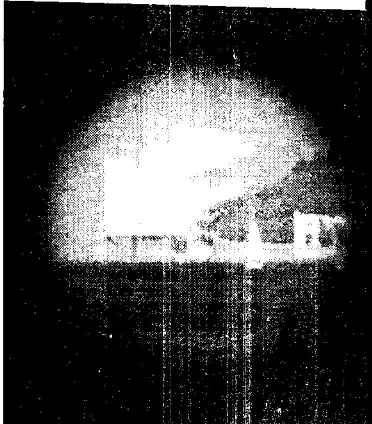
the
abdus salam
international
centre
for theoretical
physics

united nations
educational, scientific
and cultural
organization

ational atomic
energy agency



preprint

ALGEBRES DE LIE D'HOMOTOPIE ASSOCIEES A UNE PROTO-BIGEBRE DE LIE

Momo Bangoura

Available at: `http://www.ictp.trieste.it/~pub_off` IC/2003/126

United Nations Educational Scientific and Cultural Organization
and
International Atomic Energy Agency
THE ABDUS SALAM INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

ALGÈBRES DE LIE D'HOMOTOPIE ASSOCIÉES À UNE PROTO-BIGÈBRE DE LIE

Momo Bangoura[1]
Département de Mathématiques, Université de Conakry, B.P. 1147, République de Guinée
and
The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

Abstract

Motivated by the search for examples of homotopy Lie algebras, to any Lie proto-bialgebra structure on a finite-dimensional vector space F, we associate two homotopy Lie algebra structures defined on the suspension of the exterior algebra of F and that of its dual F^*, respectively, with a 0-ary map corresponding to the image of the empty set. In these algebras, all n-ary brackets for $n \geq 4$ vanish. More generally, to any element of odd degree in $\bigwedge(F^* \bigoplus F)$, we associate a set of n-ary skew-symmetric mappings on the suspension of $\bigwedge F$ (resp. $\bigwedge F^*$), which satisfy the generalized Jacobi identities if the given element is of square zero.

MIRAMARE – TRIESTE
October 2003

[1]Regular Associate of the Abdus Salam ICTP. angoura@gn.refer.org

Résumé

Motivé par la recherche d'exemples d'algèbre de Lie d'homotopie, on associe à toute structure de proto-bigèbre de Lie sur un espace vectoriel F de dimension finie, deux structures d'algèbre de Lie d'homotopie définies respectivement sur la suspension de l'algèbre extérieure de F et celle de son dual F^*, qui comportent une application 0-aire correspondant à l'image de l'ensemble vide. Dans ces algèbres, tous les crochets n-aires sont nuls pour $n \geq 4$. Plus généralement, on associe à un élément de degré impair quelconque de $\bigwedge(F^* \bigoplus F)$, une collection d'applications n-aires antisymétriques sur la suspension de $\bigwedge F$ (resp. $\bigwedge F^*$), qui vérifient les identités de Jacobi généralisées si l'élément donné est de carré nul.

1. Introduction

Les algèbres de Lie d'homotopie ou L_∞-algèbres ont été introduites par Stasheff (voir [11]) comme étant des déformations des algèbres de Lie en vue d'applications à la physique théorique; elles sont caractérisées par la donnée sur un espace vectoriel gradué d'une collection d'applications n-aires antisymétriques de degré $2-n$, satisfaisant un ensemble de relations généralisant l'identité de Jacobi pour les algèbres de Lie, appelées identités de Jacobi généralisées.

La notion de proto-bigèbre de Lie a été introduite par Y. Kosmann-Schwarzbach [5] comme une généralisation naturelle de la notion de bigèbre de Lie ([2], [3]) dont celles de quasi-bigèbre de Lie ([4],[5]) et bigèbre de quasi-Lie [5] sont des cas particuliers; elle est caractérisée par la donnée d'un espace vectoriel F de dimension finie et d'un élément M de $\bigwedge(F^* \oplus F)$ de degré 1, de carré nul.

Dans [15], Voronov a donné une construction algébrique générale conduisant à des algèbres de Lie d'homotopie en considérant une super-algèbre de Lie V avec un projecteur P sur une sous-algèbre abélienne vérifant une certaine condition dite de distributivité. En fait, à partir d'un élément Δ de V de degré impair, il construit une suite de crochets n-aires symétriques au sens $\mathbb{Z}_2$-gradué sur l'image de P, appelés crochets dérivés ([6], [14], [15]) et qui vérifient les identités de Jacobi généralisées si Δ est de carré nul. Dans ce travail, nous nous intéressons au cas $\mathbb{Z}$-gradué, où pour un espace vectoriel F de dimension finie, nous associons à toute structure de proto-bigèbre de Lie sur F deux structures d'algèbre de Lie d'homotopie définies respectivement sur $\bigwedge F[1]$ et $\bigwedge F^*[1]$; nous convenons d'appeler de telles structures des algèbres quasi-Gerstenhaber quasi-différentielles. Dans une seconde phase nous donnons la version $\mathbb{Z}$-graduée de la construction de [15] dans le cas particulier de $\bigwedge(F^* \oplus F)$ munie du grand crochet par rapport auquel $\bigwedge F$ et $\bigwedge F^*$ sont des sous-algèbres abéliennes. Plus précisement, à un élément M de $\bigwedge(F^* \oplus F)$ de degré impair quelconque, on associe des crochets n-aires sur $\bigwedge F$ et $\bigwedge F^*$ qui sont antisymétriques, vérifient les identités de Jacobi généralisées si M est de carré nul et l'on obtient ainsi des structures d'algèbre de Lie d'homotopie sur $\bigwedge F[1]$ et $\bigwedge F^*[1]$. Un tel élément M étant décomposable dans $\bigwedge(F^* \oplus F)$, nous donnons les expressions explicites des différents crochets en fonction de ses composantes.

2. Grand crochet et structures reliées

Soit F un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Considérons l'algèbre extérieure de la somme directe $F^* \oplus F$,

$$\bigwedge(F^* \oplus F) = \bigoplus_{k \geq -2} \Lambda^{(k)}(F)$$

où

$$\Lambda^{(k)}(F) = \bigoplus_{p+q=k} (\Lambda^{q+1} F^* \bigotimes \Lambda^{p+1} F), \quad p \geq -1, \quad q \geq -1.$$

Un élément de $\bigwedge^{q+1} F^* \bigotimes \bigwedge^{p+1} F$ est dit de bidegré (p,q) et les éléments de $\bigwedge^{(k)}(F)$ sont dits de degré k.

Définition 1. *Le grand crochet est la structure d'algèbre de Lie graduée* $[.,.]$ *sur* $\Lambda(F^* \oplus F)$ *définie par les conditions suivantes :*
- *Si* $\sigma \in \mathbb{K}$ *ou* $\sigma' \in \mathbb{K}$, $[\sigma, \sigma'] = 0$,
- *si* $\sigma, \sigma' \in F$, $\quad [\sigma, \sigma'] = 0$,
- *si* $\sigma, \sigma' \in F^*$, $\quad [\sigma, \sigma'] = 0$,
- *si* $\sigma \in F$ *et* $\sigma' \in F^*$, $\quad [\sigma, \sigma'] = < \sigma', \sigma >$ *où* $< .,. >$ *désigne la dualité naturelle,*
- *la règle de Leibniz graduée : si* $\sigma \in \bigwedge^{(k)}(F)$, $\quad \sigma' \in \bigwedge^{(k')}(F)$, $\quad \sigma" \in \bigwedge^{(k")}(F)$,

$$[\sigma, \sigma' \wedge \sigma"] = [\sigma, \sigma'] \wedge \sigma" + (-1)^{kk'} \sigma' \wedge [\sigma, \sigma"].$$

Comme structure d'algèbre de Lie graduée, le grand crochet vérifie les propriétés suivantes :
- l'antisymétrie graduée

$$[\sigma, \sigma'] = -(-1)^{kk'}[\sigma', \sigma],$$

si $\sigma \in \bigwedge^{(k)}(F)$, $\quad \sigma' \in \bigwedge^{(k')}(F)$,
- l'identité de Jacobi graduée

$$\oint (-1)^{k_1 k_3} [\sigma_1, [\sigma_2, \sigma_3]] = 0$$

si $\sigma_1 \in \bigwedge^{(k_1)}(F)$, $\quad \sigma_2 \in \bigwedge^{(k_2)}(F)$, $\quad \sigma_3 \in \bigwedge^{(k_3)}(F)$, où $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires de $\{1, 2, 3\}$.
Remarque : $\bigwedge F$ et $\bigwedge F^*$ sont des sous-algèbres de Lie abéliennes de $(\bigwedge(F^* \oplus F), [.,.])$.

Suivant ([5], [12]) on a

Définition 2. *Un élément de degré 1,* $M \in \bigwedge^{(1)}(F)$, *est une structure sur* F *s'il est de carré nul dans* $(\bigwedge(F^* \oplus F), [.,.])$, *i.e.,*

$$[M, M] = 0.$$

Un tel élément est de la forme

$$M = \mu + \gamma + \varphi + \psi,$$

où $\mu \in \bigwedge^2 F^* \bigotimes F$, $\gamma \in F^* \bigotimes \bigwedge^2 F$, $\varphi \in \bigwedge^3 F$ et $\psi \in \bigwedge^3 F^*$. Tenant compte des bidegrés des différents éléments, la condition $[M, M] = 0$ est équivalente aux suivantes :

$$\frac{1}{2}[\mu, \mu] + [\gamma, \psi] = 0$$
$$[\mu, \gamma] + [\varphi, \psi] = 0$$
$$\frac{1}{2}[\gamma, \gamma] + [\mu, \varphi] = 0$$
$$[\mu, \psi] = 0$$

$$[\gamma,\varphi]=0$$

Définition 3. *Pour un espace vectoriel donné F et des éléments μ, γ, φ et ψ donnés de $\bigwedge(F^*\oplus F)$ satisfaisant les conditions ci-dessus, $(F,\mu,\gamma,\varphi,\psi)$ est appelé une proto-bigèbre de Lie.*

Remarque : Si $(F,\mu,\gamma,\varphi,\psi)$ est une proto-bigèbre de Lie, alors $(F^*,\gamma,\mu,\psi,\varphi)$ est aussi une proto-bigèbre de Lie, ainsi que la notion de proto-bigèbre de Lie est auto-duale.

Définition 4. *Si $\psi=0$ (resp. $\varphi=0$) le quadruplet (F,μ,γ,φ) (resp. (F,μ,γ,ψ)) satisfaisant les conditions ci-dessus est appelé une quasi-bigèbre de Lie (resp. bigèbre de quasi-Lie).*

On remarque que ces deux notions sont duales l'une de l'autre et ne sont pas auto-duales contrairement a la notion plus générale de proto-bigèbre de Lie. Si $\varphi=\psi=0$, le triplet (F,μ,γ) est une bigèbre de Lie ([2], [3]).

Exemple 1. *Soit (F,μ) une algèbre de Lie. Alors tout choix d'un élément $\mathbf{r}\in\bigwedge^2 F$ définit une structure de quasi-bigèbre de Lie sur F en posant*

$$\gamma=[\mu,\mathbf{r}],\quad \varphi=\frac{1}{2}[\mathbf{r},\mathbf{r}]^{\mu}$$

où $[\mathbf{r},\mathbf{r}]^{\mu}$ désigne le crochet de Schouten algébrique ([8], [9]) de $\mathbf{r}$ avec lui-même.

Exemple 2. *Soit F un espace vectoriel de dimension finie; soient $\varphi\in\bigwedge^3 F$ et $\omega\in\bigwedge^2 F^*$. Posons*

$$\mu=\frac{1}{2}[\omega,[\omega,\varphi]]$$

$$\gamma=[\omega,\varphi]$$

$$\psi=\frac{1}{6}[\omega,[\omega,[\omega,\varphi]]].$$

Alors $(F,\mu,\gamma,\varphi,\psi))$ est une proto-bigèbre de Lie.

Exemple 3. *Soit F un espace vectoriel de dimension finie; soient $\mathbf{r}\in\bigwedge^2 F$ et $\psi\in\bigwedge^3 F^*$. Posons*

$$\mu=[\mathbf{r},\psi]$$

$$\gamma=\frac{1}{2}[\mathbf{r},[\mathbf{r},\psi]]$$

$$\varphi=\frac{1}{6}[\mathbf{r},[\mathbf{r},[\mathbf{r},\psi]]].$$

Alors $(F,\mu,\gamma,\varphi,\psi))$ est une proto-bigèbre de Lie.

3. Algèbres de Lie d'homotopie

De ([11],[10]) on a

Définition 5. *Une algèbre de Lie d'homotopie ou L_∞-algèbre est un espace vectoriel gradué V muni d'une collection d'applications n-linéaires antisymétriques $l_n : \bigotimes^n V \mapsto V$ de degré $2-n$, telle que*

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma} sign(\sigma)\varepsilon(\sigma)(-1)^{i(j-1)} l_i(l_j(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(j)}),x_{\sigma(j+1)},...,x_{\sigma(n)}) = 0,$$

pour tout $n = 0,1,...$ où σ est une permutation de $\{1,...,n\}$ telle que $\sigma(1) < ... < \sigma(j)$ et $\sigma(j+1) < ... < \sigma(n)$, $sign(\sigma)$ désigne la signature de σ et $\varepsilon(\sigma)$ est le signe défini par

$$x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n = \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \wedge x_{\sigma(2)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(n)}.$$

Les identités ci-dessus sont appelées les identités de Jacobi généralisées et le premier membre pour chaque n est appelé le n-ieme jacobiateur.
Remarque : Dans [11], le cas $n=0$ ne figure pas dans la définition d'une L_∞-algèbre; ici et dans toute la suite, une application 0-aire signifiera tout simplement un élément distingué ϕ de V correspondant à l'image de l'ensemble vide, i.e $\phi = l_0(\emptyset)$. Les structures de L_∞-algèbre avec $\phi = 0$ sont dites exactes au sens de [15].
Les identités de Jacobi généralisées s'écrivent explicitement pour n = 0, 1 et 2 sous la forme :
$n = 0$

$$-l_1(l_0(\emptyset)) = -l_1(\phi) = 0 \Leftrightarrow l_1(l_0(\emptyset)) = l_1(\phi) = 0,$$

$n = 1$

$$l_1(l_1(x)) + l_2(\phi, x) = 0,$$

$n = 2$

$$-l_1(l_2(x,y)) + l_2(l_1(x),y) - (-1)^{|x||y|} l_2(l_1(y),x) - l_3(\phi,x,y) = 0$$

pour tous $x, y \in V$.
Dans le cas strict, i.e $\phi = 0$, les identités pour $n=1$ et $n=2$ expriment que l_1 est de carré nul et est une dérivation par rapport à l_2.

4. Crochets n-aires associés à une structure

Soit $M = \mu + \gamma + \varphi + \psi \in \bigwedge(F^* \oplus F)$ une structure sur F comme définie dans la section 2. Sur $\bigwedge F$ (resp. $\bigwedge F^*$), définissons des applications n-aires $\{.,...,.\}_n : \bigotimes^n \bigwedge F \mapsto \bigwedge F$ (resp. $\{.,...,.\}^*_n : \bigotimes^n \bigwedge F^* \mapsto \bigwedge F^*$) de la manière suivante:

$$\{\emptyset\}_0 = \varphi,$$

$$\{x_1\}_1 = [\gamma, x_1] = d_\gamma(x_1)$$

$$\{x_1, x_2\}_2 = (-1)^{(|x_1|-1)}[[\mu, x_1], x_2] = [x_1, x_2]^\mu$$

$$\{x_1, x_2, x_3\}_3 = (-1)^{(|x_2|-1)}[[[\psi, x_1], x_2], x_3],$$

$$\{x_1, ..., x_n\}_n = 0 \quad pour \quad n \geq 4$$

(respectivement

$$\{\emptyset\}_0^* = \psi,$$

$$\{\alpha_1\}_1^* = [\mu, \alpha_1] = d_\mu(\alpha_1)$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2\}_2^* = (-1)^{(|\alpha_1|-1)}[[\gamma, \alpha_1], \alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2]^\gamma$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}_3^* = (-1)^{(|\alpha_2|-1)}[[[\varphi, \alpha_1], \alpha_2], \alpha_3],$$

$$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}_n^* = 0 \quad pour \quad n \geq 4.)$$

Nous appellerons ces applications, les *crochets n-aires associés* à la structure M. Soit $\bigwedge F[1]$ (resp. $\bigwedge F^*[1]$) la suspension de $\bigwedge F$ (resp. $\bigwedge F^*$), i.e $\bigwedge^p F[1] = \bigwedge^{p+1} F$ (resp. $\bigwedge^p F^*[1] = \bigwedge^{p+1} F^*$). On a le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit $M = \mu+\gamma+\varphi+\psi$ une structure sur F. Alors les crochets n-aires $\{., ..., .\}_n$ sur $\bigwedge F[1]$ et $\{., ..., .\}_n^*$ sur $\bigwedge F^*[1]$ associés à M sont antisymétriques, de degré $2-n$. De plus chaque crochet n-aire est une dérivation en chacun de ses arguments.*

Démonstration : On démontre la proposition dans le cas de $\bigwedge F[1]$, le cas $\bigwedge F^*[1]$ étant analogue. L'antisymétrie des crochets n-aires est une conséquence directe de l'identité de Jacobi graduée pour le grand crochet; on a

$$\{x_1, x_2\}_2 = -(-1)^{(|x_1|-1)(|x_2|-1)}\{x_2, x_1\}_2$$

et

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, x_3\}_3 &= -(-1)^{(|x_1|-1)(|x_2|-1)}\{x_2, x_1, x_3\}_3 \\ &= -(-1)^{(|x_2|-1)(|x_3|-1)}\{x_1, x_3, x_2\}_3 \end{aligned}$$

Remarquons que $\varphi \in \bigwedge^3 F$ est de degré 2 dans $\bigwedge F[1]$; le degré de $\{\}_0$ est donc égal à $2 = 2-0$.
Par ailleurs, pour $x_1 \in \bigwedge^{p+1} F$ on a :
$[\gamma, x_1] \in \bigwedge^{p+2} F$, le degré de $\{.\}_1$ est ainsi égal à $1 = 2-1$.
Pour $x_1 \in \bigwedge^{p+1} F, \quad x_2 \in \bigwedge^{q+1} F$, on a
$[[\mu, x_1], x_2] \in \bigwedge^{p+q+1} F$; par conséquent le degré du crochet binaire $\{., .\}_2$ est égal à $0 = 2-2$.
Pour $x_1 \in \bigwedge^{p+1} F, \quad x_2 \in \bigwedge^{q+1} F, \quad x_3 \in \bigwedge^{r+1} F$, on a
$[[[\psi, x_1], x_2], x_3] \in \bigwedge^{p+q+r} F$; donc le degré du crochet trilinéaire $\{., ., .\}_3$ est égal à $-1 = 2-3$.
Le fait que chaque crochet n-aire soit une dérivation en chacun de ses arguments suit par la règle de Leibniz graduée du grand crochet.
Ce qui démontre la proposition. □

On peut à présent lier les crochets n-aires associés à une structure M sur F avec la donnée d'une structure d'algèbre de Lie d'homotopie; plus précisement on a

Théorème 1. *Soit $M = \mu + \gamma + \varphi + \psi \in \bigwedge(F^* \bigoplus F)$ une structure sur F; alors les crochets n-aires sur $\bigwedge F$ (resp. $\bigwedge F^*$) associés à M définissent une structure de L_∞-algèbre sur $\bigwedge F[1]$ (resp. $\bigwedge F^*[1]$) avec*

$$l_n = \{.,...,.\}_n \quad n = 0,1,2,...$$

(resp.

$$l_n^* = \{.,...,.\}_n^* \quad n = 0,1,2,...)$$

Démonstration : Démontrons le résultat dans le cas de $\bigwedge F[1]$, le cas de $\bigwedge F^*[1]$ est analogue; d'après la proposition précédente, chaque crochet n-aire associé à M est antisymétrique et de degré $2-n$. Les identités de Jacobi généralisées sont des conséquences directes de la condition $[M,M] = 0$ et de l'identité de Jacobi graduée pour le grand crochet. Comme $\{.,...,.\}_n = 0$ pour $n \geq 4$, nous avons à démontrer les identités de Jacobi généralisées pour $n = 0,1,2,3,4$ et 5. En effet

- pour $n = 0$, on a :

$$\{\{\emptyset\}_0\}_1 = \{\varphi\}_1 = [\gamma, \varphi]0,$$

d'après $[M,M] = 0$; ce qui démontre l'identité de Jacobi généralisée pour $n = 0$.

- Pour $n = 1$, $x_1 \in \bigwedge F$ on a :

$$\{\{x_1\}_1\}_1 = [\gamma,[\gamma,x_1]] = \frac{1}{2}[[\gamma,\gamma],x_1] = -[[\mu,\varphi],x_1] = -\{\varphi,x_1\}_2$$

i.e.

$$\{\{x_1\}_1\}_1 + \{\varphi, x_1\}_2 = 0;$$

ce qui démontre l'identité de Jacobi généralisée pour $n = 1$.

- Pour $n = 2$, $x_1 \in \bigwedge^p F$, $x_2 \in \bigwedge^q F$, utilisant l'identité de Jacobi graduée pour le grand crochet on a :

$$\begin{aligned}
\{\{x_1,x_2\}_2\}_1 &= [\gamma,[[x_1,\mu],x_2]] \\
&= [[[\gamma,x_1],\mu],x_2] + (-1)^p[[x_1,[\gamma,\mu]],x_2] \\
&\quad +(-1)^{p-1}[[x_1,\mu],[\gamma,x_2]] \\
&= \{\{x_1\}_1,x_2\}_2 + (-1)^{p-1}\{x_1,\{x_2\}_1\}_2 \\
&\quad -(-1)^p[[x_1,[\varphi,\psi]],x_2] \\
&= \{\{x_1\}_1,x_2\}_2 + (-1)^{p-1}\{x_1,\{x_2\}_1\}_2 \\
&\quad -(-1)^{(p-1)}[[[\psi,\varphi],x_1],x_2] \\
&= \{\{x_1\}_1,x_2\}_2 + (-1)^{p-1}\{x_1,\{x_2\}_1\}_2 - \{\varphi,x_1,x_2\}_3;
\end{aligned}$$

d'où

$$\{\{x_1,x_2\}_2\}_1 - \{\{x_1\}_1,x_2\}_2 + (-1)^{(p-1)(q-1)}\{\{x_2\}_1,x_1\}_2 + \{\varphi,x_1,x_2\}_3 = 0;$$

ce qui prouve l'identité de Jacobi généralisée pour $n = 2$.

- Pour $n = 3$, $x_1 \in \bigwedge^p F$, $x_2 \in \bigwedge^q F$, $x_3 \in \bigwedge^r F$, utilisant l'identité de Jacobi graduée pour le grand crochet on a :

$$\begin{aligned}
\{\{x_1, x_2, x_3\}_3\}_1 &= (-1)^{(q-1)}[\gamma, [[[\psi, x_1], x_2], x_3]] \\
&= (-1)^{(q-1)}[[[[\gamma, \psi], x_1], x_2], x_3] \\
&\quad -(-1)^{(q-1)}[[[\psi, [\gamma, x_1]], x_2], x_3] \\
&\quad +(-1)^{(q-1)}(-1)^{(p-1)}[[[\psi, x_1], [\gamma, x_2]], x_3] \\
&\quad -(-1)^{(p-1)}[[[\psi, x_1], x_2], [\gamma, x_3]] \\
&= \frac{1}{2}(-1)^q[[[[\mu, \mu], x_1], x_2], x_3] \\
&\quad -\{\{x_1\}_1, x_2, x_3\}_3 \\
&\quad -(-1)^{(p-1)}\{x_1, \{x_2\}_1, x_3\}_3 \\
&\quad -(-1)^{(p+q)}\{x_1, x_2, \{x_3\}_1\}_3.
\end{aligned}$$

Mais, utilisant de nouveau l'identité de Jacobi graduée pour le grand crochet,

$$\begin{aligned}
[[[[\mu, \mu], x_1], x_2], x_3] &= 2(-1)^p[[\mu, x_1], [[\mu, x_2], x_3]] \\
&\quad 2(-1)^{(p+r(q-1))}[[[\mu, x_1], x_3], [\mu, x_2]] \\
&\quad +2(-1)^{(p+q)}[[[[\mu, x_1], x_2], \mu], x_3] \\
&= 2(-1)^q(-\{\{x_1, x_2\}_2, x_3\}_2 \\
&\quad -(-1)^{(p-1)(q+r)}\{\{x_2, x_3\}_2, x_1\}_2 \\
&\quad +(-1)^{(q-1)(r-1)}\{\{x_1, x_3\}_2, x_2\}_2).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\{\{x_1, x_2, x_3\}_3\}_1 &+ \{\{x_1\}_1, x_2, x_3\}_3 - (-1)^{(p-1)(q-1)}\{\{x_2\}_1, x_1, x_3\}_3 \\
&+ (-1)^{(p+q)(r-1)}\{\{x_3\}_1, x_1, x_2\}_3 + \{\{x_1, x_2\}_2, x_3\}_2 \\
&+ (-1)^{(p-1)(q+r)}\{\{x_2, x_3\}_2, x_1\}_2 \\
&- (-1)^{(q-1)(r-1)}\{\{x_1, x_3\}_2, x_2\}_2) = 0.
\end{aligned}$$

Comme $\{\varphi, x_1, x_2, x_3\}_4 = 0$ car $\{., ..., .\}_n = 0$ pour $n \geq 4$, l'égalité ci-dessus prouve l'identité de Jacobi généralisée pour $n = 3$.

- Pour $n = 4$, l'identité de Jacobi généralisée suit par la condition $[\mu, \psi] = 0$; en effet pour $x_1 \in \bigwedge^p F$, $x_2 \in \bigwedge^q F$, $x_3 \in \bigwedge^r F$, $x_4 \in \bigwedge^s F$, utilisant l'identité de Jacobi graduée pour le grand crochet on a :

$$
\begin{aligned}
&[[[[[\mu,\psi],x_1],x_2],x_3],x_4] = \\
&= \quad [[[[[\psi,\mu],x_1],x_2],x_3],x_4] \\
&= \quad [[[\psi,[[\mu,x_1],x_2]],x_3],x_4] \\
&\qquad +(-1)^{q(p-1)}[[[\psi,x_2],[[\mu,x_1],x_3]],x_4] \\
&\qquad +(-1)^{p}[[[\psi,x_1],[[\mu,x_2],x_3]],x_4] \\
&\qquad +(-1)^{(p-1)(r+q)}[[[\psi,x_2],x_3],[[\mu,x_1],x_4]] \\
&\qquad +(-1)^{(p-1)(q+r+s)}[[[[\psi,x_2],x_3],x_4],[\mu,x_1]] \\
&\qquad +(-1)^{p+(q-1)r}[[[\psi,x_1],x_3],[[\mu,x_2],x_4]] \\
&\qquad (-1)^{p+(q-1)(r+s)}[[[[\psi,x_1],x_3],x_4],[\mu,x_2]] \\
&\qquad +(-1)^{(p+q)}[[[\psi,x_1],x_2],[[\mu,x_3],x_4]] \\
&\qquad +(-1)^{(p+q+(r-1)s)}[[[[\psi,x_1],x_2],x_4],[\mu,x_3]] \\
&\qquad +(-1)^{(p+q+r)}[[[[[\psi,x_1],x_2],x_3],\mu],x_4]
\end{aligned}
$$

Revenant à la définition des différents crochets en utilisant l'antisymétrie, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&[[[[[\mu,\psi],x_1],x_2],x_3],x_4] = \\
&= \quad -(-1)^{(p+r)}(-\{\{x_1,x_2\}_2,x_3,x_4\}_3 \\
&\qquad +(-1)^{(q-1)(r-1)}\{\{x_1,x_3\}_2,x_2,x_4\}_3 \\
&\qquad -(-1)^{(p-1)(q+r)}\{\{x_2,x_3\}_2,x_1,x_4\}_3 \\
&\qquad -(-1)^{(q+r)(s-1)}\{\{x_1,x_4\}_2,x_2,x_3\}_3 \\
&\qquad +(-1)^{((p-1)(q+s)+(r-1)(s-1))}\{\{x_2,x_4\}_2,x_1,x_3\}_3 \\
&\qquad -(-1)^{(p+q)(r+s)}\{\{x_3,x_4\}_2,x_1,x_2\}_3 \\
&\qquad +(-1)^{(q-1)(r+s)}\{\{x_1,x_3,x_4\}_3,x_2\}_2 \\
&\qquad -(-1)^{(p-1)(q+r+s-1)}\{\{x_2,x_3,x_4\}_3,x_1\}_2 \\
&\qquad -(-1)^{(r-1)(s-1)}\{\{x_1,x_2,x_4\}_3,x_3\}_2 \\
&\qquad +\{\{x_1,x_2,x_3\}_3,x_4\}_2)
\end{aligned}
$$

Comme $[\mu,\psi]=0$ d'après $[M,M]=0$, simplifiant le second membre de cette dernière égalité par $-(-1)^{p+r}$, la relation obtenue est exactement l'identité de Jacobi généralisée pour $n=4$.
- Enfin, pour $n=5$, l'identité de Jacobi généralisée suit par $[\psi,\psi]=0$; en effet pour $x_1\in\bigwedge^p F$, $x_2\in\bigwedge^q F$, $x_3\in\bigwedge^r F$, $x_4\in\bigwedge^s F$, $x_5\in\bigwedge^t F$, utilisant l'identité de Jacobi graduée pour le grand crochet on a :

$$
\begin{aligned}
&[[[[[\psi,\psi],x_1],x_2],x_3],x_4],x_5] = \\
&= \ 2[[[\psi,[[[\psi,x_1],x_2],x_3]],x_4],x_5] \\
&\quad +2(-1)^{r(p+q-1)}[[[[\psi,x_3],[[[\psi,x_1],x_2]],x_4]],x_5] \\
&\quad +2(-1)^{(r+s)(p+q-1)}[[[[\psi,x_3],x_4],[[\psi,x_1],x_2]],x_5] \\
&\quad +2(-1)^{(r+s+t)(p+q-1)}[[[[\psi,x_3],x_4],x_5],[[\psi,x_1],x_2]] \\
&\quad +2(-1)^{q(p-1)}[[[[\psi,x_2],[[[\psi,x_1],x_3]],x_4]],x_5] \\
&\quad +2(-1)^{(q(p-1)+s(p+r-1))}[[[[\psi,x_2],x_4],[[[\psi,x_1],x_3]],x_5]] \\
&\quad +2(-1)^{(q(p-1)+(s+t)(p+r-1))}[[[[\psi,x_2],x_4],x_5],[[\psi,x_1],x_3]] \\
&\quad +2(-1)^{(p-1)(q+r)}[[[[\psi,x_2],x_3],[[[\psi,x_1],x_4]],x_5]] \\
&\quad +2(-1)^{(q(p-1)+t(p+s-1))}[[[[\psi,x_2],x_3],x_5],[[\psi,x_1],x_4]] \\
&\quad +2(-1)^{(p-1)(q+r+s)}[[[[\psi,x_2],x_3],x_4],[[\psi,x_1],x_5]]
\end{aligned}
$$

Revenant à la définition du crochet $\{.,.,.\}_3$ et en utilisant l'antisymétrie, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&[[[[[\psi,\psi],x_1],x_2],x_3],x_4],x_5] = \\
&= \ 2(-1)^{(q+s)}(\{\{x_1,x_2,x_3\}_3,x_4,x_5\}_3 \\
&\quad -(-1)^{(r-1)(s-1)}\{\{x_1,x_2,x_4\}_3,x_3,x_5\}_3 \\
&\quad +(-1)^{(r+s)(t-1)}\{\{x_1,x_2,x_5\}_3,x_3,x_4\}_3 \\
&\quad -(-1)^{(p+q)(r+s+t-1)}\{\{x_3,x_4,x_5\}_3,x_1,x_2\}_3 \\
&\quad +(-1)^{(q-1)(r+s)}\{\{x_1,x_3,x_4\}_3,x_2,x_5\}_3 \\
&\quad +(-1)^{((q-1)(r+t)+(t-1)(s-1))}\{\{x_1,x_3,x_5\}_3,x_2,x_4\}_3 \\
&\quad -(-1)^{((p-1)(q+s+t-1)+(r-1)(s+t))}\{\{x_2,x_4,x_5\}_3,x_1,x_3\}_3 \\
&\quad +(-1)^{(q+r)(s+t)}\{\{x_1,x_4,x_5\}_3,x_2,x_3\}_3 \\
&\quad +(-1)^{((p-1)(q+r+t-1)+(s-1)(t-1))}\{\{x_2,x_3,x_5\}_3,x_1,x_4\}_3 \\
&\quad -(-1)^{(p-1)(q+r+s-1)}\{\{x_2,x_3,x_4\}_3,x_1,x_5\}_3).
\end{aligned}
$$

Comme $[\psi,\psi]=0$ pour cause de degré, simplifiant le second membre par $2(-1)^{(q+s)}$, la relation obtenue est exactement l'identité de Jacobi généralisée pour $n=5$.
Pour $n\geq 6$, l'identité de Jacobi généralisée est une trivialité dûe au fait que $\{.,...,.\}_k=0$ pour $k\geq 4$.
Ce qui démontre le théorème. $\square$

Ainsi on vient de prouver qu'à toute structure de proto-bigèbre de Lie $(F,\mu,\gamma,\varphi,\psi)$ sur un espace vectoriel F de dimension finie, correspondent deux structures de L_∞-algèbre définies respectivement sur $\bigwedge F[1]$ et $\bigwedge F^*[1]$ dont les éléments distingués sont respectivement φ et ψ. Nous appellerons de telles structures des algèbres quasi-Gerstenhaber quasi-différentielles. Si $\varphi = 0$ (resp. $\psi = 0$), on obtient une structure d'algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle (resp. d'algèbre de Gerstenhaber quasi-différentielle) ([14], [1], [7]). Comme conséquence directe du théorème précédent, on a :

Corollaire 1. *1- À toute structure de quasi-bigèbre de Lie $(F, \mu, \gamma, \varphi)$ sur un espace vectoriel F de dimension finie, il correspond une structure d'algèbre de Gerstenhaber quasi-différentielle (resp. d'algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle) sur $\bigwedge F[1]$ (resp. $\bigwedge F^*[1]$).*
2- À toute structure de bigèbre de quasi-Lie (F, μ, γ, ψ) sur un espace vectoriel F de dimension finie, il correspond une structure d'algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle (resp. d'algèbre de Gerstenhaber quasi-différentielle) sur $\bigwedge F[1]$ (resp. $\bigwedge F^*[1]$).

Remarques : 1- Les structures d'algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle obtenues sur $\bigwedge F^*[1]$ en prenant $\psi = 0$ sont celles étudiées dans [1], ce sont des structures de L_∞-algèbre strictes au sens de [15].
2- Plus généralement, à toute structure de proto-bigébroïde de Lie donné $((A, A^*), \mu, \gamma, \varphi, \psi)$ ([13], [7]), il correspond deux structures d'algèbre quasi-Gerstenhaber quasi-différentielle définies respectivement sur $\Gamma(\bigwedge A)[1]$ et $\Gamma(\bigwedge A^*)[1]$, où les différents crochets n-aires sont définis de manière analogue en fonction de μ, γ, φ et ψ comme dans le cas d'une proto-bigèbre de Lie.

5. Crochets n-aires associés à un élément quelconque de degré impair

Omettant la condition de degré $2-n$ dans la définition d'une L_∞-algèbre et en ne gardant que l'antisymétrie graduée et les identités de Jacobi généralisées, on peut construire des opérations n-aires sur $\bigwedge F$ et $\bigwedge F^*$ par le choix d'un élément $M \in \bigwedge(F^* \bigoplus F)$ de degré impair.
Soit $M \in \bigwedge(F^* \bigoplus F)$ tel que $|M| = 2m+1$; alors M est de la forme

$$M = \sum_{q=0}^{2m+3} M_q,$$

où $M_q \in \bigwedge^q F^* \bigotimes \bigwedge^{2m+3-q} F$. Tenant compte des bidegrés, $[M, M]$ s'écrit sous la forme

$$[M, M] = \sum_{k=0}^{2(2m+3)} \sum_{p+q=k} [M_p, M_q].$$

Posons

$$M^{(k)} = \sum_{p+q=k} [M_p, M_q]$$

et appelons $M^{(k)}$ la composante d'ordre k du carré de M. Ainsi M est de carré nul si et seulement si

$$M^{(k)} = \sum_{p+q=k} [M_p, M_q] = 0$$

$\forall k = 0, 1, ..., 2(2m+3)$. Si $m = 0$, M est de degré 1 et nous retrouvons les conditions définissant une structure sur F avec $M_0 = \varphi, \quad M_1 = \gamma, \quad M_2 = \mu, \quad M_3 = \psi$.

Lemme 1. *Pour tout élément* $M = \sum_{q=0}^{2m+3} M_q \in \bigwedge^{(2m+1)}(F)$, *pour* $x_1, x_2, ..., x_n \in \bigwedge F$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \bigwedge F^*$ *on a :*

1. $[[[...[M_p, x_1], x_2], ...], x_n] \in \bigwedge F$ *si et seulement si* $p = n$;

2. $[[[...[M_p, \alpha_1], \alpha_2], ...], \alpha_n] \in \bigwedge F^*$ *si et seulement si* $p = 2m + 3 - n$;

3. $[[[...[M^{(k)}, x_1], x_2], ...], x_n] \in \bigwedge F$ *si et seulement si* $k = n + 1$;

4. $[[[...[M^{(k)}, \alpha_1], \alpha_2], ...], \alpha_n] \in \bigwedge F^*$ *si et seulement si* $k = 2(2m + 3) - (n + 1)$.

Démonstration : Par définition du grand crochet, on a :

1.
$$[[[...[M_p, x_1], x_2], ...], x_n] \in \bigwedge^{p-n} F^* \bigotimes \bigwedge^{2m+3-p-n+\sum_{i=1}^{n} |x_i|} F,$$
d'où

$[[[...[M_p, x_1], x_2], ...], x_n] \in \bigwedge F$ si et seulement si $p = n$.

2.
$$[[[...[M_p, \alpha_1], \alpha_2], ...], \alpha_n] \in \bigwedge^{p+\sum_{i=0}^{n} |\alpha_i| - n} F^* \bigotimes \bigwedge^{2m+3-p-n} F,$$
d'où

$[[[...[M_p, \alpha_1], \alpha_2], ...], \alpha_n] \in \bigwedge F^*$ si et seulement si $p = 2m + 3 - n$.

3.
$$[[[...[M^{(k)}, x_1], x_2], ...], x_n] = \sum_{p+q=k} [[[...[[M_p, M_q], x_1], x_2], ...], x_n];$$
mais
$$[[[...[[M_p, M_q], x_1], x_2], ...], x_n] \in \bigwedge^{p+q-(n+1)} F^* \bigotimes \bigwedge^{(4m+5-(p+q)-n+\sum_{i=1}^{n} |x_i|)} F,$$
d'où

$[[[...[M^{(k)}, x_1], x_2], ...], x_n] \in \bigwedge F$ si et seulement si $k = p + q = n + 1$;

4.
$$[[[...[M^{(k)}, \alpha_1], \alpha_2], ...], \alpha_n] = \sum_{p+q=k} [[[...[M_p, M_q], \alpha_1], \alpha_2], ...], \alpha_n];$$
mais
$$[[[...[M_p, M_q], \alpha_1], \alpha_2], ...], \alpha_n] \in \bigwedge^{p+q+\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| - (n+1)} F^* \bigotimes \bigwedge^{4m+5-(p+q)-n} F,$$
d'où

$[[[...[M^{(k)}, \alpha_1], \alpha_2], ...], \alpha_n] \in \bigwedge F^*$ si et seulement si $k = p+q = 4m+5-n = 2(2m+3)-(n+1)$.
Ce qui achève la démonstration du lemme. □

Soit
$$M = \sum_{q=0}^{2m+3} M_q,$$
où $M_q \in \bigwedge^q F^* \bigotimes \bigwedge^{2m+3-q} F$. Associons à M, des crochets n-aires sur $\bigwedge F$ de la manière suivante :
$$\{\emptyset\}_M = \prod_{\bigwedge F} M,$$
$$\{x_1, ..., x_n\}_M = (-1)^{\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(|x_k|-1)} \prod_{\bigwedge F} [[...[M, x_1], ...], x_n],$$

$x_1, ..., x_n \in \bigwedge F$, et sur $\bigwedge F^*$ de la manière suivante :

$$\{\emptyset\}^*_M = \prod_{\bigwedge F^*} M,$$
$$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}^*_M = (-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|\alpha_k|-1)} \prod_{\bigwedge F^*} [[...[M, \alpha_1], ...], \alpha_n],$$

$\alpha_1, ..., \alpha_n \in \bigwedge F^*$, où $\prod_{\bigwedge F}$ (resp. $\prod_{\bigwedge F^*}$) désigne la projection de $\bigwedge(F^* \oplus F)$ sur $\bigwedge F$ (resp. $\bigwedge F^*$).

Le résultat suivant donne les expressions explicites des différents crochets en fonction des composantes M_q de M:

Proposition 2. *Soit $M \in \bigwedge^{(2m+1)}(F)$; alors les crochets n-aires $\{., ..., .\}_M$ et $\{., ..., .\}^*_M$ associés à M sont antisymétriques, de degré $(2m+2) - n$ sur $\bigwedge F[1]$ et $\bigwedge F^*[1]$ respectivement, et sont définis explicitement comme suit :*

$$\{\emptyset\}_M = M_0,$$
$$\{x_1, ..., x_n\}_M (-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|-1)} [[...[M_n, x_1], ...], x_n],$$

$x_1, ..., x_n \in \bigwedge F$, et

$$\{\emptyset\}^*_M = M_{2m+3},$$
$$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}^*_M (-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|\alpha_k|-1)} [[...[M_{2m+3-n}, \alpha_1], ...], \alpha_n],$$

$\alpha_1, ..., \alpha_n \in \bigwedge F^*$.

Ce résultat suit par le lemme précédent et on remarque que $\{x_1, ..., x_n\}_M = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}^*_M = 0$ pour $n > 2m + 3$.

Lemme 2. *Soit $M \in \bigwedge^{(2m+1)}(F)$; si $p + q = n + 1$ alors pour $x_1, ..., x_n \in \bigwedge F$, on a*

$$\begin{aligned}
&[[...[[M_p, M_q], x_1], ...], x_n] = \\
&= \sum_{\sigma_1} \varepsilon(\sigma_1)[[...[M_p, [[...[M_q, x_{\sigma_1(1)}], ...], x_{\sigma_1(q)}]], x_{\sigma_1(q+1)}], ...], x_{\sigma_1(n)}] \\
&\quad + \sum_{\sigma_2} \varepsilon(\sigma_2)[[...[M_q, [[...[M_p, x_{\sigma_2(1)}], ...], x_{\sigma_2(p)}]], x_{\sigma_2(p+1)}], ...], x_{\sigma_2(n)}]
\end{aligned}$$

où σ_1 (resp. σ_2) est une permutation de $\{1, ..., n\}$ telle que $\sigma_1(1) < ... < \sigma_1(q)$ et $\sigma_1(q + 1) < ... < \sigma_1(n)$ (resp. $\sigma_2(1) < ... < \sigma_2(p)$ et $\sigma_2(p + 1) < ... < \sigma_2(n)$).

Ce lemme se démontre par une itération de l'identité de Jacobi graduée et de la propriété d'antisymétrie du grand crochet.

Comme $[M_p, M_q] = [M_q, M_p]$, on a la relation

$$[[...[[M^{(n+1)}, x_1], ...], x_n] = \sum_{p+q=n+1} [[...[[M_p, M_q], x_1], ...], x_n] =$$
$$= 2 \sum_{p+q=n+1} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)[[...[M_p, [[...[M_q, x_{\sigma(1)}], ...], x_{\sigma(q)}]], x_{\sigma(q+1)}], ...], x_{\sigma(n)}],$$

où σ est une permutation de $\{1, ..., n\}$ telle que $\sigma(1) < ... < \sigma(q)$ et $\sigma(q + 1) < ... < \sigma(n)$.

Le résultat suivant relie les jacobiateurs des crochets $\{.,...,.\}_M$ et $\{.,...,.\}_M^*$ avec les crochets n-aires associés aux composantes d'ordre k du carré de M, $M^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., 2(2m+3)$. En effet, adoptant les notations de [15], désignons par J_M^n le n-ieme jacobiateur des crochets $\{.,...,.\}_M$ et par J_M^{*n} celui des crochets $\{.,...,.\}_M^*$; soit $\{.,...,.\}_{M^{(k+1)}}$ le crochet k-aire associé à la composante d'ordre $k+1$ du carré de M, $k = 0, 1, ..., 2(2m+3) - 1$. On a :

Théorème 2. *Soit $M \in \bigwedge^{(2m+1)}(F)$; alors :*
1. Le crochet n-aire associé à $M^{(n+1)}$ est égal à $2(-1)^{(n+1)} J_M^n$, c'est-à-dire $\forall x_1, ..., x_n \in \bigwedge F$,

$$\{x_1, ..., x_n\}_{M^{(n+1)}} = 2(-1)^{(n+1)} J_M^n(x_1, ..., x_n).$$

2. Le crochet n-aire associé à $M^{(2(2m+3)-(n+1))}$ est égal à $2(-1)^{(n+1)} J_M^{*n}$, c'est-à-dire $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \bigwedge F^*$,

$$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}_{M^{(2(2m+3)-(n+1))}} = 2(-1)^{(n+1)} J_M^{*n}(\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Démonstration : Ce théorème est une conséquence des lemmes 1 et 2; prouvons le point 1. En effet,

pour $n = 0$, on a :

$$\begin{aligned} J_M^0(\emptyset) &= -\{\{\emptyset\}_M\}_M = -\{M_0\}_M \\ &= -[M_1, M_0] = -\frac{1}{2}M^{(1)} = -\frac{1}{2}\{\emptyset\}_{M^{(1)}}; \end{aligned}$$

d'où

$$\{\emptyset\}_{M^{(1)}} = -2J_M^0(\emptyset).$$

Pour $n = 1$, $x \in \bigwedge F$, on a:

$$\begin{aligned} J_M^1(x) &= \{\{x\}_M\}_M + \{M_0, x\}_M \\ &= \{[M_1, x]\}_M + [[M_0, M_2], x] \\ &= [M_1, [M_1, x]] + [[M_2, M_0], x] \\ &= 1/2[[M_1, M_1], x] + [[M_2, M_0], x] \\ &= 1/2[[M_1, M_1] + 2[M_2, M_0], x] \\ &= 1/2[M^{(2)}, x] = 1/2\{x\}_{M^{(2)}}; \end{aligned}$$

d'où

$$2J_M^1 = \{.\}_{M^{(2)}}.$$

Démontrons la relation dans le cas général; pour cela afin d'éviter toute confusion dans la suite, nous noterons $\varepsilon(\sigma)$ par $\varepsilon_0(\sigma)$ lorsque les x_i sont considérés comme éléments de $\bigwedge F$ et nous écrirons tout simplement $\varepsilon(\sigma)$ lorsqu'ils sont considérés comme éléments de $\bigwedge F[1]$, c'est-à-dire

$$\varepsilon_0(\sigma) = (-1)^{\sum_{\substack{\sigma(i)<\sigma(k) \\ i>k}} |x_{\sigma(i)}||x_{\sigma(k)}|}$$

et

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\sum_{\substack{\sigma(i)<\sigma(k) \\ i>k}} (|x_{\sigma(i)}|-1)(|x_{\sigma(k)}|-1)}.$$

D'après le lemme 2, pour $x_1, ..., x_n \in \bigwedge F$, on a

$$[[...[M^{(n+1)}, x_1], ...], x_n] = \sum_{p+q=n+1} [[...[[M_p, M_q], x_1], ...], x_n]$$

$$= 2 \sum_{p+q=n+1} \sum_{\sigma} \varepsilon_0(\sigma)[[...[M_p, [[...[M_q, x_{\sigma(1)}], ...], x_{\sigma(q)}]], x_{\sigma(q+1)}], ...], x_{\sigma(n)}]$$

Revenant à la définition des differents crochets et tenant compte, d'après le lemme 1, du fait que,

$$[[[...[M_q, x_{\sigma(1)}], x_{\sigma(2)}], ...], x_{\sigma(q)}] \in \bigwedge^{2m+3-q+\sum_{k=1}^{q}(|x_{\sigma(k)}|-1)} F,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&[[...[M^{(n+1)}, x_1], ...], x_n] = \\
&= \ 2 \sum_{p+q=n+1} \sum_{\sigma} \varepsilon_1(\sigma)(-1)^{\theta}(-1)^{\rho}\{\{x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(q)}\}_M, x_{\sigma(q+1)} ..., x_{\sigma(n)}\}_M
\end{aligned}$$

où

$$\theta = \sum_{k=1}^{q-1}(q-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)$$

et

$$\rho = (p-1)(-q + \sum_{k=1}^{q}(|x_{\sigma(k)}|-1)) + \sum_{k=2}^{p-1}(p-k)(|x_{\sigma(q+k-1)}|-1).$$

Simplifions le produit

$$\varepsilon_0(\sigma)(-1)^{\theta}(-1)^{\rho} = (-1)^{(\sum_{\substack{\sigma(i)<\sigma(k) \\ i>k}} |x_{\sigma(i)}||x_{\sigma(k)}| + \theta + \rho)};$$

pour cela calculons tout d'abord $\theta+\rho$ sachant que $p+q=n+1$:

$$\begin{aligned}
\theta+\rho &= \sum_{k=1}^{q-1}(q-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)+(p-1)(-q+\sum_{k=1}^{q}(|x_{\sigma(k)}|-1)) \\
&\quad +\sum_{k=2}^{p-1}(p-k)(|x_{\sigma(q+k-1)}|-1) \\
&= \sum_{k=1}^{q-1}(n-p+1-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)+(p-1)(-q+\sum_{k=1}^{q}(|x_{\sigma(k)}|-1)) \\
&\quad +\sum_{k=q+1}^{p+q-2}(p+q-1-k)(|x_{\sigma(k)}|-1) \\
&= \sum_{k=1}^{q-1}(n-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)-(p-1)\sum_{k=1}^{q-1}(|x_{\sigma(k)}|-1) \\
&\quad -(p-1)q+(p-1)\sum_{k=1}^{q}(|x_{\sigma(k)}|-1)) \\
&\quad +\sum_{k=q+1}^{n-1}(n-k)(|x_{\sigma(k)}|-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)-(n-q)(|x_{\sigma(q)}|-1) \\
&\quad +(p-1)(|x_{\sigma(q)}|-1)-(p-1)q
\end{aligned}$$

Utilisant de nouveau la relation $p+q=n+1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\theta+\rho &= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)-(n-q-p+1)(|x_{\sigma(q)}|-1)-(p-1)q \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)-(p-1)q \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)-pq+q+p-p \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)-p(q+1)+(n+1);
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0(\sigma)(-1)^{\theta}(-1)^{\rho} = \\
&= (-1)^{\sum_{\substack{\sigma(i)<\sigma(k)\\ i>k}}|x_{\sigma(i)}||x_{\sigma(k)}|}(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)}(-1)^{(-p(q+1)+(n+1))} \\
&= (-1)^{\sum_{\substack{\sigma(i)<\sigma(k)\\ i>k}}|x_{\sigma(i)}||x_{\sigma(k)}|}(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)}(-1)^{p(q-1)}(-1)^{(n+1)};
\end{aligned}$$

Mais, remarquant que dans $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_{\sigma(k)}|-1)$ ne subsistent que les termes où $(n-k)$ est impair, on a

$$\begin{aligned}
&(-1)^{(\sum_{\substack{\sigma(i)<\sigma(k)\\ i>k}}|x_{\sigma(i)}||x_{\sigma(k)}|+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_{\sigma(k)}|-1))} = \\
&= (-1)^{(\sum_{\substack{\sigma(i)<\sigma(k)\\ i>k}}|x_{\sigma(i)}||x_{\sigma(k)}|+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|+|x_k|+|x_{\sigma(k)}|-1))} \\
&= (-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|-1)}(-1)^{\sum_{\substack{\sigma(i)<\sigma(k)\\ i>k}}|x_{\sigma(i)}||x_{\sigma(k)}|}(-1)^{\sum_{k\neq\sigma(k)}(|x_k|+|x_{\sigma(k)}|)} \\
&= (-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|-1)}(-1)^{\sum_{\substack{\sigma(i)<\sigma(k)\\ i>k}}(|x_{\sigma(i)}|+1)(|x_{\sigma(k)}|+1)}(-1)^{(\text{nombre d'inversions})} \\
&= sign(\sigma)(-1)^{\sum_{\substack{\sigma(i)<\sigma(k)\\ i>k}}(|x_{\sigma(i)}|+1)(|x_{\sigma(k)}|+1)}(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|-1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, remarquant que $(-1)^{(|x_{\sigma(i)}|+1)(|x_{\sigma(k)}|+1)} = (-1)^{(|x_{\sigma(i)}|-1)(|x_{\sigma(k)}|-1)}$, on obtient finalement

$$\varepsilon_0(\sigma)(-1)^{\theta}(-1)^{\rho} = sign(\sigma)\varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|-1)}(-1)^{(n+1)}(-1)^{p(q-1)};$$

ce qui nous permet d'avoir

$$\begin{aligned}
&[[...[M^{(n+1)},x_1],...],x_n] = \\
&\quad = 2\sum_{p+q=n+1}\sum_{\sigma} sign(\sigma)\varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|-1)} \times \\
&\quad \times(-1)^{(n+1)}(-1)^{p(q-1)}\{\{x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(q)}\}_M, x_{\sigma(q+1)}...,x_{\sigma(n)}\}_M \\
&\quad = 2(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|-1)}(-1)^{(n+1)}\sum_{p+q=n+1}\sum_{\sigma} sign(\sigma)\varepsilon(\sigma) \times \\
&\quad \times(-1)^{p(q-1)}\{\{x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(q)}\}_M, x_{\sigma(q+1)}...,x_{\sigma(n)}\}_M \\
&= \ 2(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|-1)}(-1)^{(n+1)}J_M^n(x_1,...,x_n),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$[[...[M^{(n+1)},x_1],...],x_n] = 2(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|-1)}(-1)^{(n+1)}J_M^n(x_1,...,x_n).$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par $(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|-1)}$, on obtient

$$(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(|x_k|-1)}[[...[M^{(n+1)},x_1],...],x_n] = 2(-1)^{(n+1)}J_M^n(x_1,...,x_n),$$

c'est-à-dire

$$\{x_1,...,x_n\}_{M^{(n+1)}} = 2(-1)^{(n+1)}J_M^n(x_1,...,x_n);$$

d'où l'égalité désirée.

La démonstration du point 2 du théorème est analogue à celle du point 1; d'où le théorème. □

Remarque : Ce résultat est une application de la version $\mathbb{Z}$-graduée du théorème 1 de [15] établi dans le cas $\mathbb{Z}_2$-gradué. Ainsi, si M est de carré nul, c'est-à-dire $M^{(k)} = 0, \quad \forall k$, les crochets $\{.,...,.\}_M$ et $\{.,...,.\}_M^*$ vérifient les identités de Jacobi généralisées. D'où

Corollaire 2. *Si $M \in \bigwedge^{(2m+1)}(F)$ est de carré nul, alors les crochets $\{.,...,.\}_M$ (resp. $\{.,...,.\}_M^*$) définissent sur $\bigwedge F[1]$ (resp. $\bigwedge F^*[1]$) une structure de L_∞-algèbre.*

Les deux structures définies respectivement sur $\bigwedge F[1]$ et $\bigwedge F^*[1]$ par les crochets n-aires associés à M sont en dualité et on passe de l'une à l'autre grâce au résultat suivant :

Corollaire 3. *La correspondance suivante*

$$\begin{array}{rccc} L_M : & (\{\cdot,\ldots,\cdot\}_M) & \to & (\{\cdot,\ldots,\cdot\}^*_M) \\ & \{\cdot,\ldots,\cdot\}_{M_n} & \to & \{\cdot,\ldots,\cdot\}^*_{M_{2m+3-n}} \end{array}$$

entre la collection des crochets n-aires définis sur $\bigwedge F$ et celle des crochets n-aires définis sur $\bigwedge F^*$ est biunivoque et préserve la multilinéarité des crochets n-aires associés à M.

Remarque : Dans le cas où $[M,M]\neq 0$, comme les crochets $[M_0,M_0]$ et $[M_{(2m+3)},M_{(2m+3)}]$ sont tous deux nuls pour cause de degrés, M définit sur $\bigwedge F[1]$ et $\bigwedge F^*[1]$ des structures de L_∞-algèbre d'ordre supérieur à $4m+4$ au sens de [15].

Remerciements L'auteur tient à remercier Y. Kosmann-Schwarzbach pour ses différentes remarques et suggestions sur le contenu du travail; les remerciements vont également au Centre Abdus Salam ICTP, particulièrement à l'Office of Associate and Federation Schemes, pour l'hospitalité et le soutien tant financier que matériel qui ont permis la réalisation de ce travail.

Acknowledgments This work was done within the framework of the Associateship Scheme of the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy. Financial support from the Swedish International Development Cooperation Agency (SIDA) is acknowledged.

References

[1] M. Bangoura, Algèbres quasi-Gerstenhaber différentielles, Prépublication du CMAT de l'Ecole Polytechnique, 2002-16.
[2] V. G. Drinfeld, Hamiltonian Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equation, Soviet Math. Dokl. 27 (1) (1982), 68-71.
[3] V. G. Drinfeld, On almost cocommutative Hopf algebras, Leningrad Math. J. 1(2) (1990), 331-342.
[4] V. G. Drinfeld, Quasi-Hopf algebras, Leningrad Math. J. 1(6) (1990), 1419-1457.
[5] Y. Kosmann-Schwarzbach, Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups, Contemporary Mathematics 132 (1992), 459-489.
[6] Y. Kosmann-Schwarzbach, From Poisson algebras to Gerstenhaber algebras, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 46 (5) (1996), 1243-1274.
[7] Y. Kosmann-Schwarzbach, Quasi, twisted, and all that... in Poisson geometry and Lie algebroid theory, Lecture at the Alanfest, Erwin Schrödinger Institute (ESI), Vienna, August 2003.
[8] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, Poisson-Nijenhuis structures, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 53 (1990), 35-81
[9] J. L. Koszul, Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie, Astérisque, Soc. Math. France, hors série (1985), 257-271.
[10] T. Lada, M. Markl, Strongly homotopy Lie algebras, Comm. in Algebra 23 (1995), 2147-2161.
[11] T. Lada, J. Stasheff, Introduction to SH Lie algebras for physicists. Internat. J. Theoret. Physics 32(7) (1993), 1087-1103.
[12] P. Lecomte, C. Roger, Modules et cohomologie des bigèbres de Lie, Comptes rendus Acad. Sci. Paris Série I 310 (1990), 405-410.
[13] D. Roytenberg, Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds, PhD thesis, Berkeley, 1999, mathDG/9910078.
[14] D. Roytenberg, Quasi-Lie bialgebroids and twisted Poisson manifolds, Lett. Math. Physics 61 (2002), 123-137.
[15] T. Voronov, Higher derived brackets and homotopy algebras, math.QA/0304038.