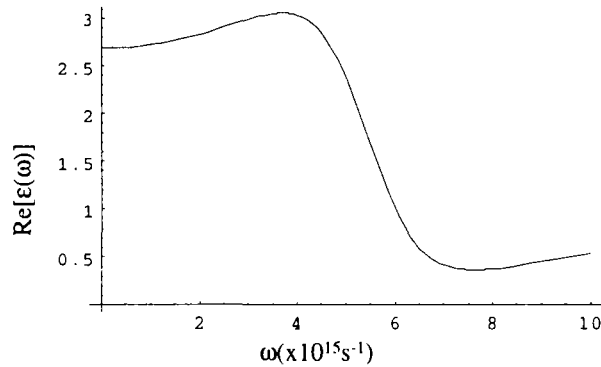


Fig. 16. Variación con la frecuencia del término dispersivo de la constante dieléctrica en las proximidades de la frecuencia característica del medio (agua)

Una vez determinada completamente la función $\varepsilon_r(\omega)$, la distribución teórica de la radiación Cherenkov

$$I(\omega) = \text{const} \times \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon_r(\omega)} \right] \omega \quad (79)$$

es de la forma mostrada en la figura 17 para cargas que se desplazan en el agua a velocidad $\beta = 0.8$.

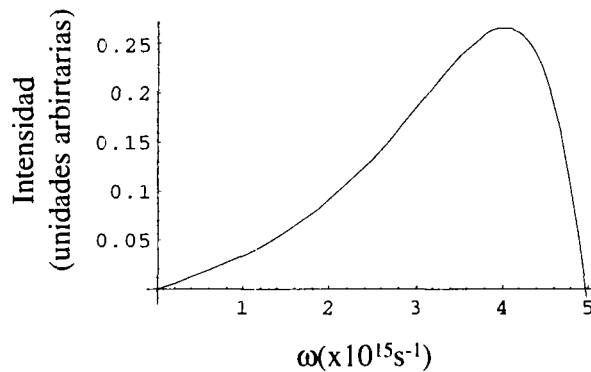


Fig. 17. Espectro teórico de la radiación Cherenkov deducido para el caso del agua

10. LA RADIACIÓN CHERENKOV EN CRISTALES BIRREFRINGENTES

El estudio de la radiación Cherenkov en cristales birrefringentes es interesante dada la semejanza de las propiedades ópticas de estos cristales con los plasmas. En los cristales anisótropos la luz se propaga con dos velocidades diferentes que dependen de la orientación relativa de la polarización y el plano principal óptico del cristal. Por ejemplo, cuando un rayo de luz incide en la calcita, un cristal birrefringente del sistema hexagonal, se descompone en dos rayos (ordinario y extraordinario)

Denotando los índices de refracción de los rayos ordinario y extraordinario por n_o y n_e , llamaremos eje óptico a la dirección en el cristal en que $n_o = n_e$. Los cristales, como el espato de Islandia, en que $n_o > n_e$, se denominan negativos. Los cristales, como el cuarzo, en que $n_o < n_e$, se denominan positivos.

10.1. Radiación Cherenkov emitida por una carga que se mueve en la dirección del eje en un cristal uniaxial

En este caso, aunque la carga exceda la velocidad umbral correspondiente a la componente ordinaria, únicamente existirá como Cherenkov para la componente extraordinaria. Esto es debido a que el vector campo eléctrico (polarización) de la radiación Cherenkov es siempre perpendicular al eje principal del cristal. El ángulo de apertura del cono Cherenkov debe cumplir

$$\cos\theta_e = \frac{1}{n_e\beta} \quad (80)$$

Además, teniendo en cuenta la variación del índice de refracción extraordinario n_e con el ángulo θ respecto al eje principal del cristal

$$n_e(\theta) = \frac{n_e n_o}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}} \quad (81)$$

obtenemos que

$$\cos^2 \theta_e = \frac{1}{1 + \frac{n_e^2}{n_o^2} (n_o^2 \beta^2 - 1)} \quad (82)$$

Por tanto, la condición de emisión de luz Cherenkov para la componente extraordinaria es

$$\frac{n_e^2}{n_o^2} (n_o^2 \beta^2 - 1) > 0 \quad (83)$$

Si deseamos obtener la energía disipada por unidad de camino recorrido dW/dl en un material anisótropo debemos tener en cuenta que la constante dieléctrica es un tensor

simétrico ε_{ij} . En el caso particular de que el cristal sea birrefringente, uniaxial y las cargas se muevan en la dirección del eje óptico, se verifica (83) y

$$\frac{dW_e}{dl} = \frac{q^2 \mu_0}{4\pi} \int \left(1 - \frac{1}{n_o^2 \beta^2}\right) \omega d\omega \quad (84)$$

10.2. Radiación Cherenkov emitida por una carga que se mueve perpendicular a la dirección del eje en un cristal uniaxial

En este caso es posible la emisión simultánea de ondas ordinarias y extraordinarias. El ángulo de apertura del cono Cherenkov para la componente ordinaria es como de costumbre $\cos \theta_o = 1/n_o \beta$. Sin embargo, la intensidad de energía sobre la superficie del cono no es uniforme y depende del ángulo azimutal φ . Según Ginzburg

$$\frac{dW_o}{dl} = \frac{q^2 \mu_0}{4\pi} \int \left(1 - \frac{1}{n_o^2 \beta^2}\right) \frac{\cos^2 \varphi d\varphi \omega d\omega}{\cos^2 \varphi + \text{sen}^2 \varphi / n_o^2 \beta^2} \quad (86)$$

Para la componente extraordinaria resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\cos^2 \theta_e = \frac{1}{n_e^2 \beta^2} \quad (87)$$

$$\frac{1}{n_e^2} = \frac{\text{sen}^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \varphi}{n_o^2} \quad (88)$$

De donde

$$\cos^2 \theta_e = \frac{1}{1 + \frac{n_o^2 (n_e^2 \beta^2 - 1)}{n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \text{sen}^2 \varphi}} \quad (89)$$

Quedando la condición umbral de la forma

$$\frac{n_o^2(n_e^2\beta^2 - 1)}{n_o^2\cos^2\varphi + n_e^2\sen^2\varphi} > 0 \quad (90)$$

Según Bolotovskii, la intensidad de luz Cherenkov para la componente extraordinaria depende el ángulo azimutal φ según la expresión

$$\frac{dW_e}{dl} = \frac{q^2\mu_0}{4\pi} \int \left(1 - \frac{1}{n_e^2\beta^2}\right) \frac{\sen^2\varphi n_e^2\omega d\varphi d\omega}{(n_e^2\sen^2\varphi + n_o^2\cos^2\varphi)(n_o^2\beta^2\cos^2\varphi + \sen\varphi)} \quad (91)$$

La figura 18 muestra la distribución de intensidades en función del ángulo azimutal φ de las componentes ordinaria y extraordinaria. Como puede observarse, para $\varphi = \pi/2$, la intensidad de la componente ordinaria se hace cero, mientras que la componente extraordinaria se hace máxima. Por el contrario, para $\varphi = 0$, la intensidad de la componente extraordinaria se hace cero, mientras que la ordinaria se hace máxima.

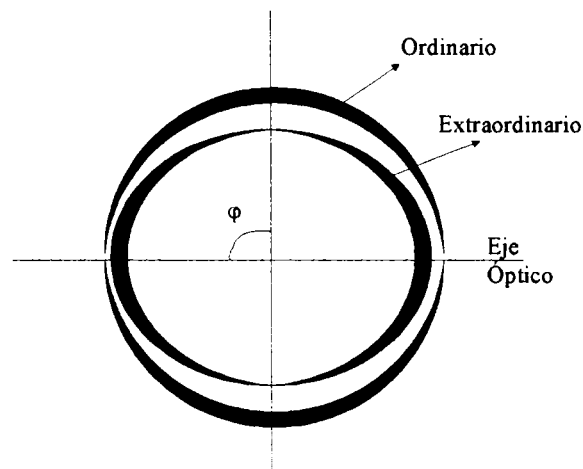


Fig. 18. Distribución de intensidades de la radiación Cherenkov emitida por una partícula que se mueve perpendicularmente al eje óptico en un cristal uniaxial

Si integramos las expresiones (86) y (91) para todo φ y sumamos, obtenemos

$$\frac{d(W_o + W_e)}{dl} = \frac{q^2 \mu_0}{4\pi} \int \left(1 - \frac{1}{n_o n_e \beta^2} \right) \omega d\omega \quad (92)$$

Comparando ahora (84) y (92) llegamos a la interesante conclusión de que las pérdidas por radiación Cherenkov son mayores cuando las cargas se mueven perpendicularmente al eje óptico en lugar de paralelamente y el cristal es de tipo positivo $n_o < n_e$. El efecto será el contrario para cristales de tipo negativo $n_o > n_e$.

En 1964 Zrelov⁴⁴ investigó las propiedades de la luz Cherenkov en el espato de Islandia ($n_o = 1.66$, $n_e = 1.49$). Se consideraron los dos casos descritos en los Apartados 10.1 y 10.2 obteniéndose un concordancia excelente entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales.

11. LA VELOCIDAD DE LA LUZ

Vimos en las ecuaciones (56) y (63) que existía la posibilidad de que $n < 1$, de lo que parece deducirse que la velocidad de la luz c/n puede ser mayor que c . Este particular parece contradecir el postulado de Einstein de la teoría especial de la relatividad, el cual asegura que ninguna señal puede transmitirse a mayor velocidad que c .

El valor del índice de refracción obtenido en (56) y (63) se ha deducido en ambos casos a partir del número de onda k considerando soluciones para la ecuación de ondas periódicas en el espacio y compuestas por trenes de ondas de duración infinita $\exp(ikz - i\omega t)$. El índice de refracción se ha definido a partir de la velocidad de fase $v = \omega/k$, o velocidad de propagación de superficies de la onda con un estado o fase $kz - \omega t = \text{constante}$.

⁴⁴ V. P. Zrelov, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 46 (1964) 447

Tanto (56) como (63) se obtienen a partir de modelos en los que se utiliza la ecuación de Newton para describir el movimiento de las cargas libres (plasma) y de las inducidas (dieléctrico). En ambos casos, se consideran medios dispersivos en los que el número de onda k depende de la frecuencia ω de la radiación. A continuación comprobaremos que un medio dispersivo implica necesariamente la existencia de grupos de ondas.

Supongamos que sumamos dos ondas armónicas $\cos(kz - \omega t)$ que difieren en que k y ω son ligeramente diferentes

$$\begin{aligned} \cos(kz - \omega t) + \cos[(k + \delta k)z - (\omega + \delta \omega)t] = \\ 2 \cos \frac{1}{2}(z\delta k - t\delta \omega) \cos \left[\left(k + \frac{\delta k}{2} \right) z - \left(\omega + \frac{\delta \omega}{2} \right) t \right] \end{aligned} \quad (93)$$

Obtenemos grupos de ondas de amplitud efectiva $2 \cos(z\delta k - t\delta \omega)/2$. En este caso, la velocidad de propagación del grupo de ondas con estados $z\delta k - t\delta \omega = \text{constante}$ es $u = \delta \omega / \delta k$. Como vemos la distinción entre velocidad de fase y velocidad de grupo es únicamente de interés en medios dispersivos $k = k(\omega)$.

En el análisis de la propagación la radiación Cherenkov vimos que la mayor parte de la energía se encuentra concentrada en un pico, de tal forma, que un detector de radiación Cherenkov detecta impulsos. Una onda armónica $\exp(ikz - i\omega t)$ o un tren de ondas (93) no representan un impulso de duración finita como el de la radiación Cherenkov. Es necesario introducir el concepto de impulso o tren de ondas de longitud finita $|z| < L/2$.

11.1. Evolución de un impulso Cherenkov en un medio dispersivo

Un aspecto importante de la radiación Cherenkov es el estudio de la anchura del impulso Cherenkov en un medio dispersivo. Asumiendo que la emisión de radiación Cherenkov es sólo posible en el intervalo de frecuencias $\omega_1 < \omega < \omega_2$, después de un cálculo bastante laborioso pueden obtenerse el valor medio ω_0 para el que, transcurrido un tiempo t , los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} son máximos en un punto de coordenadas cilíndricas $P(\rho, \theta, z)$ con centro en la carga.

$$t - \frac{nz}{c} - \rho s'(\omega_0) = 0 \quad (94)$$

siendo

$$s(\omega_0) = \frac{n\omega_0}{c} \sqrt{1 - n^2 \beta^2} \quad (95)$$

La duración del impulso Cherenkov equivale al tiempo transcurrido entre la llegada de los máximos correspondientes a ω_1 y ω_2 .

$$t_2 - t_1 = \rho [s'(\omega_2) - s'(\omega_1)] \quad (96)$$

Un aspecto interesante de la ecuación (96) es que la duración del impulso depende de ρ . En otras palabras, cuanto más lejos se encuentre el foco emisor de radiación Cherenkov del detector, mayor será la duración del impulso detectado. Esto tiene consecuencias muy interesantes puesto que es posible calcular el tamaño del emisor a partir de la duración del impulso.

11.2. Frente de ondas y señal

Hemos visto como la velocidad de grupo difiere únicamente de la velocidad de fase en medios dispersivos. Si la dispersión es normal, la velocidad de grupo $d\omega/dk$ es menor que la velocidad de fase. Sin embargo, en zonas de dispersión anómala, la velocidad de grupo puede hacerse arbitrariamente grande, e incluso negativa, como puede derivarse de la pendiente de la función $n = n(\omega)$. En plasmas o conductores que responden a la ecuación (56), la velocidad de grupo puede ser mayor que la velocidad de fase y, por tanto, exceder la velocidad c . Lo mismo puede decirse de la zona de dispersión anómala en la ecuación (63). Si ahora asumimos que la velocidad de grupo es equivalente a la velocidad de propagación de la energía de la radiación electromagnética, aparentemente parece contradecirse el postulado de la teoría de la relatividad especial de Einstein, en el que

ninguna señal puede desplazarse a velocidad mayor que c . En 1914, Sommerfeld y Brillouin, resolvieron la paradoja. La resolución es bastante compleja y nos limitaremos a extraer las conclusiones.

Según Sommerfeld y Brillouin una señal es un tren de oscilaciones que comienza en un instante dado. En su transmisión por el medio, el tren de ondas se deforma. El cuerpo principal de la onda es precedido por una preseñal, que viaja en todos los medios a velocidad c . Esta preseñal llega al detector con amplitud cero que aumenta lentamente en amplitud y período. A continuación la amplitud decrece conforme la frecuencia se aproxima con la frecuencia característica de los electrones del material. Posteriormente aparece una nueva preseñal que se desplaza a velocidad $\omega_0 c / \sqrt{\omega_0^2 + a^2}$. Esta concluye con el cuerpo principal de la señal que se desplaza a velocidad w . Físicamente la señal representa la parte de la onda capaz de activar el detector. Por tanto, conforme aumenta la sensibilidad del detector, también aumenta w .

12. LA RADIACIÓN CHERENKOV EN PLASMAS

12.1. Índice de refracción en plasmas en los que la radiación se propaga paralelamente al campo magnético externo

Según (56) el índice de refracción de un plasma será $n < 1$ y por tanto ninguna carga que se desplace en el plasma podrá emitir luz Cherenkov. Obsérvese, no obstante, que hemos supuesto $\epsilon_r \cong 1$ ¿Es posible la existencia de plasmas con $\epsilon_r > 1$? Si colocamos un plasma entre las placas de un condensador, observaremos que el plasma acaba por desaparecer, atraído por las placas de distinto signo. Al final entre las placas sólo queda vacío, $\epsilon_r = 1$. Por tanto, la radiación electromagnética no producirá polarización propiamente dicha, únicamente existirá movimiento de cargas libres, es decir, una corriente de carga \mathbf{J} .

La situación puede ser algo distinta si el plasma se encuentra bajo la influencia de un campo magnético externo \mathbf{H}_0 . En el caso de que no exista atenuación de la corriente de

electrones libres producida por el campo eléctrico \mathbf{E} de la radiación electromagnética (plasma ideal), los electrones del plasma en movimiento seguirán la ecuación de Newton:

$$m\mathbf{r} = e\mathbf{E} + e\mu_0(\mathbf{r} \times \mathbf{H}_0), \quad (97)$$

Para resolver (97) supondremos que la radiación electromagnética se propaga en la dirección del eje z . En ese caso, llamando H_0 a la componente z del vector \mathbf{H}_0 tenemos que

$$x = \frac{e}{m} E_x + \frac{e\mu_0}{m} yH_0 \quad (98a)$$

$$y = \frac{e}{m} E_y + \frac{e\mu_0}{m} xH_0 \quad (98b)$$

$$\ddot{z} = 0 \quad (98c)$$

Después de multiplicar ambos términos de (98a) por $\pm i$ y sumarlos a (98b) obtenemos

$$m(\ddot{x} \pm i\ddot{y}) = e(E_x \pm iE_y) \mp ie\mu_0 H_0 (\dot{x} \pm i\dot{y}) \quad (99)$$

Si definimos

$$u = x \pm iy \quad (100a)$$

$$E = E_x \pm iE_y \quad (100b)$$

obtenemos la ecuación

$$\ddot{u} = \frac{e}{m} E \mp i \frac{e\mu_0}{m} \dot{u} \quad (101)$$

Considerando soluciones de la forma:

$$u = u_0 \exp(-i\omega t + ikz) \quad (102a)$$

$$E = E_0 \exp(-i\omega t + ikz) \quad (102b)$$

y sustituyendo en (101) obtenemos

$$u_0 = -\frac{(e/m)E_0}{\omega^2 \pm \omega\omega_c} \quad (103)$$

siendo $\omega_c = e\mu_0 H_0 / m$ la denominada frecuencia ciclotrón.

Una vez resuelta la ecuación del movimiento de los electrones del plasma como consecuencia de la acción del campo electromagnético de la radiación y en presencia de un campo magnético exterior, podemos introducir la corriente $J = J_x \pm iJ_y = Ne\dot{u}$ en las ecuaciones de Maxwell (47), obteniendo finalmente:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \pm \omega\omega_c} \quad (104)$$

Dependiendo del signo del denominador tenemos dos posibles valores del índice de refracción. En cierto modo el plasma se comporta como un cristal birrefringente, con la salvedad de que uno de los índices de refracción es siempre menor que la unidad. Si incide luz linealmente polarizada en un plasma sometido a un campo externo, ésta se descompondrá en dos ondas polarizadas circularmente en sentidos opuestos y con velocidades de fase diferentes. En cualquier punto a lo largo de la dirección de propagación de las ondas, las dos componentes de polarización circular se superponen para producir de nuevo una onda polarizada linealmente, aunque con el vector de polarización rotado respecto al de la onda incidente. El ángulo de rotación del vector de polarización es

$$\theta = V\mu_0 H_0 L \quad (105)$$

siendo L la distancia de plasma recorrida por la radiación, H_0 el campo magnético externo y V la denominada constante de Verdet.

12.2. Ecuación general del índice de refracción en plasma con ángulo arbitrario entre la dirección de propagación de la radiación electromagnética y el campo magnético externo

Partiremos, como en el apartado anterior, de la ecuación (97), que describe el movimiento de un electrón en el seno de un campo magnético externo \mathbf{H}_0 .⁴⁵ Es decir,

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = e \mathbf{E} + e \mu_0 (\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0) \quad (106)$$

Después de suponer soluciones armónicas para la velocidad \mathbf{v} , es decir, proporcionales a $\exp(-i\omega t)$, y considerar el campo magnético en la dirección del eje z , obtenemos

$$mi\omega v_x = eE_x + eB_0 v_y \quad (107a)$$

$$mi\omega v_y = eE_y - eB_0 v_x \quad (107b)$$

$$mi\omega v_z = eE_z \quad (107c)$$

Si despejamos las componentes de la velocidad en función del campo eléctrico

$$v_x = -\frac{ie}{\omega m} \frac{1}{1 - \omega_c^2 / \omega^2} \left(E_x - i \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \quad (108a)$$

$$v_y = -\frac{ie}{\omega m} \frac{1}{1 - \omega_c^2 / \omega^2} \left(E_y + i \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \quad (108b)$$

$$v_z = -\frac{ie}{\omega m} E_z \quad (108c)$$

Suponiendo ahora que todos los electrones del plasma se mueven de la misma forma, podemos asumir una corriente debida únicamente a los electrones libres

⁴⁵ I. H. Hutchinson, Principles of Plasma Diagnostics (University Press, Cambridge, 1987) p.91

$$\mathbf{j} = -eN \mathbf{v} = \frac{iNe^2}{m\omega} \frac{1}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \begin{pmatrix} 1 & -i\omega_c^2/\omega & 0 \\ i\omega_c/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \omega_c^2/\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (109)$$

Puesto que la masa de los iones es mucho mayor que la de los electrones, su contribución a la corriente de carga puede considerarse despreciable frente a la de los electrones. De (109) obtenemos el tensor dieléctrico

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\mathbf{1} + \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \boldsymbol{\sigma} \right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & \frac{i\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ -\frac{i\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (110)$$

Considerando que la radiación electromagnética se propaga en el plasma según la ecuación de ondas

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0 \quad (111)$$

Proponiendo soluciones de la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (112)$$

debe verificarse que

$$\det \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - k^2 \mathbf{1} + \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon} \right) = 0, \quad (113)$$

Llamando θ al ángulo formado por el vector propagación de ondas \mathbf{k} y el vector campo magnético externo \mathbf{B}_0 , y definiendo las magnitudes adimensionales $X = \omega_p^2/\omega^2$ y

$Y = \omega_c / \omega$, obtenemos después de resolver el determinante de la ecuación (113), la expresión de Appleton-Hartree para el índice de refracción del plasma

$$n^2 = 1 - \frac{X(1-X)}{1-X - \frac{1}{2}Y^2 \text{sen}^2 \theta \pm \left[\left(\frac{1}{2}Y^2 \text{sen}^2 \theta \right)^2 + (1-X)^2 Y^2 \text{cos}^2 \theta \right]^{1/2}} \quad (114)$$

Como casos particulares de esta ecuación general están para $\theta = 0$

$$n^2 = 1 - \frac{X}{1 \pm Y}, \quad (115)$$

y para $\theta = \pi/2$

$$n^2 = 1 - X \quad (116a)$$

$$n^2 = 1 - \frac{X(1-X)}{1-X-Y^2} \quad (116b)$$

Vemos que el índice de refracción sólo depende de la densidad electrónica del plasma y del campo magnético externo. Dicho de otra forma, conociendo los valores de la densidad electrónica y del campo magnético en el plasma es posible calcular el índice de refracción aplicando la ecuación de Appleton-Hartree.

En plasmas reales, la densidad electrónica no es uniforme. En este caso la resolución de la ecuación de ondas (111) se complica, y no es posible recurrir soluciones de la forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$.

Cuando la variación del vector de ondas sea pequeño en su recorrido a lo largo del plasma, es decir, $|\nabla k|/k^2 \ll 1$, puede emplearse la aproximación de WKB (Wentzel, Kramers y Brillouin), en la que la amplitud del campo eléctrico para una determinada frecuencia adopta la forma $E = \exp\left[i \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l} - i\omega t\right]$

12.3. Emisión de radiación Cherenkov en plasmas

Según la ecuación (114), para que exista emisión de luz Cherenkov debe ocurrir que $\omega_c > \omega$. Además el plasma debe ser diluido ($\omega_p \ll \omega$) para evitar que la componente imaginaria del índice de refracción (plasma real) absorba toda la radiación.

13. ALGUNOS PLASMAS EMISORES DE RADIACIÓN CHERENKOV

13.1. La ionosfera

Uno de los primeros estudios sobre la radiación Cherenkov en plasmas lo llevaron a cabo Sollfrey y Yura en 1965.⁴⁶ Su objetivo era determinar las cantidades relativas de emisión de radiación sincrotrón y Cherenkov en las capas más altas de la atmósfera como consecuencia de las pruebas nucleares. A modo de ejemplo, en la prueba nuclear de 1,4 megatones que tuvo lugar en el Pacífico el 9 de Julio de 1962 a 400 km de altura, se crearon del orden de 10^{27} electrones como consecuencia de la desintegración beta de los productos de fisión y de los neutrones libres. Gracias al campo magnético de la Tierra, la ionosfera es ópticamente activa y puede dar lugar a una componente Cherenkov importante.

13.2. Las manchas solares

Las manchas solares⁴⁶ son áreas oscuras en la fotosfera solar⁴⁷ caracterizadas por la presencia de campos magnéticos intensos ($\cong 10^{-1}$ T), miles de veces más intensos que el campo magnético terrestre. En estas zonas no es infrecuente que chorros de electrones asciendan a velocidades relativistas siguiendo las líneas de campo magnético y que se verifiquen las condiciones para la emisión de radiación sincrotrón o Cherenkov.

Los primeros estudios sobre la posible emisión de radiación sincrotrón y Cherenkov (componente no térmica) en la atmósfera solar corresponden a L. Marshall y U. E. Kruse y col.⁴⁸ Por lo que respecta a la radiación Cherenkov, la conclusión parece ser que, en su camino a través de la atmósfera solar, la radiación Cherenkov encuentra bandas de absorción en las que la componente imaginaria del índice de refracción hace imposible su

⁴⁶ W. Sollfrey y H. T. Yura, Cerenkov Radiation from Charged Particles in a Plasma in a Magnetic Field, Phys. Rev. A139 (1965) 48

⁴⁶ <http://science.msfc.nasa.gov/ssl/pad/solar/>

⁴⁷ La fotosfera es la zona visible del Sol. <http://science.nasa.gov/ssl/pad/solar/surface.htm>

⁴⁸ L. Marshall, Production of the Sun's Non-Thermal Radio Emission by Cerenkov Radiation, Astrophys. J. 124 (1956) 495; U. E. Kruse, L. Marshall y J. R. Platt, Synchrotron Radiation in the Sun's Radio Spectrum, Astrophys. J. 124 (1956) 605

escape. La contribución no térmica más importante al espectro de radiofrecuencias procedente del Sol parece tener su origen en la radiación ciclotrón de electrones no relativistas.

A favor de este último argumento tenemos el hecho de que una parte significativa de la emisión en radiofrecuencias del Sol tiene lugar simultáneamente para dos frecuencias que difieren en un factor 2 aproximadamente. Cuando un electrón sigue una trayectoria helicoidal a lo largo de una línea de campo magnético decreciente en intensidad, el resultado es la emisión de un espectro de radiación ciclotrón en el que aparecen líneas de armónicos múltiplos de una frecuencia fundamental. Si el electrón se desplaza a una velocidad pequeña comparada con la de la luz, la intensidad del tercer armónico se hace despreciable frente a los observados primer y segundo armónicos.

13.3. Plasmas de fusión

Una característica importante de los plasmas de fusión (tanto en stellarators⁴⁹ como tokamaks⁵⁰) es la presencia de campos magnéticos intensos que permitan su confinamiento. En ambos casos, la emisión de radiación sincrotrón y Cherenkov es factible debido a la existencia de electrones que siguen trayectorias de forma helicoidal.

Al igual que ocurría en el caso de las manchas solares, es altamente improbable que la radiación Cherenkov escape del plasma debido a la presencia de bandas de absorción. No obstante, por tratarse de plasmas de laboratorio de pequeñas dimensiones, existe la posibilidad de que la radiación Cherenkov escape en aquellos lugares donde el campo magnético se curva anormalmente.

La radiación ciclotrón es la componente radiativa no térmica más importante en plasmas de fusión. Como en el caso de las manchas solares en el espectro aparecen armónicos de una frecuencia fundamental, de cuya posición e intensidades relativas se deducen propiedades interesantes relativas a la densidad y temperatura del plasma.

⁴⁹ <http://www-fusion.ciemat.es/fusion/TJII/TJII.html>

⁵⁰ <http://www.jet.efda.org/>

13.4. Pulsares

Citamos el artículo de Kolbenstvedt⁵¹ como uno de los pioneros en sugerir la radiación Cherenkov como posible origen de la emisión en radiofrecuencias de los pulsares. La magnetosfera de los pulsares parece diferir completamente de la de un plasma neutro en reposo. Como consecuencia, las ondas de radio pueden propagarse en cualquier dirección sin sufrir absorción.⁵²

⁵¹ H. Kolbenstvedt, Cherenkov radiation in a charge-separated magnetic plasma as a possible source for radio emission in pulsars, *Phys. Rev.* 15 (1977) 975

⁵² H. Heintzmann, W. Kundt y J. P. Lasota, *Phys. Rev.* A12 (1975) 204

