



MX0300165

## Energía crítica en el calentamiento ciclotrónico de los iones en una máquina espejo.\*

Gutiérrez Tapia César<sup>1</sup> y Hernández Aguirre Omar<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, Apartado Postal 18-1027, México 11801, D. F.

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias, UAEM, Instituto Literario 100, Toluca, México.

### Resumen

El problema del calentamiento en las fuentes de plasma donde la geometría del campo magnético forma un espejo magnético como es el caso de las fuentes tipo ECR, para mantener la descarga, continua siendo un problema actual importante. Existen dos métodos para el análisis de este problema. El primero de estos métodos, es el mecanismo estocástico de una partícula donde se considera la existencia de tres frecuencias características como son la frecuencia ciclotrónica, la frecuencia del campo electromagnético y la frecuencia de tránsito. El segundo método es el relacionado con la interacción no lineal de ondas donde los efectos colectivos de las partículas es el más importante. En este trabajo, en el formalismo Hamiltoniano, el mecanismo estocástico en el calentamiento ciclotrónico es analizado. Se considera el caso particular de una fuente de plasma con un campo magnético externo tipo espejo donde una onda electromagnética TE<sub>11</sub> es inyectada. La energía crítica en el mezclado de resonancias se calcula por el método de mapeos de Poincaré. Se analiza la heterogeneidad del campo magnético.

### Método de promedios

La ecuación de movimiento para una partícula puede ser escrita como

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  es el momento,  $e$  y  $m$  son la carga y la masa de los iones. El campo magnético  $\mathbf{B}$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en (1) se consideran como la suma de campos que varían lentamente en el espacio mas campos que varían rápidamente en la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}. \quad (2)$$

La onda electromagnética que se propaga a lo largo del eje Oz se representa como

$$\tilde{\mathbf{E}} = E_0 \{ \cos(\omega t - kz), \sin(\omega t - kz), 0 \} \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = E_0 \{ -\sin(\omega t - kz), \cos(\omega t - kz), 0 \}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la onda electromagnética, y  $k = \omega/c$  es el vector de onda. El Campo magnético estacionario  $\mathbf{B}_0$  hasta términos de primer orden en relación con la desviación del eje  $z$  se representa como

$$\mathbf{B}_0 = \left\{ -\frac{x}{2} \frac{dB(z)}{dz}, -\frac{y}{2} \frac{dB(z)}{dz}, B(z) \right\}. \quad (4)$$

Ahora, introduciendo las nuevas variables adimensionales

$$\tau = \omega t, X = kx, Y = ky, Z = kz, \quad (5)$$

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{mc}, \dot{X} = \frac{dx}{d\tau} = \frac{v_x}{c}, \rho = X + iY,$$

en (1), y usando las expresiones (3)-(5), las compo-

mentos del momento a lo largo de los ejes OX y OY se pueden obtener como

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= (P_z - 1)g \cos(\tau - Z) - \left( P_x \Omega_0 + P_z \frac{Y}{2} \frac{d\Omega_0}{dZ} \right), \\ \frac{dP_y}{dt} &= (P_z - 1)g \sin(\tau - Z) - \left( P_y \Omega_0 + P_z \frac{X}{2} \frac{d\Omega_0}{dZ} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $\Omega_0 = eB / mc\omega$ , y  $g = eE_0 / mc\omega$  es el parámetro pequeño.

Para usar el método de promedios de Bogoliuvov con resonancias [1] es importante transformar el sistema de ecuaciones (6) a la forma estándar. Este proceso se obtiene mediante la introducción de la variable compleja  $\rho$ :

$$\rho = \zeta \exp\left(\frac{i}{2} \int_0^\tau \Omega_0(\tau') d\tau'\right). \quad (7)$$

En este caso, la ecuación de movimiento en la dirección perpendicular es

$$\zeta' + \omega_0^2 \zeta = -g(1 - Z) \exp[i(\theta - Z)] \quad (8)$$

donde  $\omega_0 = \Omega_0/2$ , y

$$\theta = \tau - \int_0^\tau \Omega_0(\tau') d\tau'.$$

El mapa de Poincaré de la ecuación (8) se muestra en la Fig. 1. De esta figura, podemos observar que cuando la amplitud de la onda crece, la convergencia hacia un cierto punto es más lenta. En el caso de valores muy altos se obtienen resonancias de ordenes más altos (círculos pequeños). Esta figura ilustra el hecho de que existen valores críticos de la absorción de energía en dependencia de la potencia de la onda

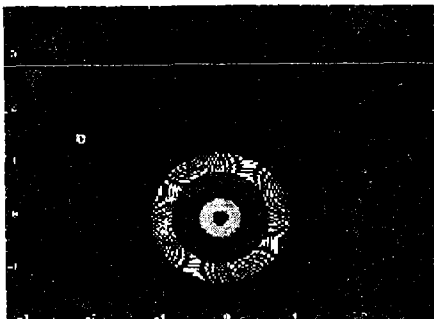


Fig. 1 Mapa de Poincaré obtenido de la ecuación (8), para diferentes potencias del campo electromagnético.

Cerca de la resonancia ciclotrónica,

$$\omega_0 \approx 1 - \Omega_0. \quad (9)$$

Aquí, una forma fácil de obtener la forma estándar de las ecuaciones (6) consiste en introducir las nuevas variables

$$\zeta_1 = a_1 \cos(\theta + \psi_1), \zeta_2 = a_2 \cos(\theta + \psi_2) \quad (10)$$

donde

$a_{1,2}$  y  $\psi_{1,2}$  son funciones desconocidas por determinar, y  $\zeta_1$  se relaciona con  $\zeta_2$  como  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$

Aplicando el método de derivas [1] a las ecuaciones (6) usando las variables (10), el sistema de ecuaciones para  $a_{1,2}$  y  $\psi_{1,2}$  se obtienen en los casos límite

$$g \ll 1, \frac{d\Omega_0}{dZ} \ll 1, |\Omega_0 - 1| \ll 1. \quad (11)$$

Después de una cierta álgebra obtenemos la energía perpendicular promedio correspondiente

$$\begin{aligned} W_\perp &= W_0 \left( \frac{P_x^2 + P_y^2}{2} \right) = \\ &= W_0 \left\{ \frac{\Omega_0(\tau)}{\Omega_0(0)} \frac{P_\perp^2}{2} - g P_\perp(0) \left[ \frac{\Omega_0(\tau)}{\Omega_0(0)} \sin \chi_0 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1 - Z}{\sqrt{\Omega_0(0)\Omega_0(\tau)}} \sin \left( \chi_0 + Z + \int_0^\tau [\Omega_0(\tau') - 1] d\tau' \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $\chi_0$  es la fase inicial,  $\Omega_0(0)$  es el valor inicial de  $\Omega_0(\tau)$  y  $W_0 = mc^2$  es la energía en reposo.

Para analizar la absorción de energía en la resonancia ciclotrónica, consideraremos los parámetros de la fuente de plasma reportados en [3]. El campo magnético  $B_z(z)$  se calcula usando el método descrito en [4]. Los parámetros usados en los cálculos se resumen en la Tabla 1.

$J_1 = J_2 = 50.0A$	$r_1 = r_2 = 8.0cm$	$L_1 = L_2 = 20$	$M_1 = M_2 = 20$
$Z_1 = -60.0cm$	$Z_2 = 60.0cm$	$\chi = 0.0$	$V(0) = 2.65E8cm/s$

Usando estos parámetros, en la Fig. 2 se muestran dos casos para la energía (12) en dependencia de  $\tau = \omega t$ . El

primero corresponde a la intensidad de campo de  $E_0 = 2.62 \times 10^5$  V/cm, y el segundo corresponde al caso cuando  $E_0 = 2.62 \times 10^2$  V/cm asociadas con el parámetro  $g$ . Como se puede ver de estas gráficas, existe un máximo en la absorción de energía. Si la densidad de campo se incrementa, la absorción de energía se frena (el promedio es igual a cero). Aquí surge una gran pregunta, ¿existe solamente un máximo en la absorción de energía?

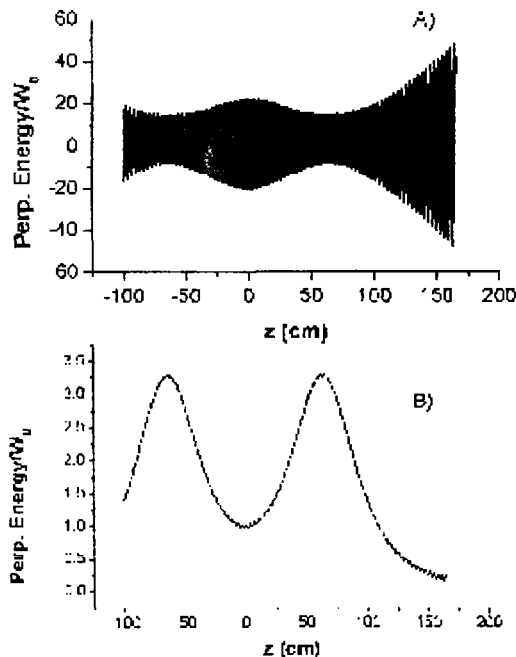


Fig. 2. Distribución de la energía para dos valores de la amplitud de la onda A)  $E_0 = 2.62 \times 10^5$  y B)  $E_0 = 2.62 \times 10^2$

### Obtención del hamiltoniano

Considerando el procedimiento reportado en [5] para describir el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético tipo espejo en presencia de un campo electromagnético, donde el método perturbativo aplicado al Hamiltoniano de la partícula es factible para introducir transformaciones canónicas y así encontrar las coordenadas cíclicas (momentos y frecuencias). Una forma apropiada del Hamiltoniano se obtiene reemplazando las coordenadas cilíndricas por coordenadas ortogonales curvilíneas definidas por las líneas de fuerza del campo magnético. Aplicando el método perturbativo de un sistema multiperíodico al Hamiltoniano en estas coordenadas, el Hamiltoniano para los centros guía se obtiene y para el cual se pueden determinar las integrales de movimiento y

las frecuencias de movimiento. La geometría para un sistema magnético tipo espejo se determina por dos ecuaciones  $\text{rot}\mathbf{B} = 0$ ,  $\text{div}\mathbf{B} = 0$ , y las condiciones e frontera. El movimiento de una partícula se describe por el Hamiltoniano en coordenadas de campo [5]

$$H = H^0 + \Delta H \quad (13)$$

donde  $H^0$  es el Hamiltoniano determinado por el campo magnético externo, y  $\Delta H$  es el Hamiltoniano asociado con el campo electromagnético. Introduciendo el campo magnético para un sistema tipo espejo en la forma

$$B_\phi(\xi, \eta) = 0, B_z(\xi, \eta) = B(z) [1 + k\alpha(z)] \quad (14)$$

donde  $k = 1/B(z)$  y  $B(z)$

es el campo magnético a lo largo del eje  $O_z$ .

Usando el método perturbativo descrito en [5] en relación con el parámetro pequeño  $k$ , y las condiciones iniciales y de frontera: si  $k=0$ ,  $r=\xi$ ,  $z=\eta$ ;  $r(0, \eta)=0$ ,  $z(0, \eta)=0$ , así como las componentes del campo eléctrico para el caso de una guía de onda cilíndrica  $TE_{11}$

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= -iC_0 Z_H \frac{k}{\gamma_{lq}} \frac{l}{r} J_l(\gamma_{lq} r) \sin l\phi \times \\ &\quad \exp[i(kz - \omega t)] + c.c., \\ \vec{E}_\phi &= -iC_0 Z_H \frac{k}{\gamma_{lq}} J_l(\gamma_{lq} r) \cos l\phi \times \\ &\quad \exp[i(kz - \omega t)] + c.c., \\ \vec{E}_z &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $\gamma_{lq} = j'_{lq}/R$ ,  $j'_{lq}$  es la raíz  $n$ -ésima de la ecuación

$$J'_l(x) = 0$$

$R$  es el radio interno de la guía de onda y  $Z_H$

es la impedancia. En el límite de términos lineales respecto del campo eléctrico obtenemos la siguiente expresión para el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= p_1 \Omega_0 (b_0 + kb_1 + k^2 b_2) + \frac{e}{2mc} (b_0 + kb_1 + k^2 b_2) \times \\ &\quad \frac{E_{0r}}{\omega} \sin lq_2 \cos(k\eta - \omega t + \theta_0), \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $b_i$  y  $\tilde{b}_i$  ( $i=0, 1, 2$ ) son funciones de  $(q_1, q_2, q_\eta, p_1, p_2, p_\eta)$ . Aquí hemos transformado canónicamente introduciendo las variables [5]

$$\begin{aligned}\xi^2 &= \frac{2}{m\Omega_0} \left[ p_1 + p_2 + 2\sqrt{p_1 p_2} \sin(q_1 + q_2) \right] \\ p_\xi^2 \xi^2 &= 2p_1 p_2 \cos^2(q_1 + q_2) \\ \varphi &= \arctan \frac{\sqrt{2p_1} \cos q_1 + \sqrt{2p_2} \sin q_2}{\sqrt{2p_1} \sin q_1 + \sqrt{2p_2} \cos q_2}, \\ p_\varphi &= p_2 - p_1,\end{aligned}\tag{17}$$

Donde  $p_i$  ( $i = 1, 2, \eta$ ) son las acciones y  $q_i$  ( $i = 1, 2$ ) son los ángulos que tienen el sentido de las frecuencias ciclotrónica y de deriva como se reporta en [5]. La expresión (16) se obtiene en el límite

$$\sqrt{p_1 / p_2} \ll 1$$

### Análisis estocástico

De la expresión (20) para  $H_0$  podemos determinar  $\eta$  hasta términos de orden cero con respecto a  $k$  como sigue

$$\eta = \frac{v_\eta}{p_1 \Omega_0} t + \eta_0,\tag{18}$$

transformando el Hamiltoniano a la forma

$$\begin{aligned}H &= p_1 \Omega_0 \left[ \cos^2(q_1 + q_2) + \frac{p_\eta^2}{2mp_1 \Omega_0} \right] + \\ &\frac{eE_{0r}}{4mc\omega} \sqrt{2p_1 m \Omega_0} \sin l q_2 \times \\ &\left[ \cos(q_2 + (\Omega_0 - k v_\eta + \omega) - \theta_0) + \right. \\ &\left. \cos(q_2 + (\Omega_0 - k v_\eta + \omega) + \theta_0) \right]\end{aligned}$$

(19)

Aquí, se ha considerado que  $q_1 = \Omega_0 t + \bar{k} = k/p_1 \Omega_0$ . En la resonancia exacta, cuando  $\Omega_0 \pm (k v_\eta - \omega) = 0$ , de la última expresión obtenemos

$$\begin{aligned}H_{\text{res}} &\approx p_1 \Omega_0 \left[ \cos^2(q_1 + q_2) + \frac{p_\eta^2}{2mp_1 \Omega_0} \right] + \\ &\frac{eE_{0r}}{8mc\omega} \sqrt{2p_1 m \Omega_0} \left[ \sin(l+1)q_2 + \right. \\ &\left. \sin(l-1)q_2 \right] = E = \text{const.}\end{aligned}$$

(20)

El último resultado muestra que no existen otras constantes de movimiento adicionales a la energía por lo que podemos estar seguros de que el sistema es estocástico. Este resultado fue obtenido en in [6], donde una onda electrostática es analizada. Para estudiar el surgimiento de la estocasticidad es importante la construcción de los mapeos de Poincaré a partir del Hamiltoniano (20) en dependencia de la amplitud de la onda y a términos de mas alto orden.

### Bibliografía

1. N. N. Bogoliuvov and Y. A. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Gordon and Breach, New York (1961).
2. V. P. Milant'ev, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.*, 85, 132 (1983).
3. E. Camps, O. Olea, C. Gutiérrez-Tapia and M Villagrán, *Rev.Sci.Instrum.*, 66, 3219 (1995)
4. C. Gutiérrez-Tapia, *Proc. Int. Conf. & School on Plasma Phys. & Contr. Fusion, Alushta, Ukraine, 2002*.
5. J. Lacina, *Czech.J.Phys.*, B 13, 401 (1989).
6. G. R. Smith and A. N. Smith, *Phys.Rev.Lett.*, 34, 1613 (1975).

\*Este trabajo fue parcialmente financiado por el proyecto CONACyT 33873-E