CEA-R-3593

PREMIER MINISTRE

CEA-R-3593

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

9.0

SUR LA STABILITE DES SYSTEMES NON-LINEAIRES

par

Mauricio GUELMAN

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

Rapport CEA-R-3593

1968

Fa

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

C.E.N-SACLAY B.P. n°2, 91-GIF-sur-YVETTE-France

CEA-R-3593 - GUELMAN Mauricio

SUR LA STABILITE DES SYSTEMES NON-LINEAIRES

Sommaire. - Dans ce travail, on étudie la stabilité absolue des systèmes non linéaires utilisant la deuxième méthode de Liapounov en tenant compte des résultats acquis à partir des travaux de V.M. Popov.

On fait d'abord un exposé des résultats déjà établis, en particulier en ce qui concerne les critères fréquentiels de stabilité absolue pour le cas d'un système de commande automatique comportant une seule non linéarité. On a prolongé ces résultats jusqu'à l'établissement de l'existence d'une parabole limite.

On fait ensuite une nouvelle utilisation des méthodes étudiées, établissant des critères de stabilité absolue pour un système comportant un type différent de non linéarité. ./.

CEA-R-3593 - GUELMAN Mauricio

ON THE STABILITY OF NON-LINEAR SYSTEMS

Summary. - A study is made of the absolute stability of non-linear systems, using Liapounov's second method and taking into account the results obtained from V.M. Popov's work.

The results already established are first presented, in particular concerning the frequency domain criterions for absolute stability of automatic control systems containing one single non linearity. The results have been extended to show the existence of a limiting parabola.

New use is then made of the methods studied for deriving absolute stability criterions for a system containing a different type of non linearity.

./.

On étudie enfin les résultats obtenus, dans l'optique de la conjecture de Aĭzerman.

1968 61 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

Finally, the results obtained are considered from the point of view of Aĭzerman's conjecture.

1968 61 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

A partir de 1968, les rapports CEA sont classés selon les catégories qui figurent dans le plan de classification ci-dessous et peuvent être obtenus soit en collections complètes, soit en collections partielles d'après ces catégories.

Ceux de nos correspondants qui reçoivent systématiquement nos rapports à titre d'échange, et qui sont intéressés par cette diffusion sélective, sont priés de se reporter à la lettre circulaire CENS/DOC/67/4690 du 20 décembre 1967 que nous leur avons adressée, et qui précise les conditions de diffusion.

A cette occasion nous rappelons que les rapports CEA sont également vendus au numéro par la Direction de la Documentation Française, 31, quai Voltaire, Paris 7e.

PLAN DE CLASSIFICATION

1. APPLICATIONS INDUSTRIELLES DES ISOTOPES ET DES RAYONNEMENTS

2. BIOLOGIE ET MEDECINE

- **2. 1** Biologie générale
- **2. 2** Indicateurs nucléaires en biologie
- **2. 3** Médecine du travail
- **2. 4** Radiobiologie et Radioagronomie
- **2. 5** Utilisation des techniques nucléaires en médecine

3. CHIMIE

- **3. 1** Chimie générale
- **3. 2** Chimie analytique
- **3. 3** Procédés de séparation
- **3. 4** Radiochimie

4. ETUDES DU DOMAINE DE L'ESPACE

5. GEOPHYSIQUE, GEOLOGIE, MINERALOGIE ET METEOROLOGIE

6. METAUX, CERAMIQUES ET AUTRES MATERIAUX

- **6. 1** Fabrication, propriétés et structure des matériaux
- **6. 2** Effets des rayonnements sur les matériaux
- **6. 3** Corrosion

7. NEUTRONIQUE, PHYSIQUE ET TECHNOLOGIE DES REACTEURS

- **7. 1** Neutronique et physique des réacteurs
- **7. 2** Refroidissement, protection, contrôle et sécurité
- **7. 3** Matériaux de structure et éléments classiques des réacteurs

8. PHYSIQUE

- **8. 1** Accélérateurs
- **8. 2** Electricité, électronique, détection des rayonnements
- **8. 3** Physique des plasmas
- **8. 4** Physique des états condensés de la matière
- **8. 5** Physique corpusculaire à haute énergie
- **8. 6** Physique nucléaire
- **8. 7** Electronique quantique, lasers

9. PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHEMATIQUES

10. PROTECTION ET CONTROLE DES RAYONNEMENTS. TRAITEMENT DES EFFLUENTS

- **10. 1** Protection sanitaire
- **10. 2** Contrôle des rayonnements
- **10. 3** Traitement des effluents

11. SEPARATION DES ISOTOPES

12. TECHNIQUES

- **12. 1** Mécanique des fluides - Techniques du vide
- **12. 2** Techniques des températures extrêmes
- **12. 3** Mécanique et outillage

13. UTILISATION ET DEVELOPPEMENT DE L'ENERGIE ATOMIQUE

- **13. 1** Centres d'études nucléaires, laboratoires et usines
- **13. 2** Etudes économiques, programmes
- **13. 3** Divers (documentation, administration, législation, etc...)

Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIe.

The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIe.

- Rapport CEA-R-3593 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Services Scientifiques

SUR LA STABILITE DES SYSTEMES NON-LINEAIRES

par

Mauricio GUELMAN

Laboratoire d'Automatique Théorique - Faculté des Sciences de Paris

- Septembre 1968 -

Ces travaux ont été développés au Laboratoire d'Automatique Théorique de la Faculté des Sciences de Paris, avec l'aide du Commissariat à l'Energie Atomique.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur A. BLAQUIERE, Directeur du Laboratoire d'Automatique Théorique de la Faculté des Sciences de Paris, pour l'aide qu'il m'a apporté dans la conception et dans la réalisation de ces travaux.

Je remercie également le Commissariat à l'Energie Atomique et plus particulièrement Monsieur P. DEBRAINE, qui ont assuré les conditions matérielles me permettant de me consacrer à ces recherches.

Je tiens aussi à remercier Monsieur A. BONNEMAY dont les conseils et suggestions m'ont aidé à mener à bien ces travaux.

SUR LA STABILITE DES SYSTEMES NON-LINEAIRES

INTRODUCTION

De très nombreuses études ont été faites ces dernières années sur les systèmes non linéaires, en particulier sur les systèmes de commande en boucle fermée.

On distingue deux parties dans un système de commande :

- la partie commandée et
- la partie commande.

Du point de vue pratique, on se propose d'imposer au système de suivre une loi donnée. Le problème est, donc, d'assurer la stabilité du mouvement perturbé par toute dérive des conditions initiales et pour toute perturbation permanente.

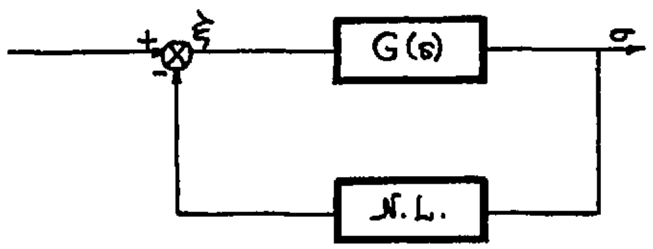
Les travaux de Lur'e et Aĭzerman sont à la base des études actuelles sur ce type de systèmes et les théorèmes de Liapounov ont été le point de départ de toutes les recherches effectuées sur la stabilité des systèmes jusqu'à la publication des importants travaux de Popov[1] (1961).

Les travaux postérieurs de Jakoubovitch[2] et Kalman[3] ont permis de démontrer le théorème de Popov à partir de la théorie de Liapounov faisant apparaître ainsi une nouvelle voie d'approche de ces problèmes.

C'est précisément dans cette même voie qu'a été réalisé ce travail.

Il est important de remarquer qu'à la même époque, il y a eu d'autres développements intéressants, en particulier les travaux de Sandberg[4-7] qui utilisa l'analyse fonctionnelle et obtint certains résultats équivalents à ceux déjà mentionnés.

Nous étudierons donc, les systèmes de commande non linéaires qui peuvent être représentés comme suit :



où $G(s)$ est un élément linéaire et $N.L.$ un élément non linéaire sur la chaîne de retour.

Le schéma que nous avons prévu pour cet exposé est le suivant :

Dans les parties 1 et 2, nous donnons sans démonstration les propositions qui sont à la base de nos travaux.

Dans la partie 3 se trouve le lemme fondamental de Kalman et Jakoubovitch.

La partie 4 est consacrée essentiellement aux théorème de Popov et à ses généralisations, en particulier on y montre l'existence d'un cercle limite, résultat que Sandberg obtint le premier et l'existence d'une parabole limite.

Dans les parties 5 et 6 se trouve la nouvelle utilisation que nous faisons du lemme KY , pour un type différent de nonlinéarité

La partie 7 est consacrée à la conjecture de Aïzerman qui fournit dans certains cas, des résultats limite que l'on peut utiliser comme première étape des études, au moins pour vérifier ultérieurement si cette conjecture est valable dans chaque cas considéré.

Dans la partie 8, on montre les applications des théorèmes établis dans les parties 4, 5 et 6.

La notation que nous utiliserons, sauf indication contraire, sera la suivante :

1) - Lettres majuscules : matrices réelles $n \times n$

2) - Lettres minuscules : vecteurs réels de dimensions n , constants ou variables.

Si $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, on entendra par $a^T = (a_1, \ldots, a_n)$ le vecteur transposé de a.

$$a^T b = b^T a \quad = \text{un scalaire}$$
$$a\, b^T = (b a^T)^T = \text{une matrice}$$
$$\|a\| = (a^T a)^{1/2}$$

Si A est une matrice, on entendra par A^T la matrice transposée de A , et si $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité, A^{-1} telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

est la matrice inverse de A .

1 - LA STABILITE

Nous étudierons les systèmes dynamiques décrits par un système d'équations général de la forme :

① $\dot{x}(t) = f[x(t), \xi(t), t]$

② $\sigma(t) = \varphi[x(t), \xi(t), t]$

① Equations d'état

② Equations de sortie

x état du système, vecteur de dimension n

σ Sortie du système, scalaire

ξ entrée du système ou commande, scalaire

f fonction vectorielle

φ fonction scalaire

Nous étudierons en particulier les systèmes pour lesquels :

$$\xi(t) = \psi[x(t), t]$$

Les équations ① seront donc de la forme :

③ $\dot{x}(t) = f(x, t)$

Définition 1.1 : On appellera solution de ③ un vecteur de dimension n, $\phi(t; x_0, t_0)$ continu par rapport à tous ses arguments et différentiable en t, presque partout, tel que :

i) $\phi(t_0; x_0, t_0) = x_0$

ii) $\dfrac{d\phi(t; x_0, t_0)}{dt} = f\,[\phi(t; x_0, t_0)]$

ϕ est appelé aussi, trajectoire du système dynamique ③

S'il existe ϕ avec les conditions indiquées ci-dessus, on dira que le système ③ est un système dynamique continu par rapport au temps.

Définition 1.2 : Un état x_e du système ③ est un état d'équilibre si :

$f(x_e, t) = 0 \quad \forall t$, ou ce qui est équivalent

$\phi(t; x_e, 0) = x_e \quad \forall t$.

Soit ϕ une solution de ③ . On veut étudier le comportement du système au voisinage de ϕ . Pour celà : soit y un vecteur de dimension n :

$$y = x - \phi$$

③ devient :

④ $\dot{y} = g(y, t)$

avec $g(y, t) = f(y + \phi, t) - f(\phi, t)$ et $g(0, t) = 0$

Le système d'équations différentielles ④ est le système d'équations du mouvement perturbé.

Pour unifier les notations, écrivons de nouveau ④ avec x et f :

$\dot{x} = f(x, t)$, $f(0, t) = 0$

$x_e = 0$

Définition 1.3 : L'état d'équilibre $X_e = 0$ du système dynamique ④ est stable, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ telle que, si $\|x_0\| < \delta$,

$$\|\phi(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon \qquad \forall\, t \geq t_0$$

Définition 1.4 : L'état d'équilibre $X_e = 0$ du système dynamique ④ est asymptotiquement stable si :

i) Il est stable

ii) Il existe $r(t_0) > 0$ cte. réelle et pour chaque nombre réel $\mu > 0$ il existe un nombre réel $T(\mu, x_0, t_0)$ tel que, si $\|x_0\| < r(t_0)$,

$$\|\phi(t; x_0, t_0)\| \leq \mu \qquad \forall\, t \geq t_0 + T$$

Définition 1.5 : La stabilité est uniforme si δ (dans 1.3) est indépendant de t_0.

Les définitions 1.3 et 1.4 sont locales.

Définition 1.6 : L'état d'équilibre $x_e = 0$ du système dynamique ④ est uniformément, asymptotiquement et globalement stable si :

i) Il est stable uniformément

ii) Il est uniformément borné : $r > 0$ arbitraire étant donné, il existe $B(r)$ tel que si $\|x_0\| \leq r$, $\|\phi(t; x_0, t_0)\| \leq B(r)$ $\forall\, t \geq t_0$

iii) Toute trajectoire converge vers 0 pour $t \to \infty$ et $\|x_0\| < r$ avec r fixe mais arbitrairement grand : $r > 0$ arbitraire étant donné et $\mu > 0$ il existe un $T(\mu, r)$ tel que si $\|x_0\| < r$,

$$\|\phi(t; x_0, t_0)\| \leq \mu \qquad \forall\, t \geq t_0 + T$$

Théorème 1.1 : (Liapounov)[9] : Soit le système dynamique continu par rapport au temps :

$$④ \qquad \dot{x} = f(x, t) \quad , \quad f(0, t) = 0$$

S'il existe V, fonction scalaire de x et t, avec dérivées partielles continues, telle que $V(0, t) = 0$ et :

i) V définie positive : il existe une fonction scalaire α, continue et non décroissante, telle que $\alpha(0) = 0$,
$\forall\, t$ et $\forall\, x \neq 0$
$0 < \alpha(\|x\|) \leq V(x, t)$

ii) Il existe une fonction scalaire continue γ telle que $\gamma(0) = 0$ et la dérivée par rapport au temps de V satisfait :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla V)^T f(x, t) \leq -\gamma(\|x\|) < 0 \qquad \forall\, t \text{ et } \forall\, x \neq 0$$

iii) Il existe une fonction scalaire β continue et non décroissante telle que $\beta(0) = 0$, $\forall\, t$ et $\forall\, x \neq 0$
$V(x, t) \leq \beta(\|x\|)$

iv) $\alpha(\|x\|) \to \infty$ pour $\|x\| \to \infty$

l'état d'équilibre $x_e = 0$ du système ④ est uniformément, asymptotiquement et globalement stable, et V est une fonction de Liapounov de ce système.

Corollaire 1.1 : Pour un système dynamique autonome, continu par rapport au temps :

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f(0) = 0$$

la stabilité uniforme asymptotique et globale est assurée par l'existence d'une fonction scalaire V, avec dérivées partielles continues, telle que $V(0) = 0$ et :

i) $V(x) > 0 \qquad \forall\, x \neq 0$

ii) $\dot{V}(x) < 0 \qquad \forall\, x \neq 0$

iv) $V(x) \to \infty$ pour $\|x\| \to \infty$

<u>Corollaire 1.2</u> : La condition ii) peut être remplacée par :

ii₁) $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x$

ii₂) $\dot{V}(\phi(t; x_0, t_0))$ ne s'annulle pas identiquement pour $t \geq t_0$ quels que soient t_0 , et $x_0 \neq 0$.

Par suite nous dirons qu'un système est absolument stable s'il est uniformément, asymptotiquement et globalement stable.

2 - <u>LES SYSTEMES DE COMMANDE</u>

Nous étudierons les systèmes de commande autonomes, que l'on supposera linéaires pour les équations du mouvement perturbé du système commandé et avec coefficients constants pour l'équation qui régit la commande.

Ce sont les conditions que Lur'e imposa afin d'arriver aux formes canoniques qu'il étudia.

Ces systèmes seront donc décrits par[11-12] :

① $\dot{y} = Ay + b\mu$

② $V^2\ddot{\mu} + W\dot{\mu} + \mathfrak{Z}\mu = \varphi(\sigma)$

$\sigma = \mathfrak{h}^T y - \rho\mu$

① Equations du système commandé

② Equation qui régit la commande

Par de simples changements de variables Lur'e ramena ce système aux deux formes canoniques suivantes :

(I) Système de commande direct :

$\dot{x} = Ax + b\xi$

$\xi = -\varphi(\sigma)$

$\sigma = \mathfrak{h}^T x$

(I₁) Système de commande indirect :

$\dot{x} = Ax + b\xi$

$\dot{\xi} = -\varphi(\sigma)$

$\sigma = \mathfrak{h}^T x + \rho\xi$

où :

x état du système, vecteur réel de dimension n.

A matrice réelle constante $n \times n$.

ξ entrée du système ou commande

σ sortie du système

ξ et σ fonctions scalaires du temps

b transformation d'entrée

h transformation de sortie

b et h vecteurs de dimension n, constants et réels.

En réalité les systèmes (I) et (I₁) n'en font qu'un, la seule différence provient du fait de l'existence d'une valeur propre nulle dans la matrice A.

Aux concepts de stabilité que l'on a donné, il est nécessaire d'ajouter maintenant ceux de controlabilité et d'observabilité dus à Kalman.

D'un point de vue intuitif, comme l'indique Lefschetz[13] un système de commande est complètement controlable (c.c.) si on ne peut pas le décomposer en deux, la commande n'opérant que sur un seul

Dans le cas où la décomposition est possible, le système sera partiellement controlable, ou simplement, non controlable.

Un système ne sera complètement observable (c.o.) si connaissant la commande et la sortie du système, on ne peut pas toujours déterminer l'état du système.

Sans entrer dans le cadre de la théorie développée par Kalman, nous nous contenterons de définir explicitement les éléments que l'on utilisera par la suite.

<u>Définition 2.1</u> : La paire A, b est complètement controlable si les vecteurs :

$$b,\ Ab,\ A^2 b,\ \ldots,\ A^{n-1} b$$

sont linéairement indépendants.

<u>Définition 2.2</u> : La paire h^T, A est complètement observable si la paire A^T, h est complètement controlable.

Nous ajouterons encore cette proposition :

$x^T e^{At} b = 0 \quad \forall\, t$ implique $x = 0$ si et seulement si la paire A, b est complètement controlable.

On fera ici une fois pour toutes, l'hypothèse de complète controlabilité et complète observabilité du treillis A, b, h pour tous les systèmes que l'on étudiera par la suite.

Avec cette hypothèse, on peut démontrer qu'il existe une base dans l'espace de phase X telle que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Pour le système (I) on peut calculer la fonction de transfert de la partie linéaire du système, avec ξ comme entrée et σ comme sortie.

Soient $\hat{x}$, $\hat{\xi}$ et $\hat{\sigma}$ les transformées de Laplace de x, ξ et σ respectivement.

Avec s variable complexe, on a :

$$s\hat{x} = A\hat{x} + b\hat{\xi}$$

$$(sI - A)\hat{x} = b\hat{\xi}$$

$$\hat{x} = (sI - A)^{-1} b\hat{\xi}$$

$$\hat{\sigma} = h^T (sI - A)^{-1} b\hat{\xi}$$

$$G(s) = h^T (sI - A)^{-1} b$$

Avec les valeurs de A, b et h données ci-dessus, on peut calculer $G(s)$:

$$G(s) = \frac{h_n s^{n-1} + \ldots + h_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \ldots + a_1}$$

On étudiera donc, à partir d'ici la stabilité du système (I) avec toutes ces considérations; mais avant d'entrer dans les théorèmes qui concernent directement la stabilité, on donnera le lemme de Kalman et Jakoubovitch qui est à la base de tout le reste.

3 - LE LEMME DE KALMAN ET JAKOUBOVITCH

Au préalable, il nous faut donner trois définitions et énoncer un théorème de Liapounov.

Définition 3.1 : Une matrice $\mathcal{L}$ réelle $n \times n$ est définie positive si :

$$x^T \mathcal{L} x > 0 \qquad \forall \; x \neq 0$$

On écrira dans ce cas $\mathcal{L} > 0$

Définition 3.2 : Une matrice $\mathcal{L}$ réelle $n \times n$ est semi définie positive si :

$$x^T \mathcal{L} x \geqslant 0 \qquad \forall \; x$$

on écrira $\mathcal{L} \geqslant 0$.

Définition 3.3 : Une matrice A réelle $n \times n$ est stable si toutes les racines de son équation caractéristique :

$$|sI - A| = 0$$

ont leur partie réelle négative

Théorème 3.1 : (Liapounov) : Etant données les matrices : A stable réelle $n \times n$ et $\mathcal{D}$ réelle $n \times n$, il existe une et une seule matrice $\mathcal{L}$ réelle $n \times n$ solution de

$$\mathcal{L} A + A^T \mathcal{L} = -\mathcal{D}$$

et i) Si $\mathcal{D} \geqslant 0$, $\mathcal{L} \geqslant 0$

ii) Si $\mathcal{D} > 0$, $\mathcal{L} > 0$

Il existe plusieurs versions du lemme de Kalman et Jakoubovitch.

Nous donnerons ici l'énoncé de deux d'entre elles que nous considérons comme les plus intéressantes.

Lemme 3.1 : (Lefschetz[13]) : Etant donnés les matrices A , stable réelle $n \times n$ et $D > 0$ réelle $n \times n$, les vecteurs $b \neq 0$ et k réels de dimension n , les scalaires $\gamma \geq 0$ et $\varepsilon > 0$; il existe une matrice $P > 0$ réelle $n \times n$ et un vecteur q réel de dimension n , solutions de :

1) $PA + A^T P = -2qq^T - \varepsilon D$

2) $Pb - k = 2\sqrt{\gamma}\, q$

Si et seulement si :

@ $\gamma + \mathcal{R}e\, k^T (j\omega I - A)^{-1} b > 0$ pour tout ω réel

et ε est suffisamment petit.

En d'autres termes, @ est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de P et q solutions de 1) et 2).

Lemme 3.2 : (Meyer[14]) : Soit A une matrice réelle stable $n \times n$ et soient γ un nombre réel positif ou nul, b et k deux vecteurs réels de dimension n , si :

@ $\gamma + \mathcal{R}e\, k^T (j\omega I - A)^{-1} b \geq 0$ pour tout ω réel ,

il existe deux matrices réelles $n \times n$, P et D et un vecteur réel q de dimension n tels que :

i) $PA + A^T P = -2qq^T - 2D$

ii) $Pb - k = 2\sqrt{\gamma}\, q$

iii) $D \geq 0$, $P > 0$

iv) $\{x \in E^n : x^T D x = 0\} \cap \{x \in E^n : q^T e^{At} x \equiv 0\} = \{0\}$

La différence entre ces deux versions se trouve dans les signes de $>$ et $\geq$ pour @ et D , mais en réalité les résultats que l'on peut obtenir avec l'une ou l'autre sont d'une manière quasi générale identiques. Nous avons choisi la version de Meyer (que nous indiquerons par MKY) pour uniformiser nos résultats avec ceux déjà obtenus, et si nous avons présenté la version de Lefschetz c'est pour indiquer qu'il a donné dans son livre, à notre avis, la plus claire de toutes les démonstrations de ce lemme.

4 - LE THEOREME DE POPOV ET SES GENERALISATIONS

Théorème 4.1 (Popov[1]) : Soit le système dynamique (I) :

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi \\ \xi = -\varphi(\sigma) \\ \sigma = h^T x \end{cases}$$

Sous les hypothèses :

i) $\varphi(\sigma)$ continue

ii) $\sigma\varphi(\sigma) > 0$

iii) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\sigma) \neq 0 \quad \forall \sigma \neq 0$

iv) $h^T b \geq 0$

v) La matrice A est stable

S'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$, constantes réelles, telles que :

(a) $\mathcal{R}e\{(\alpha + \beta j\omega)\, G(j\omega)\} \geq 0$ pour tout ω réel

le système (I) avec les hypothèses i) à v) est absolument stable.

Démonstration :

$$s h^T (sI - A)^{-1} b = h^T A (sI - A)^{-1} b + h^T b$$

or $G(j\omega) = h^T (j\omega I - A)^{-1} b$, et la condition (a) de stabilité devient équivalente à :

$$\beta h^T b + \mathcal{R}e\{(\alpha h^T + \beta h^T A)(j\omega I - A)^{-1} b\} \geq 0$$

Soient : $k = \alpha h + \beta A^T h$ et $\gamma = \beta h^T b$, avec le lemme MKY

nous avons : il existe $P > 0$, $D \geq 0$ et q solutions de :

1) $PA + A^T P = -2qq^T - 2D$

2) $Pb - h = 2\sqrt{\gamma}\, q$

Soit $V(x) = \frac{1}{2} x^T P x + \beta \int_0^{h^T x} \varphi(\zeta)\, d\zeta$

une fonction de Liapounov possible

P est obtenue par le lemme MKY, puisque $\int_0^{\sigma} \varphi(\zeta)\, d\zeta \geq 0$ d'après nos hypothèses, on a :

i) $V(x) > 0$, ii) $V(0) = 0$, iii) $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$

Evaluons $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (PA + A^T P) x - \varphi(\sigma) x^T P b + \beta \varphi(\sigma) \dot{\sigma} ;$$

$$\dot{\sigma} = h^T [Ax - b\varphi(\sigma)]$$

Remplaçant $\dot{\sigma}$ et ajoutant et retranchant $\alpha\sigma\varphi(\sigma)$, on obtient :

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (PA + A^T P) x - \varphi(\sigma) x^T [Pb - (\alpha h + \beta A^T h)] - \beta h^T b [\varphi(\sigma)]^2 - \alpha\sigma\varphi(\sigma)$$

Remplaçant par 1) et 2) :

$$\dot{V}(x) = -[q^T x]^2 - 2\sqrt{\gamma}\, \varphi(\sigma)\, q^T x - \gamma [\varphi(\sigma)]^2 - \alpha\sigma\varphi(\sigma) - x^T D x$$

$$\dot{V}(x) = -[q^T x + \sqrt{\gamma}\, \varphi(\sigma)]^2 - \alpha\sigma\varphi(\sigma) - x^T D x$$

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

Il reste à démontrer (voir corollaire 1.2) que :

$\dot{V}(x(t)) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) \equiv 0$

En effet : $\dot{V}(x) = 0$ implique $\sigma\varphi(\sigma) = 0$,

donc $\varphi(\sigma) = 0$, et :

$\dot{x} = Ax \; , \; x = e^{At}x_0$

Nous avons donc:

$q^T e^{At} x_0 \equiv 0 \;$ et $\; x_0^T D x_0 = 0$

d'après la partie IV) du lemme MKY :

$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) \equiv 0$

La stabilité absolue est démontrée.

Théorème 4.2 : Soit le système dynamique 1 sous les hypothèses :

i) $\varphi(\sigma)$ continue

ii) $0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu$

iii) $\varphi(0) = 0 \; , \; \varphi(\sigma) \neq 0 \;\; \forall \sigma \neq 0$

iv) $h^T b \geqslant 0$

v) La matrice A est stable

S'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \geqslant 0$, constantes réelles, telles que :

a $\; \frac{\alpha}{\mu} + \mathcal{R}e\{(\alpha + \beta j\omega) G(j\omega)\} \geqslant 0$ pour tout ω réel ,

le système 1 est absolument stable.

Démonstration :

$G(j\omega) = h^T (j\omega I - A)^{-1} b$, et a est équivalente à :

$$\frac{\alpha}{\mu} + \beta h^T b + \mathcal{R}e\{(\alpha h^T + \beta h^T A)(j\omega I - A)^{-1} b\} \geqslant 0$$

Soient : $k = \alpha h + \beta A^T h$ et $\gamma = \frac{\alpha}{\mu} + \beta h^T b$, avec MKY on a : $\mathcal{P}$, D et q, solutions de :

1) $\mathcal{P}A + A^T \mathcal{P} = -2qq^T - 2D$

2) $\mathcal{P}b - k = 2\sqrt{\gamma}\, q$

Soit $V(x) = \frac{1}{2} x^T \mathcal{P} x + \beta \int_0^{h^T x} \varphi(\xi)\, d\xi$ une f. de Liapounov possible

i) $V(x) > 0$, ii) $V(0) = 0$, iii) $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$

Evaluons $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (\mathcal{P}A + A^T \mathcal{P}) x - \varphi(\sigma) x^T \mathcal{P} b + \beta \varphi(\sigma) h^T [Ax - b\varphi(\sigma)]$$

Ajoutant et retranchant $\alpha\sigma\varphi(\sigma) + \frac{\alpha}{\mu}[\varphi(\sigma)]^2$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (\mathcal{P}A + A^T \mathcal{P}) x - \varphi(\sigma) x^T [\mathcal{P}b - (\alpha h + \beta A^T h)] - \alpha\sigma\varphi(\sigma)$$
$$- \beta h^T b [\varphi(\sigma)]^2 - \frac{\alpha}{\mu}[\varphi(\sigma)]^2 + \frac{\alpha}{\mu}[\varphi(\sigma)]^2$$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (\mathcal{P}A + A^T \mathcal{P}) x - \varphi(\sigma) x^T [\mathcal{P}b - (\alpha h + \beta A^T h)] - (\beta h^T b + \frac{\alpha}{\mu})[\varphi(\sigma)]^2$$
$$- \frac{\alpha}{\mu}\sigma\varphi(\sigma)[\mu - \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}]$$

Substituant par 1) et 2) :

$$\dot{V}(x) = -[q^T x + \sqrt{\gamma}\,\varphi(\sigma)]^2 - \frac{\alpha}{\mu}\sigma\varphi(\sigma)[\mu - \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}] - x^T D x$$

$\dot{V}(x) \leqslant 0$

avec le même raisonnement qu'au théorème 4.1 on arrive à $\dot{V}(x) < 0$ et à démontrer le théorème.

Lemme 4.1 :

$$h^T(sI - A + \nu b h^T)^{-1} b = \frac{h^T(sI-A)^{-1}b}{1 + \nu h^T(sI-A)^{-1}b}$$

Démonstration :

Soient $Q = sI - A + \nu b h^T$ et $P = sI - A$

$$Q - P = \nu b h^T$$

Essayons d'écrire Q^{-1} sous la forme

1) $Q^{-1} = P^{-1} + B$

$P = Q + QBP$, donc

$B = -\nu Q^{-1} b h^T P^{-1}$, et revenant à 1)

$h^T Q^{-1} b = h^T P^{-1} b - \nu h^T Q^{-1} b h^T P^{-1} b$, donc :

$$h^T Q^{-1} b = \frac{h^T P^{-1} b}{1 + \nu h^T P^{-1} b} \qquad 1.D.$$

Théorème 4.3 : Soit le système dynamique (I) sous les hypothèses :

i) $\varphi(\sigma)$ continue

ii) $\nu < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu$

iii) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\sigma) \neq 0 \quad \forall \sigma \neq 0$

iv) $h^T b \geq 0$

v) La matrice $A' = A - \nu b h^T$ est stable.

S'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$, constantes réelles, telles que :

$$(2) \quad \frac{\alpha}{\mu - \nu} + \mathcal{Re}(\alpha + \beta j\omega)\frac{G(j\omega)}{1 + \nu G(j\omega)} \geq 0 \quad \text{pour tout } \omega \text{ réel ,}$$

le système (I) est absolument stable.

Démonstration :

$$\dot{x} = Ax - b\varphi(\sigma)$$

Ajoutant et retranchant $\nu b \sigma$

$$\dot{x} = Ax - \nu b\sigma - b[\varphi(\sigma) - \nu\sigma]$$

Soient : $A' = A - \nu b h^T$ et $\pi(\sigma) = \varphi(\sigma) - \nu\sigma$.

$$0 < \frac{\pi(\sigma)}{\sigma} < \mu - \nu \quad , \quad \pi(0) = 0$$

$$\dot{x} = A'x - b\pi(\sigma)$$

Faisant appel au théorème 4.2, on obtient comme condition de stabilité :

$$\frac{\alpha}{\mu - \nu} + \mathcal{Re}(\alpha + \beta j\omega) G'(j\omega) \geq 0$$

où $G'(j\omega) = h^T(j\omega I - A')^{-1} b$

Avec le lemme 4.1, on arrive à :

$$(2) \quad \frac{\alpha}{\mu - \nu} + \mathcal{Re}(\alpha + \beta j\omega)\frac{G(j\omega)}{1 + \nu G(j\omega)} \geq 0 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Nous essayerons maintenant de faire une interprétation graphique des résultats obtenus aux théorèmes 4.1, 4.2 et 4.3.

4.1) - ⓐ $\mathcal{R}e(\alpha+\beta j\omega)G(j\omega) \geq 0$; $\sigma\varphi(\sigma) > 0$

Soit $G(j\omega) = g_1 + jg_2$; $g_1 = \mathcal{R}e\,G(j\omega)$, $g_2 = \mathrm{Im}\,G(j\omega)$

$$\mathcal{R}e(\alpha+\beta j\omega)G(j\omega) = \alpha g_1 - \beta\omega g_2 \geq 0$$

Sur la fig. 4.1 nous avons le plan modifié de Nyquist ou plan de Popov : $\mathcal{R}e\,G(j\omega)$, $\omega\,\mathrm{Im}\,G(j\omega)$:

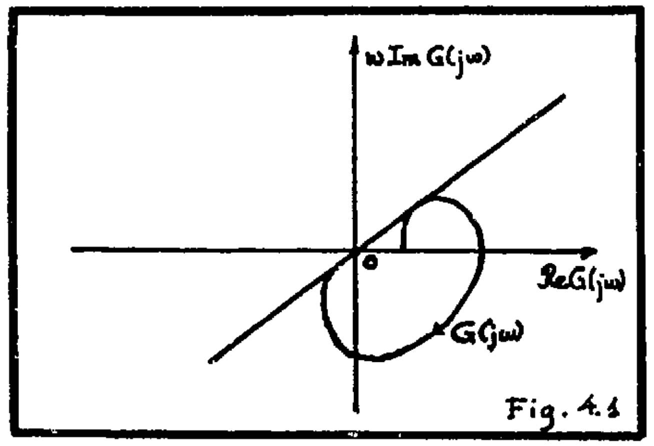


Fig. 4.1

La condition de stabilité ⓐ signifie que le système ① est absolument stable si la représentation de $G(j\omega)$ dans le plan de Popov se trouve entièrement à droite d'une ligne droite à pente positive passant par l'origine.

4.2) - ⓐ $\frac{\alpha}{\mu} + \mathcal{R}e(\alpha+\beta j\omega)G(j\omega) \geq 0$; $0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu$

De la même manière qu'au 4.1 :

$$\frac{\alpha}{\mu} + \alpha g_1 - \beta\omega g_2 \geq 0$$

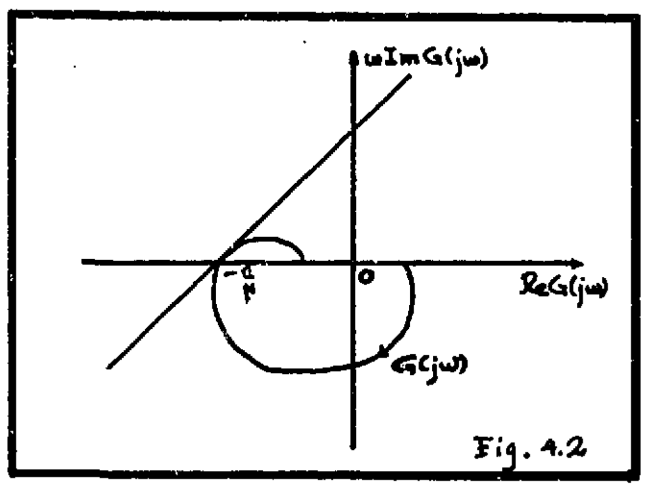


Fig. 4.2

La condition de stabilité ⓐ signifie que le système ① est absolument stable si la représentation de $G(j\omega)$ dans le plan de Popov entièrement à droite d'une ligne droite à pente positive, passant par $(-\frac{1}{\mu}, 0)$. (fig. 4.2)

4.3) - ⓐ $\frac{\alpha}{\mu-\nu} + \mathcal{R}e(\alpha+\beta j\omega)\frac{G(j\omega)}{1+\nu G(j\omega)} \geq 0$, $\nu \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu$

Or : $\mathcal{R}e(\alpha+\beta j\omega)\frac{1}{\mu-\nu} = \frac{\alpha}{\mu-\nu}$

donc : ⓐ $\mathcal{R}e(\alpha+\beta j\omega)\left[\frac{G(j\omega)}{1+\nu G(j\omega)} + \frac{1}{\mu-\nu}\right] \geq 0$

Puis : ⓐ $\mathcal{R}e(\alpha+\beta j\omega)\frac{\mu}{\nu}\left\{\frac{G(j\omega)+1/\mu}{G(j\omega)+1/\nu}\right\} \geq 0$

1) i) $\beta=0$, $\nu>0$:

$$\mathcal{R}e\left\{\frac{G(j\omega)+1/\mu}{G(j\omega)+1/\nu}\right\} \geq 0$$

Soit $H(s) = \frac{G(s)+1/\mu}{G(s)+1/\nu}$, s variable complexe.

La condition $\mathcal{R}e\{H(j\omega)\} \geq 0$ correspond dans le plan $G(s)$ (fig. 4.3), plan obtenu par une transformation conforme à partir de $H(s)$, à l'interdiction pour $G(j\omega)$ de pénétrer ou d'entourer le cercle $-\frac{1}{\nu}$, $-\frac{1}{\mu}$, ceci en raison de la correspondance existant entre ce cercle et le plan réel négatif de $H(s)$, et l'hypothèse iv) du Th. 5.3.

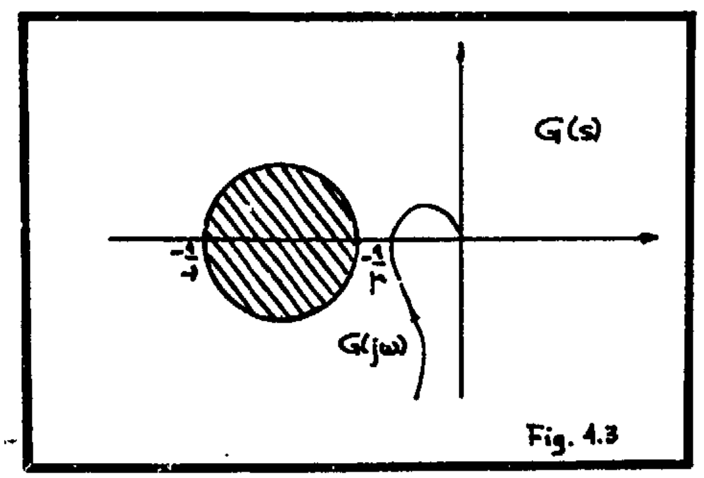


Fig. 4.3

ii) $\beta = 0$, $\nu < 0$:

$$\mathcal{Re}\left\{\frac{G(j\omega)+1/\mu}{G(j\omega)+1/\nu}\right\} \leqslant 0$$

$G(j\omega)$ doit rester à l'intérieur du cercle $-\frac{1}{\mu}$, $-\frac{1}{\nu}$:

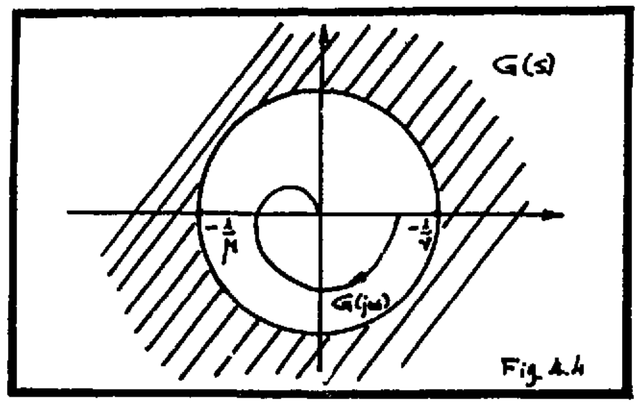


Fig. 4.4

Nous avons donc une condition suffisante de stabilité qui donne lieu à une interprétation graphique simple, et de plus apparaît (pour $\nu > 0$) comme une généralisation de Nyquist; en effet pour $\nu = \mu$ cette condition coïncide avec celle de Nyquist.

Ce résultat est équivalent à celui de Sandberg[4] , mais il est plus large, si la condition du cercle est en défaut; il reste encore à vérifier le cas $\beta \neq 0$.

2) $\beta \neq 0$:

$$@\ \mathcal{Re}\,(\alpha + \beta j\omega)\left\{\frac{\mu G(j\omega)+1}{\nu G(j\omega)+1}\right\} \geqslant 0$$

$$G(j\omega) = g_1 + j g_2$$

$$\frac{\mu G(j\omega)+1}{\nu G(j\omega)+1} = \frac{\mu(g_1 + jg_2)+1}{\nu(g_1+jg_2)+1} = \frac{(\mu g_1 + 1)(\nu g_1 + 1) + \mu\nu g_2^2 + j(\mu-\nu)g_2}{(\nu g_1+1)^2 + (\nu g_2)^2}$$

$$@\ \alpha\left[\mu\nu(g_1^2+g_2^2)+(\mu+\nu)g_1+1\right] - \beta\omega(\mu-\nu)\,g_2 \geqslant 0$$

On peut remarquer que le terme en α correspond à l'équation du cercle déjà vu, et la condition du cercle en défaut implique précisément que ce terme soit négatif et la nécessité de l'appel au terme en β . Développant @ :

$$@\ \alpha\mu\nu g_1^2 + \alpha\mu\nu g_2^2 + \alpha(\mu+\nu)g_1 + \alpha - \beta\omega(\mu-\nu)g_2 \geqslant \alpha\mu\nu g_1^2 + \alpha(\mu+\nu)g_1 + \alpha - \beta\omega(\mu-\nu)g_2$$

Prenant ce dernier terme $\geqslant 0$, @ le sera aussi par conséquent, et on trouve comme condition suffisante pour la stabilité que dans le plan de Popov, pour $\nu > 0$, $G(j\omega)$ doit rester à l'extérieur d'une parabole qui coupe l'axe réel en $-\frac{1}{\nu}$, $-\frac{1}{\mu}$ qui, par extension du terme employé pour le cercle, est la parabole limite.

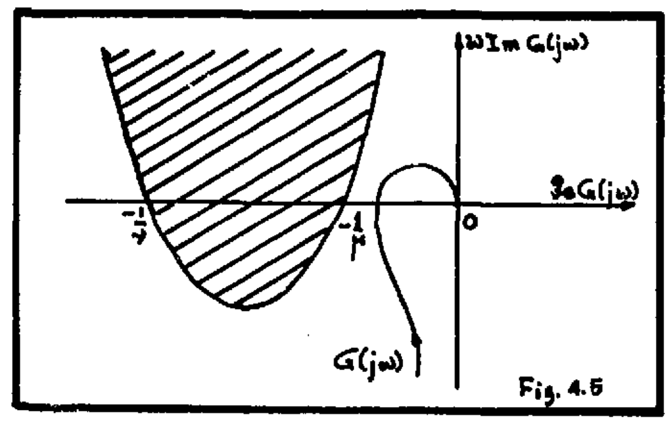


Fig. 4.5

Pour $\nu < 0$, $G(j\omega)$ doit rester à l'intérieur de la parabole

Ce résultat de la parabole est équivalent à celui de Bergen et Sapiro[15] publié aux U.S.A. dans l'année 1967.

5 - UNE NOUVELLE UTILISATION DU LEMME MKY

Le théorème de Popov et ses généralisations étudient les systèmes dynamiques décrits par un système d'équations différentielles de la forme :

$$
(I) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi \\ \xi = -\varphi(\sigma) \\ \sigma = h^T x \end{cases}
$$

Ce système d'équations comprend comme cas particulier les équations différentielles du type :

$$
\frac{d^n x}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 x + \varphi(x) = 0
$$

Or les équations du type de Van der Pol, c'est à dire :

$$
\frac{d^n x}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 x + \psi(x)\frac{dx}{dt} = 0
$$

n'entrent pas dans ces études.

Ceci nous a amené à porter notre attention sur les systèmes dynamiques décrits par un système d'équations différentielles de la forme :

$$
(II) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi \\ \xi = -\psi(\sigma)\dot{\sigma} \\ \sigma = h^T x \end{cases}
$$

Lemme 5.1 :

$$
(I + kbh^T)^{-1} = \left(I - \frac{k}{1+kh^Tb} bh^T\right) , \qquad k \text{ cte. réelle}
$$

En effet :

$$
(I + kbh^T)\left(I - \frac{k}{1+kh^Tb} bh^T\right) = I - \frac{k}{1+kh^Tb} bh^T + kbh^T - \frac{k^2}{1+kh^Tb} bh^Tbh^T = I
$$

Théorème 5.1 : Soit le système dynamique (II) sous les hypothèses :

i) $\psi(\sigma)$ continue

ii) $0 < \psi(\sigma)$, $\psi(0) = 0$

iii) $h^T b \geq 0$

iv) La matrice A est stable

$G(s) = h^T(sI - A)^{-1} b$ est la fonction de transfert de la partie linéaire du système.

Si :

(a) $\mathcal{Re}\, j\omega\, G(j\omega) \geq 0$ pour tout ω réel

Le système (II) est absolument stable.

Démonstration :

Remplaçant ξ et σ par ses valeurs en x :

$$
\dot{x} = Ax - b\psi(h^T x) h^T \dot{x}
$$

$$
(I + \psi(h^T x) bh^T)\dot{x} = Ax
$$

$$
\dot{x} = [I + \psi(h^T x) bh^T]^{-1} Ax
$$

Faisant appel au lemme 5.1 :

$$\dot{x} = \left[I - \frac{\psi(h^Tx)\, b\, h^T}{1+\psi(h^Tx)h^Tb} \right] Ax$$

$$\dot{x} = Ax - \frac{b\,\psi(h^Tx)}{1+\psi(h^Tx)h^Tb}\, h^TAx$$

Soient : $\varphi(h^Tx) = \dfrac{\psi(h^Tx)}{1+\psi(h^Tx)h^Tb} > 0$ et $\theta(x) = h^TAx$

$\dot{x} = Ax - b\varphi(h^Tx)\theta(x)$

La condition ⓐ est équivalente à :

$$h^Tb + \mathcal{R}e\, h^TA(j\omega I - A)^{-1}b \geq 0$$

Soient $\gamma = h^Tb$ et $k = A^Th$, avec le lemme MKY nous avons :

Il existe $P > 0$, $D \geq 0$ et q solutions de :

1) $PA + A^TP = -2qq^T - 2D$

2) $Pb - k = 2\sqrt{\gamma}\, q$

Soit $V(x) = \frac{1}{2}x^TPx$ une fonction de Liapounov possible.

Evaluons sa dérivée :

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}x^T(PA + A^TP)x - \varphi(h^Tx)\theta(x)\, x^TPb$$

Ajoutant et retranchant $\varphi(h^Tx)[\theta(x)]^2 - h^Tb[\varphi(h^Tx)\theta(x)]^2$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}x^T(PA + A^TP)x - \varphi(h^Tx)\theta(x)\, x^T(Pb - A^Th) - h^Tb[\varphi(h^Tx)\theta(x)]^2$$

$$- \varphi(h^Tx)[\theta(x)]^2 + h^Tb[\varphi(h^Tx)\theta(x)]^2$$

Or :

$$-\varphi(h^Tx)[\theta(x)]^2 + h^Tb[\varphi(h^Tx)\theta(x)]^2 = -\varphi(h^Tx)[\theta(x)]^2[1 - \varphi(h^Tx)h^Tb]$$

$$= -\frac{\varphi(h^Tx)[\theta(x)]^2}{1+\psi(h^Tx)h^Tb} \leq 0$$

Remplaçant par 1) et 2) :

$$\dot{V}(x) = -[q^Tx]^2 - 2\sqrt{\gamma}\,\varphi(h^Tx)\theta(x)q^Tx - \gamma(\varphi(h^Tx)\theta(x))^2 - \frac{\psi(h^Tx)[\theta(x)]^2}{1+\psi(h^Tx)h^Tb} - x^TDx$$

$$\dot{V}(x) = -[q^Tx + \sqrt{\gamma}\,\varphi(h^Tx)\theta(x)]^2 - \frac{\psi(h^Tx)[\theta(x)]^2}{1+\psi(h^Tx)h^Tb} - x^TDx$$

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

Il reste à démontrer que $\dot{V}(x(t)) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$.

En effet, $\dot{V} = 0$ implique $\varphi(h^Tx)\theta(x) = 0$, donc $\dot{x} = Ax$:

$x = e^{At}x_0$, $q^Te^{At}x_0 \equiv 0$ et $x_0^TDx_0 = 0$, d'après iv) du lemme MKY, $x_0 = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$. On a alors $\dot{V}(x) < 0$ $\forall x \neq 0$ et le théorème est démontré.

<u>Théorème 5.2</u> : Soit le système (II) sous les hypothèses :

i) $0 < \psi(\sigma) < \mu$, $\psi(0) = 0$

ii) $\psi(\sigma)$ continue

iii) $h^Tb \geq 0$

iv) La matrice A est stable.

Si :

ⓐ $\frac{1}{\mu} + \mathcal{R}e\, j\omega\, G(j\omega) \geqslant 0$ pour tout w réel

le système Ⓘ est absolument stable.

Démonstration :

De la même manière qu'au théorème 5.1 on arrive à :

$$\dot{x} = Ax - b\varphi(h^T x)\,\theta(x)$$

La condition ⓐ est équivalente à :

$$\frac{1}{\mu} + h^T b + \mathcal{R}e\, h^T A(j\omega I - A)^{-1} b \geqslant 0$$

Soient $\gamma = \frac{1}{\mu} + h^T b$ et $k = A^T h$ avec MKY

on a $\mathcal{P} > 0$, $D \geqslant 0$ et q solutions de :

1) $\mathcal{P}A + A^T\mathcal{P} = -2qq^T - 2D$

2) $\mathcal{P}b - k = 2\sqrt{\gamma}\, q$

Soit $V(x) = \frac{1}{2} x^T \mathcal{P} x$ une fonction de Liapounov possible

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T(\mathcal{P}A + A^T\mathcal{P})x - \varphi(h^T x)\,\theta(x)\, x^T \mathcal{P} b$$

Ajoutant et retranchant

$$\varphi(h^T x)[\theta(x)]^2 - (h^T b + \tfrac{1}{\mu})[\varphi(h^T x)\,\theta(x)]^2$$

Remplaçant par 1) et 2) et effectuant :

$$\dot{V}(x) = -[q^T x + \sqrt{\gamma}\,\varphi(h^T x)\theta(x)]^2 - \frac{1}{\mu}\,\frac{\varphi(h^T x)[\theta(x)]^2}{1 + \psi(h^T x)\, h^T b}\,[\mu - \psi(h^T x)] - x^T D x$$

$$\dot{V}(x) < 0$$

Avec le même raisonnement qu'au théorème 5.1, on démontre

$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall\, x \neq 0$

<u>Lemme 5.2</u> :

$$h^T\left[sI - A + \frac{\vartheta}{1+\vartheta h^T b}\, b h^T A\right]^{-1} \frac{b}{1+\vartheta h^T b} = \frac{h^T(sI-A)^{-1} b}{1 + \vartheta s\, h^T (sI-A)^{-1} b}$$

Démonstration :

Soient $Q = sI - A + \frac{\vartheta}{1+\vartheta h^T b}\, b h^T A$ et $\mathcal{P} = sI - A$

$$Q - \mathcal{P} = \frac{\vartheta}{1+\vartheta h^T b}\, b h^T A$$

Essayons d'écrire Q^{-1} sous la forme :

Multipliant à gauche par Q et à droite par $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = Q + Q B \mathcal{P}$$

On obtient ainsi :

$$B = -\frac{\vartheta}{1+\vartheta h^T b}\, Q^{-1} b h^T A \mathcal{P}^{-1}$$

Remplaçant cette valeur de B dans 1) et multipliant à gauche par h^T et à droite par $\frac{b}{1+\vartheta h^T b}$:

$$h^T Q^{-1} \frac{b}{1+\vartheta h^T b} = h^T \mathcal{P}^{-1} \frac{b}{1+\vartheta h^T b} - \frac{\vartheta}{1+\vartheta h^T b}\, h^T Q^{-1} b h^T A \mathcal{P}^{-1} \frac{b}{1+\vartheta h^T b}$$

$$h^T Q^{-1} \frac{b}{1+\vartheta h^T b}\left[1 + \frac{\vartheta h^T}{1+\vartheta h^T b} A \mathcal{P}^{-1} b\right] = h^T \mathcal{P}^{-1} \frac{b}{1+\vartheta h^T b}$$ donc :

$$h^T Q^{-1} \frac{b}{1+\vartheta h^T b} \qquad \frac{h^T \mathcal{P}^{-1} b}{1 + \vartheta(h^T b + h^T A \mathcal{P}^{-1} b)} = \frac{h^T \mathcal{P}^{-1} b}{1 + \vartheta s\, h^T \mathcal{P}^{-1} b}$$ C.Q.F.D.

<u>Théorème 5.3</u> : Soit le système (II) sous les hypothèses :

i) $\nu < \psi(h^T x) < \mu$, $\psi(0) = \nu$, ψ continue.

ii) $h^T b \geq 0$

iii) La matrice $A - \nu b h^T A$ est stable

Si :

(a) $\frac{1}{\mu-\nu} + \mathrm{Re}\,\frac{j\omega G(j\omega)}{1+\nu j\omega G(j\omega)} \geq 0$ pour tout ω réel

le système (II) est absolument stable.

Démonstration :

$\dot{x} = Ax - b\psi(\sigma)\dot{\sigma}$

Ajoutant et retranchant $b\nu\dot{\sigma}$

$\dot{x} = Ax - b\nu\dot{\sigma} - b[\psi(\sigma) - \nu]\dot{\sigma}$

Soit $\pi(\sigma) = \psi(\sigma) - \nu$

$0 < \pi(\sigma) < \mu - \nu$, $\pi(0) = 0$

$\dot{x} = Ax - \nu b h^T \dot{x} - b\pi(\sigma)\dot{\sigma}$

$\dot{x} = (I + \nu b h^T)^{-1} A x - (I + \nu b h^T)^{-1} b \pi(\sigma)\dot{\sigma}$

Soient $A' = (I + \nu b h^T)^{-1} A = A - \frac{\nu b h^T A}{1 + \nu h^T b}$

et $b' = (I + \nu b h^T)^{-1} b = \frac{b}{1 + \nu h^T b}$

On a donc

$\dot{x} = A'x - b'\pi(\sigma)\dot{\sigma}$

Faisant appel au théorème 5.2, avec $G'(s) = h^T(sI - A')^{-1} b'$, on obtient comme condition pour la stabilité :

$\frac{1}{\mu-\nu} + \mathrm{Re}\, j\omega G'(j\omega) \geq 0$

Tenant compte du lemme 5.2 :

$G'(s) = \frac{G(s)}{1 + \nu s G(s)}$

on arrive à :

(a) $\frac{1}{\mu-\nu} + \mathrm{Re}\,\frac{j\omega G(j\omega)}{1+\nu j\omega G(j\omega)} \geq 0$ C.Q.F.D.

Interprétation :

(a) est équivalente à :

$\mathrm{Re}\left\{\frac{j\omega G(j\omega)}{1+\nu j\omega G(j\omega)} + \frac{1}{\mu-\nu}\right\} \geq 0$

Opérant :

$\frac{\mu}{\nu(\mu-\nu)}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{j\omega G(j\omega) + 1/\mu}{j\omega G(j\omega) + 1/\nu}\right\} \geq 0$

1) $\nu > 0$. Le système dynamique (II) est absolument stable si, dans le plan complexe $sG(s)$, la représentation de $j\omega G(j\omega)$ n'entoure ni ne pénètre le cercle $(-\frac{1}{\nu}, -\frac{1}{\mu})$ (fig. 5-1)

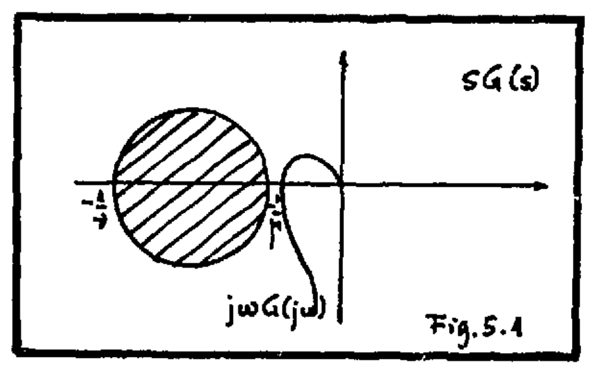


Fig.5.1

2) $\nu < 0$. $j\omega G(j\omega)$ doit rester à l'intérieur du cercle $\left(-\frac{1}{\mu}, -\frac{1}{\nu}\right)$ fig. 5-2.

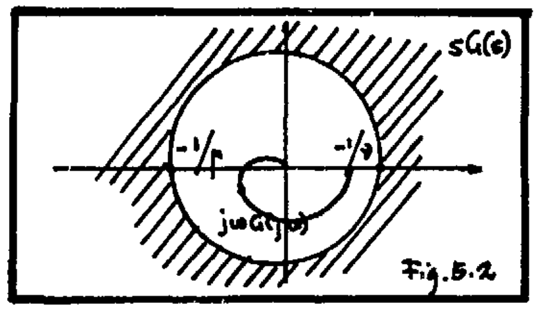


Fig. 5.2

Sandberg*, en étudiant la stabilité des circuits électriques avec capacitances variables, a obtenu une condition de stabilité dans laquelle apparaît aussi, un cercle limite.

Il est facile de voir que si ξ a les dimensions d'un courant et σ celles d'une tension, $\psi(\sigma)$ a celles d'une capacitance et la condition ⓐ de stabilité est équivalente à la condition de Sandberg.

6 - UNE HYPOTHESE PLUS RESTRICTIVE

Nous ferons maintenant, pour le système dynamique (II), une hypothèse plus restrictive sur $h^T b$; ceci nous permettra d'obtenir une série de résultats plus larges que ceux obtenus dans la partie 5.

Théorème 6.1 : Soit le système dynamique :

$$\text{(II)} \begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi \\ \xi = -\psi(\sigma)\dot{\sigma} \\ \sigma = h^T x \end{cases}$$

sous les hypothèses :

i) $\psi(\sigma)$ continue.
ii) $\psi(\sigma) > 0$, $\psi(0) = 0$.
iii) $h^T b = 0$.
iv) la matrice A est stable.

S'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, constantes réelles, telles que:

ⓐ $\mathcal{R}e\,(\alpha + \beta j\omega)\,G(j\omega) \geq 0$ pour tout ω réel , le système (II), avec les hypothèses i) à iv) est absolument stable.

Démonstration :

Remplaçant ξ et σ par ses valeurs en x :

$$\dot{x} = Ax - b\,\psi(h^T x)\,h^T\dot{x}$$

$$(I + \psi(h^T x)\,b h^T)\,\dot{x} = Ax$$

$$\dot{x} = (I + \psi(h^T x)\,b h^T)^{-1} Ax$$

Or :

$$[I+\psi(h^Tx)bh^T]^{-1} = I-\psi(h^Tx)bh^T \qquad \text{(lemme 5.1, où } h^Tb=0)$$

donc :

$$\dot{x} = Ax - b\psi(h^Tx)h^TAx$$

La condition ⓐ de stabilité est équivalente à :

$\beta h^T b + \mathcal{R}e\,(\alpha h^T + \beta h^T A)(j\omega I - A)^{-1} b \geq 0$, équivalente à :

$\mathcal{R}e\,(\alpha h^T + \beta h^T A)(j\omega I - A)^{-1} b \geq 0$

Soit $k = \alpha h + \beta A^T h$, avec le lemme MKY nous avons :

il existe $P > 0$, $D \geq 0$ et q solutions de :

1) $PA + A^TP = -2qq^T - 2D$

2) $Pb - k = 0$

Soit $V(x) = \frac{1}{2} x^T P x + \alpha \int_0^{h^Tx} \psi(\xi)\xi\, d\xi$ une fonction de Liapounov possible.

i) $V(x) > 0$, $V(0) = 0$

ii) $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$

Evaluons sa dérivée :

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T(PA + A^TP)x - \psi(h^Tx)h^TAx\,x^TPb + \alpha\psi(h^Tx)h^Tx \cdot h^T\dot{x} .$$

$$h^T\dot{x} = h^TAx - h^Tb\,\psi(h^Tx)h^TAx = h^TAx$$

Remplaçant $h^T\dot{x}$ et ajoutant et retranchant $\beta\psi(h^Tx)[h^TAx]^2$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T(PA + A^TP)x - \psi(h^Tx)h^TAx\,x^T(Pb - \beta A^Th - \alpha h) - \beta\psi(h^Tx)[h^TAx]^2$$

Substituant par 1) et 2) :

$$\dot{V}(x) = -[q^Tx]^2 - \beta\psi(h^Tx)[h^TAx]^2 - x^TDx$$

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

Il reste à démontrer que $\dot{V}(x(t)) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$.

En effet, $\dot{V} = 0$ implique $\psi(h^Tx)(h^TAx) = 0$, donc $\dot{x} = Ax$:

$x = e^{At}x_0 \Rightarrow q^Te^{At}x_0 \equiv 0$, $x_0^TDx_0 = 0 \Rightarrow$ la partie IV) du lemme MKY indique $x_0 = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$.

<u>Théorème 6.2</u> : Soit le système (II) sous les hypothèses :

i) $\psi(\sigma)$ continue

ii) $0 < \psi(\sigma) < \mu$, $\psi(0) = 0$

iii) $h^Tb = 0$

iv) La matrice A est stable

S'il existe $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$, constantes réelles, telles que :

ⓐ $\frac{\beta}{\mu} + \mathcal{R}e\,(\alpha + \beta j\omega)G(j\omega) \geq 0$ pour tout ω réel le système (II) , avec les hypothèses i) à iv) est absolument stable.

Démonstration :

De la même manière qu'au théorème 6.1 nous arrivons à :

$\dot{x} = Ax - b\,\psi(h^T x)\,h^T A x$

La condition ⓐ est équivalente à :

$\frac{\beta}{\mu} + \mathcal{R}e\,(\alpha h^T + \beta h^T A)(j\omega I - A)^{-1} b \geqslant 0$

Soient $\delta = \frac{\beta}{\mu}$ et $k = \alpha h + \beta A^T h$, avec le lemme MKY nous avons :

Il existe $\mathcal{P} > 0$, $D \geqslant 0$ et q solutions de :

1) $\mathcal{P}A + A^T\mathcal{P} = -2qq^T - 2D$

2) $\mathcal{P}b - k = 2\sqrt{\delta}\,q$

Soit $V(x) = \frac{1}{2} x^T \mathcal{P} x + \alpha \int_0^{h^T x} \psi(\xi)\,\xi\, d\xi$, une fonction de Liapounov possible.

i) $V(x) > 0$, $V(0) = 0$

ii) $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$

$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T(\mathcal{P}A + A^T\mathcal{P})x - \psi(h^T x)\,h^T A x\, x^T \mathcal{P} b + \alpha\,\psi(h^T x)\,h^T x\, h^T A x$

Ajoutant et retranchant $\beta\,\psi(h^T x)[h^T A x]^2 - \frac{\beta}{\mu}[\psi(h^T x)\,h^T A x]^2$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T(\mathcal{P}A + A^T\mathcal{P})x - \psi(h^T x)\,h^T A x\, x^T(\mathcal{P}b - \beta A^T h - \alpha h) - \frac{\beta}{\mu}[\psi(h^T x) h^T A x]^2$$
$$-\beta\,\psi(h^T x)[h^T A x]^2 + \frac{\beta}{\mu}[\psi(h^T x)\,h^T A x]^2$$

Remplaçant par 1) et 2) et regroupant les termes :

$$\dot{V}(x) = -[q^T x + \sqrt{\delta} + \upsilon x)\,h^T A x]^2 - \frac{\beta}{\mu}\,\psi(h^T x)[h^T A x]^2(\mu - \psi(h^T x)) - x^T D x$$

$\dot{V}(x) \leqslant 0$

Il suffit de répéter le raisonnement du théorème 6.1 pour arriver à :

$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$

<u>Théorème 6.3</u> : soit le système (II) sous les hypothèses :

i) $\psi(\sigma)$ continue

ii) $\nu < \psi(\sigma) < \mu$, $\psi(0) = \nu$

iii) $h^T b = 0$

iv) La matrice $(I - \nu b h^T)A$ est stable

S'il existe $\alpha \geqslant 0$ et $\beta > 0$, constantes réelles, telles que :

ⓐ $\frac{\beta}{\mu - \nu} + \mathcal{R}e\,(\alpha + \beta j\omega)\dfrac{G(j\omega)}{1 + \nu j\omega G(j\omega)} \geqslant 0$ pour tout ω réel

le système (II) , sous les hypothèses i) à iv) est absolument stable.

Démonstration :

$\dot{x} = Ax - b\,\psi(h^T x)\,h^T A x$

Ajoutant et retranchant $b\,\nu\,h^T A x$

$\dot{x} = Ax - \nu\, b h^T A x - b[\psi(h^T x) - \nu]\,h^T A x$

Avec : a) $\varphi(h^T x) = \psi(h^T x) - \nu$; $0 < \varphi(h^T x) < \mu - \nu$, $\varphi(0) = 0$

b) $A' = (I - \nu b h^T)A$

c) $h^T A' x = h^T(I - \nu b h^T)Ax = h^T A x$

nous avons

$\dot{x} = A'x - b\,\varphi(h^T x)\,h^T A' x$

Faisant appel au théorème 6.2, avec $G'(s) = h^T(sI-A')^{-1}b$
on obtient comme condition pour la stabilité :

$$\frac{\beta}{\mu-\gamma} + \mathcal{Re}\,(\alpha+\beta j\omega)\,G'(j\omega) \geq 0$$

Tenant compte du lemme 5.2 avec $h^T b = 0$

$$G'(s) = \frac{G(s)}{1+\gamma s G(s)}$$

on arrive à :

$$\frac{\beta}{\mu-\gamma} + \mathcal{Re}\,(\alpha+\beta j\omega)\,\frac{G(j\omega)}{1+\gamma j\omega G(j\omega)} \geq 0 \qquad \text{T.D.}$$

Interprétation des théorèmes démontrés :

6.1) ⓐ $\mathcal{Re}\,(\alpha+\beta j\omega)\,G(j\omega) \geq 0$; $\psi(\sigma) > 0$.

Soit $G(j\omega) = g_1 + j g_2$

ⓐ $\mathcal{Re}\,(\alpha+\beta j\omega)\,G(j\omega) = \alpha g_1 - \beta\omega g_2 \geq 0$

Soit le plan de Popov (fig. 6.1) : $\mathcal{Re}\,G(j\omega)$, $\omega\,\mathcal{I}m\,G(j\omega)$

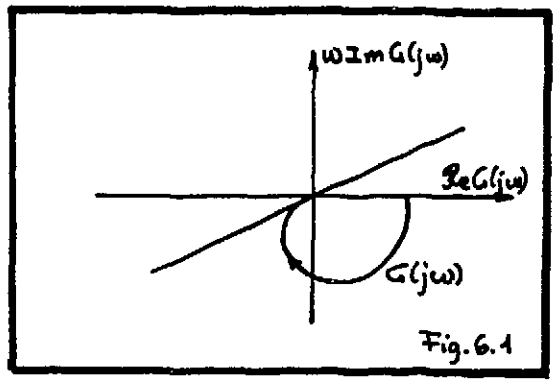


Fig. 6.1

La condition ⓐ signifie que le système (II) est absolument stable, si la représentation de $G(j\omega)$ dans le plan de Popov se trouve entièrement à droite d'une ligne droite à pente ≥ 0 passant par l'origine.

6.2) ⓐ $\frac{\beta}{\mu} + \mathcal{Re}\,(\alpha+\beta j\omega)\,G(j\omega) \geq 0$; $0 < \psi(\sigma) < \mu$

Soit $G(j\omega) = g_1 + j g_2$

ⓐ $\frac{\beta}{\mu} + \mathcal{Re}\,(\alpha+\beta j\omega)\,G(j\omega) = \frac{\beta}{\mu} + \alpha g_1 - \beta\omega g_2 \geq 0$

Soit le plan de Popov (Fig. 6.2) : $\mathcal{Re}\,G(j\omega)$, $\omega\,\mathcal{I}m\,G(j\omega)$.

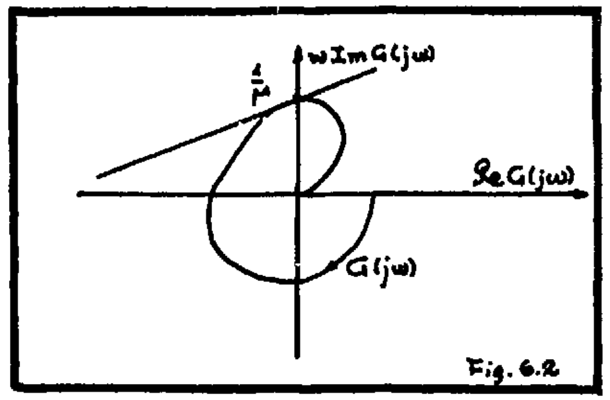


Fig. 6.2

La condition de stabilité ⓐ signifie que le système (II) est absolument stable, si la représentation de $G(j\omega)$ dans le plan de Popov se trouve entièrement à droite d'une ligne droite à pente ≥ 0 passant par $(0, 1/\mu)$.

6.3) ⓐ $\frac{\beta}{\mu-\gamma} + \mathcal{Re}\,(\alpha+\beta j\omega)\,\frac{G(j\omega)}{1+\gamma j\omega G(j\omega)} \geq 0$

ⓐ est équivalente à :

$$ⓐ \quad \alpha\,\mathcal{Re}\,\frac{G(j\omega)}{1+\gamma j\omega G(j\omega)} + \frac{\beta}{\mu-\gamma}\,\mathcal{Re}\left\{\frac{\mu j\omega G(j\omega)+1}{\gamma j\omega G(j\omega)+1}\right\} \geq 0$$

1) - $\alpha = 0$, $\gamma > 0$: La condition de stabilité ⓐ signifie que le système (II) est absolument stable si la représentation de $j\omega G(j\omega)$ dans le plan complexe $sG(s)$ ne pénètre ni n'entoure le cercle $\left(-\frac{1}{\gamma}, -\frac{1}{\mu}\right)$.

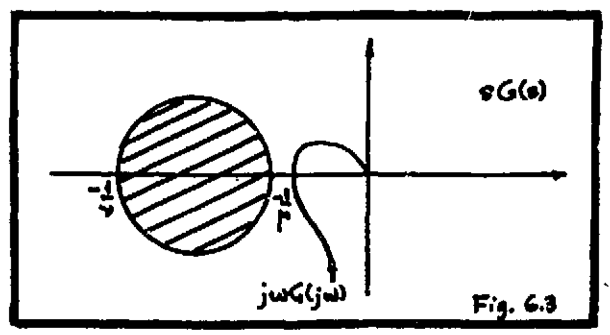


Fig. 6.3

$\nu<0$: $j\omega G(j\omega)$ doit rester à l'intérieur du cercle $-\frac{1}{\mu}, -\frac{1}{\nu}$ (fig. 5.2)

2) - $\alpha>0$, $\nu>0$: Soit $G(j\omega)=g_1+jg_2$

Opérant sur ⓐ on arrive à :

$$ⓐ \quad \beta\mu\nu\omega^2 g_1^2+\beta\mu\nu\omega^2 g_2^2-\beta(\mu+\nu)\omega g_2+\beta+\alpha(\mu-\nu)g_1\geq 0$$

ⓐ est supérieur ou égal à $\beta\mu\nu\omega^2 g_2^2-\beta(\mu+\nu)\omega g_2+\beta+\alpha(\mu-\nu)g_1$

Prenant ce dernier terme ≥ 0 , ⓐ le sera aussi en conséquence et on trouve comme condition suffisante pour la stabilité absolue, que dans le plan de Popov (Fig. 6.4), $G(j\omega)$ doit rester à l'extérieur d'une parabole qui coupe l'axe $\omega \operatorname{Im} G(j\omega)$ en $\frac{1}{\nu}$, $\frac{1}{\mu}$. Celle-ci est une nouvelle parabole limite. Pour $\nu<0$, $G(j\omega)$ doit rester à l'intérieur de la parabole $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$.

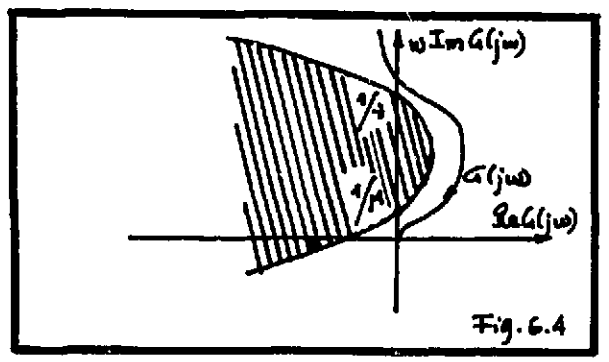


Fig. 6.4

Nous ajouterons maintenant aux théorèmes déjà démontrés une extension qui peut se révéler intéressante.

<u>Théorème 6.4</u> : soit le système ⅠⅠ sous les hypothèses :

i) $\psi(\sigma)$ continue

ii) $-\nu<\psi(\sigma)<0$, $\psi(0)=0$.

iii) $h^T b=0$

iv) La matrice A est stable.

S'il existe $\alpha\geq 0$. et $\beta>0$, constantes réelles, telles que :

ⓐ $\frac{\beta}{\nu}-\operatorname{Re}(\alpha+\beta j\omega)G(j\omega)\geq 0$ pour tout ω réel , le système ⅠⅠ avec les hypothèses i) à iv) est absolument stable.

Démonstration :

$$\dot{x}=Ax-b\,\psi(h^Tx)\,h^TAx$$

La condition ⓐ est équivalente à :

$$\frac{\beta}{\nu}-\operatorname{Re}(\alpha h^T+\beta h^TA)(j\omega I-A)^{-1}b\geq 0$$

Soient $\gamma=\frac{\beta}{\nu}$ et $k=-\alpha h-\beta A^T h$, avec le lemme MKY : il existe $P>0$, $D\geq 0$ et q solutions de :

1) $PA+A^TP=-2qq^T-2D$

2) $Pb-k=2\sqrt{\gamma}\,q$

Soit $V(x)=\frac{1}{2}x^TPx-\alpha\int_0^{h^Tx}\psi(\zeta)\zeta\,d\zeta$ une fonction de Liapounov possible.

$$\dot{V}(x)=\frac{1}{2}x^T(PA+A^TP)x-\psi(h^Tx)\,h^TAx\,x^TPb-\alpha\,\psi(h^Tx)\,h^Tx\,h^TAx$$

Ajoutant et retranchant $\beta\,\psi(h^Tx)[h^TAx]^2+\frac{\beta}{\nu}[\psi(h^Tx)h^TAx]^2$,

remplaçant par 1) et 2) et effectuant :

$$\dot{V}(x)=-[q^Tx+\sqrt{\gamma}\,\psi(h^Tx)h^TAx]^2+\frac{\beta}{\nu}\psi(h^Tx)[h^TAx]^2[\nu+\psi(h^Tx)]-x^TDx$$

$$\dot{V}(x)<0$$

La démonstration de $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$, est identique aux cas antérieurs.

Interprétation :

$$ⓐ \quad \frac{\beta}{\gamma} - \mathcal{R}e\,(\alpha + \beta j\omega)\, G(j\omega) \geqslant 0 \qquad ; \qquad -\gamma < \psi(\sigma) < 0$$

Soit $G(j\omega) = g_1 + j g_2$

$$ⓐ \quad \frac{\beta}{\gamma} - \alpha g_1 + \beta \omega g_2 \geqslant 0$$

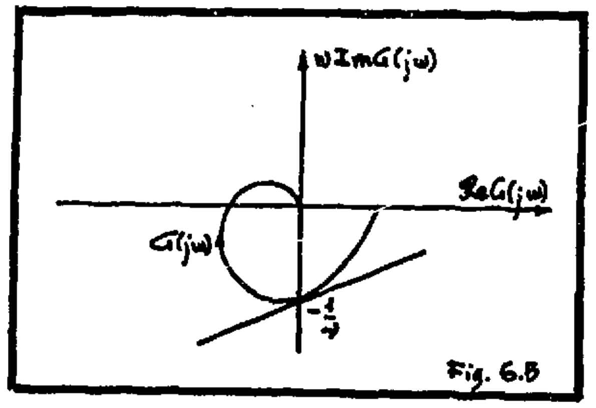


Fig. 6.5

La condition ⓐ de stabilité signifie que le système (II) est absolument stable si la représentation de $G(j\omega)$ dans le plan de Popov (fig. 6.5) se trouve à gauche d'une ligne droite, de pente $\geqslant 0$, qui passe par $(0, -\frac{1}{\gamma})$.

7 - LA CONJECTURE DE AIZERMAN

Nous avons indiqué dans l'introduction que la conjecture de Aïzerman est un cas limite pour l'étude de la stabilité des systèmes de commande non linéaires Il importe donc de voir de plus près en quoi elle consiste.

Avant de parler de la conjecture de Aïzerman proprement dite, il est utile de présenter l'énoncé de deux théorèmes 17 relatifs aux systèmes linéaires :

Théorème 7.1 : Le système linéaire

$$\dot{x} = A x$$

avec A matrice réelle constante $n \times n$, est asymptotiquement stable, si et seulement si, toutes les racines de l'équation caractéristique de A :

$$\mathcal{D}(s) = |sI - A| = s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_1 = 0 \qquad \text{ont}$$

leur partie réelle, négative.

On dira dans ce cas que A est une matrice stable (défi.3.3) et que $\mathcal{D}(s)$ est un polynôme Hurwitzien

Théorème 7.2 : (Routh-Hurwitz) Le polynôme

$$\mathcal{D}(s) = s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_1$$

est un polynôme Hurwitzien si et seulement si, tous les mineurs principaux de la matrice H :

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & . & . & . & a_{2n-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & & & & a_{2n-2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & a_1 & a_3 & . & . & . & a_{2n-3} \\ 0 & 1 & a_2 & . & . & . & a_{2n-4} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_n \end{bmatrix} \quad ; \text{ si } \nu > n,\ a_\nu = 0$$

c'est à dire :

$$D_1 = a_1 \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad . \ . \ . \ . \ , \quad D_n = H$$

sont positifs.

Conjecture de Aïzerman[13] :

Pour le système de commande direct, elle peut se formuler ainsi :

Soit le système

$$(I) \begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi \\ \xi = -\varphi(\sigma) \\ \sigma = h^T x \end{cases}$$

et le système linéarisé :

$$(I') \begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi \\ \xi = -\lambda\sigma \\ \sigma = h^T x \end{cases}$$

Si le système linéarisé (I') est absolument stable pour : $\nu \leq \lambda \leq \mu$, alors le système non linéaire (I) est absolument stable pour : $\nu \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq \mu$.

Nous essayerons maintenant de voir dans quels cas cette conjecture est valable. On peut remarquer qu'il suffit d'étudier le cas : $0 \leq \lambda \leq \mu$ le cas le plus général $\nu \leq \lambda \leq \mu$ pouvant être ramené à la première forme, comme nous l'avons fait au théorème 4.3:

Théorème 7.3 : Soit le système dynamique de commande direct (I), sous les hypothèses :

i) $0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}$

ii) La matrice A est stable

S'il existe une quantité réelle $\mu > 0$, telle que $V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$, avec P matrice constante symétrique, définie positive, est une fonction de Liapounov du système linéarisé (I') pour $\lambda = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases}$, le système non linéaire (I) avec $0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq \mu$ est absolument stable.

Démonstration :

Soit le système linéaire

$$(4) \quad \dot{x} = Ax$$

Il existe, Th. 3.1, $P > 0$ solution de :

$$PA + A^T P = -2C \quad , \quad C > 0$$

dans ce cas elle est : $V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$; une fonction de Liapounov pour (4); en effet :

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (PA + A^T P) x = -x^T C x < 0$$

Soit le système (I') :

$$\dot{x} = Ax - \lambda b h^T x$$

② $\dot{x} = A_\lambda x$; $A_\lambda = A - \lambda b h^T$

Soit $V(x) = \frac{1}{2} x^T \mathcal{P} x$ une fonction de Liapounov possible pour ② :

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (\mathcal{P} A_\lambda + A_\lambda^T \mathcal{P}) x$$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (\mathcal{P} A + A^T \mathcal{P}) x - \lambda x^T \mathcal{P} b h^T x$$

pour $\lambda = \mu$, $\dot{V}(x)$ est définie négative :

$$\mathcal{P} A_\mu + A_\mu^T \mathcal{P} = -2 \mathbb{C}_\mu \quad ; \quad \mathbb{C}_\mu > 0$$

Soit maintenant le système Ⓘ :

③ $\dot{x} = A x - b \varphi(\sigma)$; $0 \leqslant \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leqslant \mu$

Soit $V(x) = \frac{1}{2} x^T \mathcal{P} x$ une fonction de Liapounov possible pour ③:

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (\mathcal{P} A + A^T \mathcal{P}) x - \varphi(\sigma) x^T \mathcal{P} b$$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (\mathcal{P} A + A^T \mathcal{P}) x - \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} x^T \mathcal{P} b h^T x$$

Ajoutant et retranchant : $\mu x^T \mathcal{P} b h^T x$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (\mathcal{P} A_\mu + A_\mu^T \mathcal{P}) x + \left(\mu - \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}\right) x^T \mathcal{P} b h^T x$$

En définitive, avec :

$$\pi(\sigma) = \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \pi_\mu(\sigma) = \left(\mu - \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}\right) \geqslant 0$$

$$\dot{V}(x) = \begin{cases} -x^T \mathbb{C} x - \pi(\sigma) x^T \mathcal{P} b h^T x & \text{ⓐ} \\ -x^T \mathbb{C}_\mu x + \pi_\mu(\sigma) x^T \mathcal{P} b h^T x & \text{ⓑ} \end{cases}$$

Si $x^T \mathcal{P} b h^T x \geqslant 0$, ⓐ, $\dot{V}(x) < 0$

Si $x^T \mathcal{P} b h^T x \leqslant 0$, ⓑ, $\dot{V}(x) < 0$

$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$ C.Q.F.D.

Il est interessant de voir maintenant la signification du théorème 7.3, mais pour cela, il nous faut utiliser les deux propositions suivantes :

1) - V est une fonction homogène de degré m , des variables $x_1, \ldots, x_n$, si :

$$V(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m V(x_1, \ldots, x_n)$$

2) - Si V_d est une fonction homogène de signe défini , cette propriété se conserve pour :

$$V_\varepsilon = V_d + \varepsilon V$$

où V est une fonction homogène de même degré que V_d et ε est un coefficient petit

L'expression :

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (\mathcal{P} A + A^T \mathcal{P}) x - \lambda x^T \mathcal{P} b h^T x$$

entre précisément dans le cadre de la proposition 2, avec $\varepsilon \equiv \lambda$.

La valeur maximale de λ pour laquelle $\dot{V}(x)$ reste définie négative sera la valeur μ du théorème 7.3. μ peut être déterminée à partir des conditions de la définition du signe de la matrice :

$$2 \mathbb{C}_\mu = -(\mathcal{P} A_\mu + A_\mu^T \mathcal{P})$$

Localement au moins, la conjecture de Aĭzerman est donc valable.

Pour le système linéarisé, le théorème 7.2 ($\mathcal{R}.H.$), appliqué à A_λ , nous donne les intervalles de stabilité pour λ : $0 \leqslant \lambda \leqslant \mathcal{M}$.

La question que l'on peut se poser tout de suite est : $\mu = \mathcal{M}$?

Si cette proposition est toujours vraie, la conjecture de Aïzerman serait valable globalement, mais malheureusement ce n'est pas le cas. Les exemples au contraire de Pliss[18], Dewey et Jury[19] infirment sa validité. Il faudrait donc, dans ce cas, ajouter des conditions supplémentaires sur $\varphi(\sigma)$ ou sur la partie linéaire du système I .C'est précisément dans cette dernière voie qu'ont été engagés les travaux de Popov et de ses continuateurs.

Il est intéressant de mentionner que des travaux ont été faits postérieurement, en particulier ceux de Brockett et Willems[20] et de Narendra et Neuman[21] dans lesquels $\varphi(\sigma)$ a été soumise à de nouvelles contraintes.

Nous verrons maintenant ce que donnent dans l'optique de la conjecture de Aïzerman, les théorèmes démontrés dans les parties 4,5 et 6.

Il nous resterait à dire que si le système traité dans le théorème 7.3 est un système de commande direct I , on peut répéter sans difficultés le même raisonnement dans le cas d'un système II

8 - APPLICATIONS

1) Systèmes décrits par

$\dot{x} = Ax - b\varphi(\sigma)$

a) Equation du $2^{nd.}$ degré :

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + \varphi(x) = 0$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

$$\mathcal{R}e\, G(j\omega) = \frac{b - \omega^2}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}$$

$$\omega\, \mathrm{Im}\, G(j\omega) = \frac{-a\omega^2}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}$$

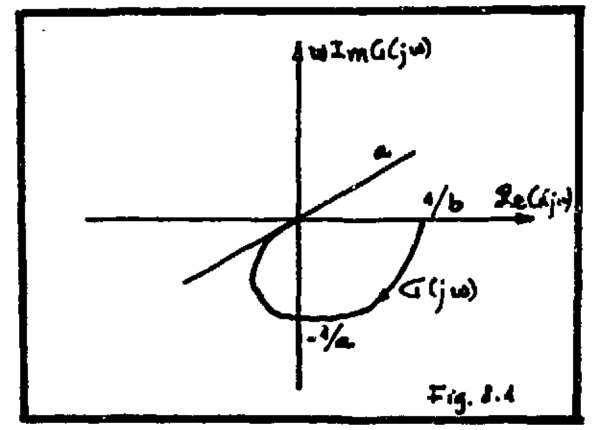


Fig. 8.1

Le système est stable pour toute $\varphi(\sigma)$ continue, telle que :

$0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}$, résultat coïncidant avec celui d'un système linéaire.

b) Equation du 3ème degré

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx + \varphi(x) = 0$$

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + as^2 + bs + c}$$

$$\mathcal{R}e\, G(j\omega) = \frac{c - a\omega^2}{(c - a\omega^2)^2 + \omega^2(b-\omega^2)^2}$$

$$\omega\, \mathrm{Im}\, G(j\omega) = \frac{\omega^2(\omega^2 - b)}{(c - a\omega^2)^2 + \omega^2(b-\omega^2)^2}$$

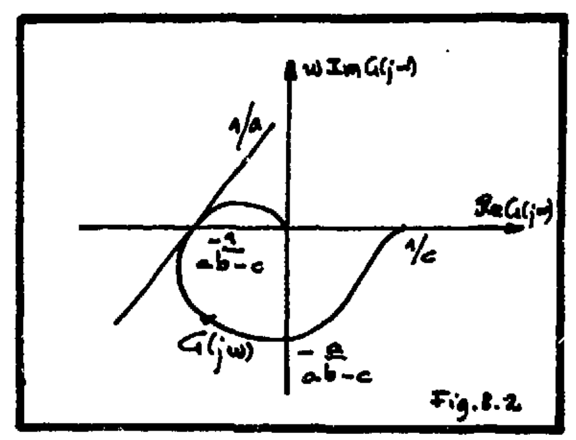


Fig. 8.2

Pour le système linéarisé : $\varphi(\sigma) = \lambda\sigma$, la condition R.H. de stabilité implique : $ab - (c+\lambda) > 0$, donc :

$\lambda < ab - c$

Pour le système N.L. la stabilité est garantie pour :

$0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < ab-c$, ce résultat coïncide également avec celui d'un S.L.

2) Systèmes décrits par :

$\dot{x} = Ax - b\psi(\sigma)\dot{\sigma}$

a) Equation du 2nd. degré :

$\ddot{x} + (a + \psi(x))\dot{x} + bx = 0$;

$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$; $h^T b = 0$.

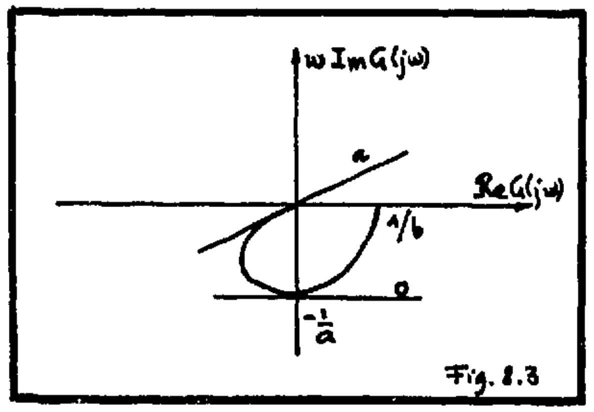


Fig. 8.3

Le système est absolument stable pour :

i) $0 \leqslant \psi(x)$ Th. 6.1.

ii) $-a < \psi(x) \leqslant 0$ Th. 6.4.

Ce résultat coïncide avec celui du système linéarisé pour i) $\lambda \geqslant 0$ ii) $\lambda \leqslant 0$, respectivement.

b) Equation du 3ème degré

$\dddot{x} + a\ddot{x} + (b + \psi(x))\dot{x} + cx = 0$,

$G(s) = \frac{1}{s^3 + as^2 + bs + c}$; $h^T b = 0$.

La droite de pente c/a^2 qui passe par $-\frac{a}{ab-c}$, laisse $G(j\omega)$ à sa gauche si $ab - c < a^3$

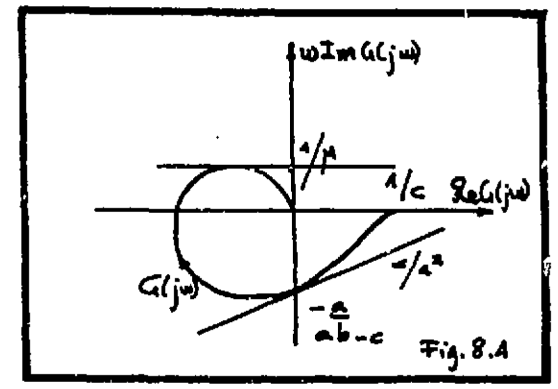


Fig. 8.4

Le système est absolument stable pour :

i) $0 \leqslant \psi(x) < \mu < \infty$

ii) $-\frac{a}{ab-c} < \psi(x) \leqslant 0$ si $ab - c < a^3$

Pour i) le système linéarisé donnerait $\mu = \infty$, et pour ii) le résultat coïncide mais avec une condition supplémentaire pour le cas non linéaire.

B I B L I O G R A P H I E

1) - V.M. POPOV : "Absolute stability of nonlinear systems of automatic control". Automatika i Telemekhanika 22, 961-979. 1961. (Trad. en anglais : Automation and Remote Control).

2) - V.A. YACUBOVICH : "The matrix inequality method in the theory of stability of nonlinear control systems,

I - The absolute stability of forced vibrations". Ibid 25, 1017-1029, 1964.

II - Absolute stability en a class of nonlinearities with derivative condition". Ibid 26, 577-590, 1965.

III - Absolute stability of hysteresis nonlinearities systems". Ibid 26, 753-763, 1965.

3) - R.E. KALMAN : "Liapunov functions for the problem of lur'e in automatic control". Proc. of the Nat. Acad. of Sci. USA 49, 201-205, 1963.

4) - I.W. SANDBERG : "On L_2 - boundedness of solutions of nonlinear functional equations". Bell Syst. Tech.I. 43, 1581, 1964.

5) - I.W. SANDBERG : "On boundedness of solutions of nonlinear integral equations". Ibid 44, 439, 1965.

6) - I.W. SANDBERG : "Some results in the theory of physical systems governed by nonlinear functional equations". Ibid. 44, 871, 1965.

7) - I.W. SANDBERG : "A stability criterion for linear networks containing time-varying capacitors". IEEE Trans. CT-12,2, 1965.

8) - N.N. KRASOVSKII : "Stability of motion". Stanford University Press, 1963.

9) - R.E. KALMAN et J.E. BERTRAM : "Control system analysis and design via the second method of Liapunov". ASME Trans. J. on B.E., 371-393 1960.

10) - LASALLE et LEFSCHETZ : "Stability by Liapunov's direct method". Academic Press, V.4, 1961.

11) - A.M. LETOV : "Stability of nonlinear controls". Princeton University Press, 1961.

12) - A. HALANAY : "Differential equations : stability, oscillations, time-lag". Academic Press V.23, 1966.

13) - S. LEFSCHETZ : "Stability of nonlinear control systems". Academic Press, V.13, 1965.

14) - K.R. MEYER : "Lyapunov functions for the problem of lur'e". Proc. of the Nat. Acad. of Sc. USA 53, 501, 1965.

15) - A. BERGEN et M.SAPIRO:"The parabola test for absolute stability". IEEE Trans. AC-12, n3, 312-314, 1967.

16) - N. MINORSKY : "Nonlinear oscillations". D. Van NOSTRAND 1962.

17) - R. SCHWARZ et B. FRIEDLAND : "Linear Systems". Mc. Graw Hill 1965.

18) - V.A. PLISS : "Nonlocal problems of the theory of oscillations". Academic Press 1966.

19) - A. DEWEY et E. JURY : "A note on Aizerman's conjecture". IEEE Trans. on Automatic Control AC-10,482, 1965.

20) - R. BROCKETT et J. WILLEMS : "Frequency domaine stability criteria I et II. IEEE Trans. AC-10, 255-261, 407-413, 1965.

21) - K. NARENDRA et C. NEUMAN : "Stability of a class of differential equations with a single monotone nonlinearity". J Siam Control 4, 295-308, 1966.

Manuscrit reçu le 4 juillet 1968

FIN