CEA-R-8

Rapport C.E.A. N° VIII

Copie N°

Date: Avril 1949

Auteur: YVON J.

Service: Physique Pile Rapport N°7.

Titre: CALCUL ELEMENTAIRE DE LA PERIODE D'EXTINCTION D'UNE PILE.

E X T I N C T I O N   D ' U N E   P I L E .

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Nous nous proposons de savoir comment s'éteint une pile quand on y introduit une barre de cadmium. Ce n'est pas un problème qui nécessite une solution rigoureuse. Il s'agit seulement de savoir si l'action d'une barre donnée est instantanée ou présente un certain délai à évaluer.

Pour des raisons évidentes de simplicité, nous supposerons que l'introduction de la barre de cadmium est instantanée. Mais on n'oubliera pas qu'une barre tombant en chute libre dans le vide parcourt 1m en 0,45 sec., 4m en 0,90 sec. Une barre traversant d'abord l'épaisseur du réflecteur puis pénétrant ensuite dans la pile et qui commencera à être efficace au moment de pénétrer dans la pile, mettra donc environ 1/2 seconde à traverser entièrement la pile. Seuls des délais d'extinction comparables ou supérieurs à 1/2 seconde, calculés suivant notre hypothèse, pourront être considérés comme dommageables.

Si la barre devait être introduite plus lentement, les présents calculs n'auraient plus d'utilité.

Le problème est trop complexe pour être traité en tenant compte de la structure fine de la pile. On traite le milieu comme homogène et on considère les déplacements des neutrons comme ayant tous lieu à la vitesse thermique. Les neutrons "délayés" sont négligés.

<u>Notations et formules fondamentales</u>.- Le mouvement des neutrons dans

un milieu homogène est régi par l'équation de la diffusion en régime variable:

$$\frac{1}{v}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\lambda}{3}\,\Delta\rho \pm \frac{\rho}{\Lambda}$$

avec les notations suivantes:

ρ densité des neutrons.

v vitesse standard des neutrons thermiques: 2.2.10 cm/sec.

λ libre parcours moyen résultant.

Λ avec le signe + convient à un milieu plus multiplicateur qu'absorbant et est le libre parcours de multiplication.

avec le signe - convient à un milieu absorbant et plus absorbant que multiplicateur et est le libre parcours d'absorption.

On posera:

$$L^2 = \frac{\Lambda\lambda}{3}$$

L, dans un milieu multiplicateur, est la longueur de multiplication, et dans un milieu non multiplicateur, est la longueur de diffusion.

λ a pour ordre de grandeur quelques centimètres, Λ plusieurs mètres, L un mètre.

$$\lambda < L < \Lambda$$

Le courant de neutrons dérive de la densité par la relation:

$$\vec{j} = -\frac{\lambda v}{3}\,\mathrm{grad}\,\rho$$

Entre deux milieux de nature distincte et contigus on doit écrire les relations de continuité:

$$\rho_1 = \rho_2$$
$$\vec{j}_1 = \vec{j}_2$$

Les relations de continuité quand l'un des milieux est le vide seront spécifiés dans les applications.

La théorie de la diffusion est médiocre, même s'il s'agit de neutrons véritablement thermiques, quand les dimensions des matériaux sont petites devant le libre parcours. Il est néanmoins naturel de s'en contenter vu la schématisation du problème.

Problèmes Plans.

I. Le réservoir est plan- Un problème très simple servira à fixer d'abord quelques idées. Nous considérons une barre à faces parallèles constituée par un milieu parfaitement diffusant (pas d'absorption ni de multiplication) limité par deux faces parfaitement réfléchissantes:

$$\Lambda = \infty$$

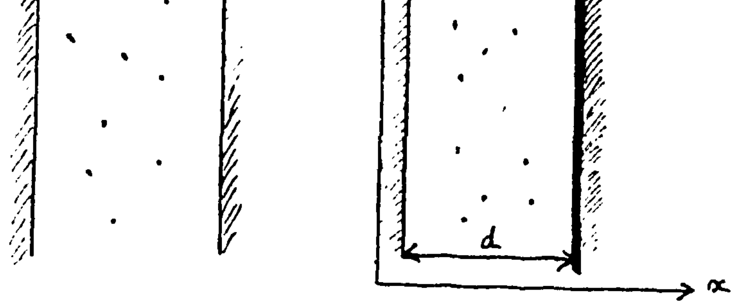
Les neutrons y séjournent indéfiniment et sont initialement à l'état stationnaire:

$$\rho = \text{cte}$$

Brusquement on remplace une des faces réfléchissantes par une plaque de cadmium. Le problème est d'étudier suivant quelle loi les neutrons vont disparaitre.

C'est le seul problème dont nous aurons à envisager une solution complète, nous trouvant ainsi guidés par sa résolution à savoir comment alléger la solution des problèmes plus concrets.

Dès que la plaque de cadmium est en place les problèmes sont régis par les équations suivantes:



$$\frac{1}{v}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\lambda}{3}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

avec les conditions limites:

$$\rho(0) = 0 \qquad j_x(d) = 0$$

La première condition n'est pas tout à fait rigoureuse, mais sa précision est suffisante pour le problème actuel. La solution du problème est:

$$\rho = \sum_n A_n \exp\left(\frac{t}{\theta_n} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{nx}{d} \right) \qquad n = 1, 3, 5...$$

la constante de temps étant donnée par la relation:

$$\theta_n = \frac{12}{\pi^2} \cdot \frac{d}{\lambda v} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Dans la série de Fourier obtenue le premier terme est celui qui s'éteint le moins vite. C'èst d'ailleurs le seul qui ne comporte pas de noeud à l'intérieur de la lame.

Il resterait à évaluer les différents A_n en fonction des conditions initiales, autrement dit à déterminer le degré d'"excitation" de chaque composante de Fourier. Sans calcul on voit immédiatement que le premier terme est prépondérant parce qu'il est le seul à être partout positif et qu'il doit l'emporter sur les autres pour donner une densité positive.

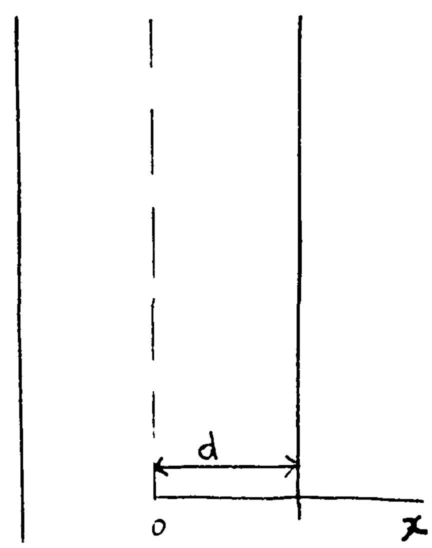
En définitive c'est l'évolution de ce terme qui nous importe seul et nous pouvons dire que les neutrons disparâissent suivant une loi exponentielle avec une constante de temps:

$$\theta = \frac{12}{\pi^2} \frac{d^2}{\lambda v}$$

Exemple numérique: d = 150 cm. λ = 2,5 cm θ = 0,05 sec.

Le résultat qui vient d'être observé est général: l'activité d'une pile s'éteint en présence d'une barre de cadmium brusquement introduite suivant une loi exponentielle qu'on obtient en recherchant un régime d'extinction conforme à cette loi et ne présentant aucun noeud dans le dispositif. Il n'y a pas lieu de rechercher exactement le taux d'excitation initial de cette composante.

II. <u>Multiplicateur plan sans réflecteur</u>.- Une lame à faces parallèles



d'épaisseur donnée est constituée d'un milieu multiplicateur qui est juste dosé pour fournir un régime autoentreteneur non exponentiel.

Nous admettrons comme condition approchée aux limites:

$$\rho(\pm d) = 0$$

Nous déterminons la valeur de L de manière à ce que l'autoentretien non divergent soit réalisé. A cet effet nous résolvons l'équation

$$\rho + \frac{L^2 d^2\rho}{dx^2} = 0$$

de manière que les conditions aux limites soient satisfaites. Il vient:

$$L = \frac{2}{\pi} d$$

Une plaque de cadmium est ensuite brusquement introduite suivant le plan moyen de la lame. Maintenant

$$\rho(0) = 0$$

Recherchons le terme exponentiel précité:

$$\rho = \rho_0 \exp \frac{t}{\theta}$$

Il vient:

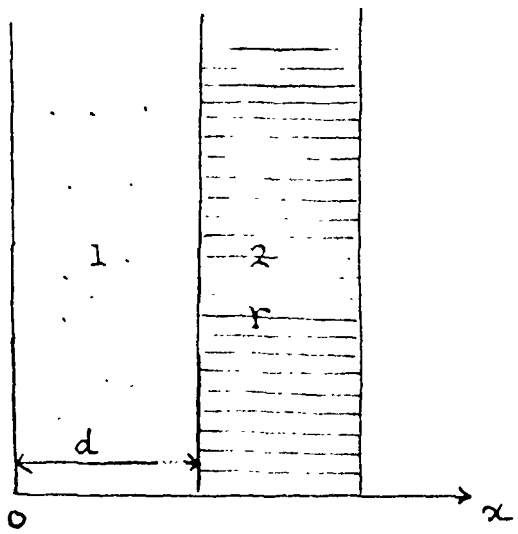
$$\rho_0 \left(1 + \frac{\Lambda}{v\theta} \right) + L^2 \frac{d^2\rho_0}{dx^2} = 0$$

Les conditions aux limites donnent pour la solution sans noeud entre 0 et + d (ou entre 0 et -d)

$$\theta = \frac{\Lambda}{3v}$$

Exemple numérique: d= 150 $\lambda = 2,5$ $\Lambda = 1,1.10^4$ $\theta = 0,017$ sec.

III. Multiplicateur plan avec réflecteur. Nous désignerons par l'indice x les paramètres relatifs au réflecteur.



Il a par exemple une épaisseur de 2L . Mais pratiquement nous pouvons le traiter comme infiniment épais.

En régime d'autoentretien, les relations sont:

$$\rho + L^2 \frac{d^2\rho}{dx^2} = 0$$

$$-\rho + L_r^2 \frac{d^2\rho}{dx^2} = 0$$

$\rho(\infty) = 0$ $j_1(d) = j_2(d)$

Posons:

$y = \frac{d}{L}$, $z = \frac{d}{L_2}$. La valeur de L nécessaire à l'autoentretien est imposée par la condition:

$$y \operatorname{tg} y = \frac{\lambda_2}{\lambda} z$$

En régime d'extinction les équations différentielles s'obtiennent en remplçant:

$$L \text{ par } L' = \frac{L}{\sqrt{1 + \frac{\lambda}{v\theta}}}$$

$$L_r \text{ par } L'_r = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{\Lambda}{v\theta}}}$$

On posera: $y' = \frac{d}{L'}$,

$$z' = \frac{d}{L'}$$

Si l'extinction est obtenue en substituant une plaque de cadmium au plan moyen du multiplicateur, il introduit de plus maintenant la nouvelle condition:

$$\rho(0) = 0$$

Ceci donne:

$$x'\cot x' = -\frac{\lambda_r}{\lambda} z'$$

Des calculs numériques permettent de trouver successivement L et

Exemple numérique: nous prenons les mêmes données que ci-dessus avec en outre:

$$\lambda_z \cdot L_r = 50. \text{ Il vient:}$$

$$\theta = 0{,}085 \text{ sec.}$$

La présence du réflecteur a multiplié la durée de vie par 5.

Problèmes Cylindriques.

Nous considérons maintenant un cylindre infiniment long, de rayon R, d'abord entretenu stationnaire. Puis on introduit brusquement suivant l'axe une barre de rayon r .

Les équations aux dérivées partielles sont les mêmes que ci-dessus en remplçant $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ par $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$

Les conditions aux limites sont inchangées sauf au contact de la barre où il n'est plus assez précis de poser:

$$\rho(r_0) = 0$$

Les conditions du passage à un milieu noir de faibles dimensions ne peuvent pas se formuler très correctement dans la théorie élémentaire de la diffusion. Il s'agit d'exprimer qu'aucun neutron ne revient de la barre. Au mieux, on peut écrire:

$$j(r_0) = -\frac{k}{3}\rho(r_0)\,v$$

k ayant une valeur mal définie comprise entre les limites $k = \frac{1}{2}$ et $k = \frac{2}{3}$. Les calculs numériques ont été effectués avec k = 2/3.

On posera $y = L/R$ $z = L_2/R$ $y' = L'/R'$ $z' = L'_{r}/R$

I -<u>Multiplicateur sans réflecteur</u>: La condition d'autoentretien est donnée par la première racine de l'équation:

$$J(y) = 0 \quad \text{soit } y = 2{,}405$$

Quant à la constante de temps elle dérive de l'équation:

$$\frac{kJ\left(\frac{r_0}{L'}\right) + \frac{\lambda}{L'}J\left(\frac{r_0}{L'}\right)}{J_0(y')} = \frac{kY_0\left(\frac{r_0}{L'}\right) + \frac{\lambda}{L'}Y_1\left(\frac{r_0}{L'}\right)}{Y_0(y')}$$

et approximativement:

$$\frac{1}{J_0(y')} = \frac{\frac{2}{\pi}\left(0{,}5722 + \log\frac{1}{2}\frac{r_0}{L'} - \frac{1}{k}\frac{\lambda}{r_0}\right)}{Y(y')}$$

(N.B. Les notations sont empruntées à WATSON BESSEL functions.

Application numérique: Mêmes constantes que précédemment et:

$R = 150$ $r_0 = 1{,}25$

On trouve: $L = 62{,}4$, $\theta = 0{,}123$ sec.

II -<u>Multiplicateur avec réflecteur infiniment épais</u>. L'équation qui régit l'autoentretien est maintenant:

$$(1) \quad f(y) = y\,\frac{J_1(y)}{J_0(y)} = \frac{\lambda_2}{\lambda}\left(g + \frac{1}{2}\right)$$

La constante de temps est fournie par la relation:

$$\begin{vmatrix} J_0(y') & Y_0(y') & K_0(z') \\ \lambda y' J_1(y') & \lambda y' Y_1(y') & \lambda_2 z' K_1(z') \\ J_0\left(\frac{r_0}{L'}\right)+\frac{\lambda}{KL'} J_1\left(\frac{r_0}{L'}\right) & Y_0\left(\frac{r_0}{L'}\right)+\frac{\lambda}{KL'}\cdot Y_1\frac{r_0}{L'} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

On peut faire profiter cette relation de quelques simplifications ou approximations, comme dans le problème précédent. De plus si on maintient pour r_o une valeur assez petite, θ devient maintenant assez grand pour qu'on puisse traiter $\frac{\Lambda}{v\theta}$ comme infiniment petit devant l'unité. On obtient ainsi la formule explicite:

$$\theta = \frac{\Lambda}{2v}\left(yf(y) + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\Lambda_2}{\Lambda} z\right)\left[J_0(y)\left(-\log\frac{1}{2}\frac{r_o}{L} + \frac{1}{k}\frac{\lambda}{r_o} - 0{,}5722\right) + \frac{\pi}{2} Y_0(y)\right] J_0(y)$$

où on a posé

$$f(y) = \frac{d}{dy}\left[y\,\frac{J_1(y)}{J_0(y)}\right]$$

Exemple: mêmes données que précédemment:

$y = 1{,}854$ $\quad L = 80{,}9$ $\quad \theta = 0{,}75$ sec.

$z = z'$ $\quad \Lambda = 7850$

Le réflecteur a eu pour effet de pultiplier la vie par 6.

Piles cylindriques finies.

Piles sans réflecteur: Maintenant la solution dépend de r (rayon vecteur) et de x (abcisse mesurée suivant la hauteur à partir du centre). L'opérateur prend la forme:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

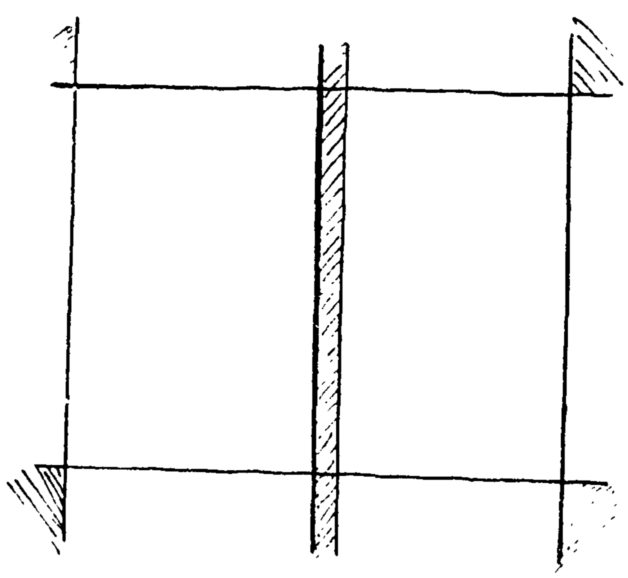
Et le résultat est très simple. Comparons une pile finie de hauteur h et une pile de même diamètre, mais indéfinie. La première nécessite pour son fonctionnement une densité plus élevée en matière fissible. Mais si on introduit suivant l'axe, brusquement dans l'une et dans l'autre une barre de même diamètre, elles manifestent la <u>même durée de vie</u>.

Dans le cas de la pile finie il convient de préciser comment a été écrite la condition limite à la surface de la barre, parceque le courant de neutrons n'est plus rigoureusement radial.
(Il ne doit toutefois pas s'écarter beaucoup de cette situation au voisinage de la barre). Soit j la composante radiale. On a écrit:

$$j_r = -\frac{k}{3}\, v\rho.$$

cette condition ayant la même validité que la condition analogue utilisée dans les problèmes cylindriques.

<u>Piles finies avec réflecteur</u>.- Le problème serait assez difficile à traiter avec la même attitude que les précédents à cause des complications qui surviennent dans le réflecteur au voisinage des bords du cylindre et qui sont liés au fait que le courant de neutrons dans ces régions n'est pas normal aux faces. On s'est débarassé de ces difficultés en remplçant la condition $\vec{j_1} = \vec{j_2}$



par la condition $j_{1n} = j_{2n}$
n désignat la composante normale et en ne cherchant pas la solution de manière quelconque dans les angles marqués de hachures.

S'il n'y avait pas de réflecteur sur les faces inférieures et supérieures de la pile le théorème du paragraphe précédent entre pile courte et pile infiniment longue de même diamètre s'appliquerait encore ici. La présence du réflecteur sur les deux faces augmente en fait la durée de vie. Désignons par θ_1 celle du cylindre infiniment long avec réflecteur. La durée de vie de la pile actuelle est:

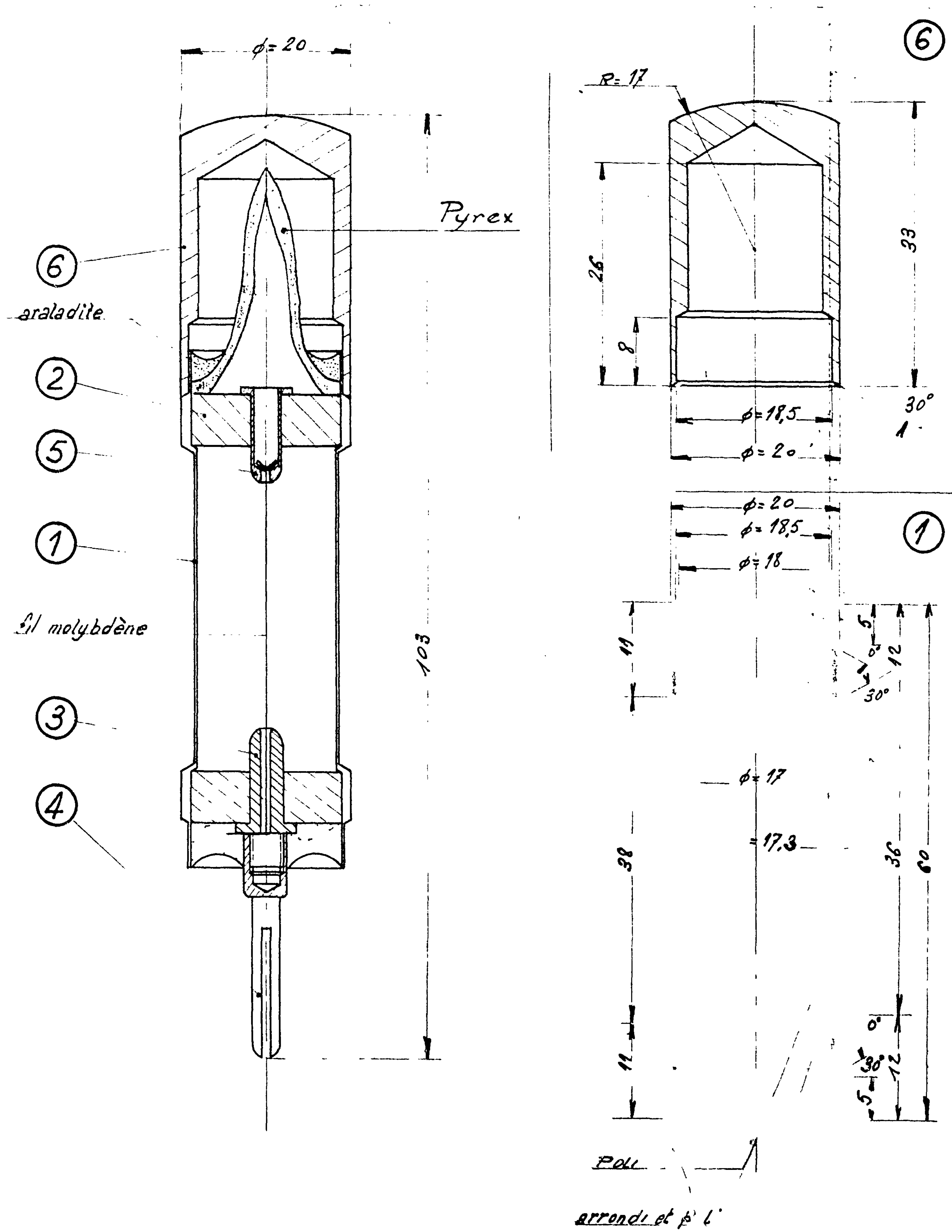
$$\theta = \theta_1 \left\{ 1 + \frac{y_1 f(y_1)}{y_1 f(y_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} \quad \frac{Lr}{L_2} \; \frac{1}{\frac{\lambda_2 L_2}{\lambda L_1} \frac{h}{2L^2} \left(1 + \frac{\lambda r^2}{\lambda^2} \frac{L r^2}{L_2}\right)} \right\}$$

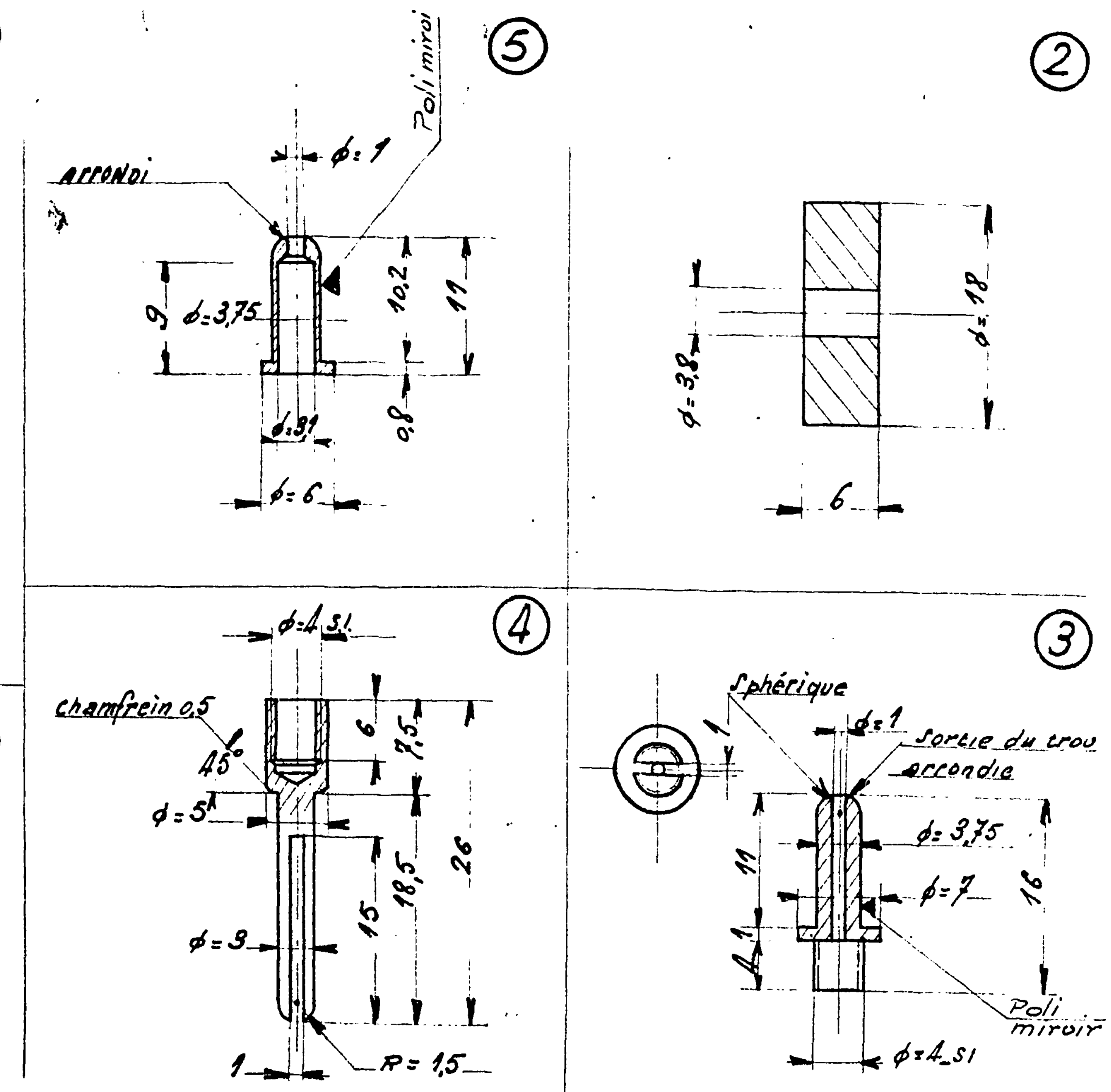
où on a posé $L_2 = \frac{\pi}{h}$, h hauteur.

$$\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} = \frac{1}{L^2} \qquad y_1 = \frac{R}{L_1}$$

L est donnée par la condition que le cylindre indéfini de rayon R soit autopermanent, L_2 est donnée par la condition que la masse indéfinie d'épaisseur h soit autopermanente.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-::





Rp	DESIGNATION	Nb	MATIERE	OBSERVATIO
6		1	DURAL	
5	support	1	LAITON	Poli miroir
	he	1	LAITON	
	ueue	1	LAITON	Poli miroir
	'	2	SIBOR	ou Steatite
	c	1	M um	

COMMISSARIAT A L ENERGIE ATOMIQUE

COMPTEUR β MAGNESIUM

Il n'est permis de faire usage de ce dessin qu'avec licence ou autorisation s eciale loi du 11 Mars 19

EXECUTION

CHATILLON. 28.8.48 VERIFIE

ECHELLE : 2 DESSINE :

10105