

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

12.1

APPLICATION DE LA THERMODYNAMIQUE
DES SYSTEMES EN NON-EQUILIBRE
AUX ECOULEMENTS DIPHASIQUES LIQUIDE-
VAPEUR AVEC CHANGEMENT DE PHASE

par

Jean-Marc DELHAYE

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble

Rapport CEA - R - 3903

1969

Ca

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

C.E.N. - SACLAY B.P. n°2, 91 - GIF-sur-YVETTE - France

CEA-R-3903 - DELHAYE Jean-Marc

APPLICATION DE LA THERMODYNAMIQUE DES SYSTEMES
EN NON-EQUILIBRE AUX ECOULEMENTS DIPHASIQUES
LIQUIDE-VAPEUR AVEC CHANGEMENT DE PHASE

Sommaire. - On rappelle brièvement les concepts fondamentaux de la thermodynamique des systèmes en non-équilibre et on établit un système d'équations fermé relatif à la thermodynamique et à l'hydrodynamique des écoulements diphasiques avec changement de phase. On a considéré le gaz et le liquide comme des fluides au sens de PRIGOGINE et on a supposé la réversibilité du mouvement de chaque phase.

./.

CEA-R-3903 - DELHAYE Jean-Marc

APPLICATION OF NON-EQUILIBRIUM THERMODYNAMICS
TO TWO-PHASE FLOWS WITH A CHANGE OF PHASE

Summary. - In this report we use the methods of non-equilibrium thermodynamics in two-phase flows. This paper follows a prior one in which we have studied the conservation laws and derived the general equations of two-phase flow.

In the first part the basic ideas of thermodynamics of irreversible systems are given. We follow the classical point of view of S.R. DE GROOT and P. MAZUR.

The second part is concerned with the derivation of a closed set of equations for the two phase elementary volume model. In this model we assume that the elementary volume contains two phases and that it is possible to define a

./.

Les calculs sont identiques à ceux de I. PRIGOGINE et
P. MAZUR concernant l'hydrodynamique de l'hélium liquide.

1969

26 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

volumetric local concentration. To obtain the entropy balance we can choose either the reversibility of the barycentric motion or the reversibility of each phase. We adopt the last assumption and our derivation is the same as this of I. PRIGOGINE and P. MAZUR about the hydrodynamics of liquid helium.

The scope of this work is not to find a general solution to the problems of two-phase flows but to obtain a new set of equations which may be used to explain some characteristic phenomena of two-phase flow such as wave propagation or critical states.

1969

26 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

- Rapport CEA-R-3903 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble
Service des Transferts Thermiques

APPLICATION DE LA THERMODYNAMIQUE
DES SYSTEMES EN NON-EQUILIBRE AUX ECOULEMENTS
DIPHASIQUES LIQUIDE-VAPEUR AVEC CHANGEMENT DE PHASE

par

Jean-Marc DELHAYE

(rapport TT n° 83 de novembre 1967)

- Novembre 1969 -

TABLE DES MATIERES

	Pages
0 - INTRODUCTION	7
1 - RAPPELS SUR LA THERMODYNAMIQUE DES SYSTEMES EN NON-EQUILIBRE	7
2 - APPLICATION AUX ECOULEMENTS DIPHASIQUES AVEC CHANGEMENT DE PHASE	13
2.1. Le modèle à élément de volume diphasique	13
2.2. Conservation de la masse	13
2.3. Conservation de la quantité de mouvement	14
2.4. Equation phasique de l'énergie cinétique	14
2.5. Equation phasique de la conservation d'énergie	15
2.6. Equation de l'énergie	16
2.7. Equation de l'entropie	17
2.8. Les relations phénoménologiques	20
2.9. Les équations de la dynamique des fluides diphasiques	22
2.10. Tentative de fermeture du système d'équations	24

NOMENCLATURE

D	:	coefficient de diffusion
E	:	énergie interne massique
\vec{F}	:	force extérieure massique
\vec{F}_f	:	fonctionnelle de frottement
J	:	flux thermodynamique
\vec{J}	:	vecteur densité de flux de chaleur
\vec{J}_d	:	flux de diffusion
L_{ik}	:	coefficient phénoménologique
\mathcal{L}	:	chaleur latente de vaporisation
Q	:	quantité de chaleur
S	:	entropie massique
T	:	température absolue
$\vec{\sigma}$:	tenseur de contrainte
\vec{U}	:	tenseur unitaire
\vec{u}	:	vitesse de diffusion
\vec{v}	:	vitesse
W	:	travail
X	:	force thermodynamique
a	:	coefficient d'entraînement au changement de phase
c	:	concentration volumique
f	:	coefficient de frottement
h	:	enthalpie massique
k	:	conductivité
p	:	pression réversible

s	:	entropie d'un système
t	:	temps
v	:	volume massique
Δ	:	source d'énergie
Γ	:	source de masse
$\vec{\Lambda}$:	source de quantité de mouvement
$\vec{\Phi}$:	flux d'entropie
$\vec{\Psi}$:	source de quantité de mouvement due au frottement pur
η	:	viscosité de cisaillement
η_v	:	viscosité de volume
μ	:	potentiel thermodynamique
ρ	:	masse volumique
τ	:	source d'entropie
$\bar{\tau}$:	déviateur de contrainte
$\Delta\tau$:	élément de volume

Indices inférieurs :

G	:	gaz
L	:	liquide
a	:	tenseur antisymétrique
e	:	milieu extérieur
i	:	milieu intérieur
k	:	G ou L
o	:	tenseur de trace nulle
s	:	tenseur symétrique.

APPLICATION DE LA THERMODYNAMIQUE DES SYSTEMES
EN NON-ÉQUILIBRE AUX ECOULEMENTS DIPHASIQUES
LIQUIDE-VAPEUR AVEC CHANGEMENT DE PHASE

0 - INTRODUCTION.

Dans le cadre d'une étude générale sur les équations des écoulements diphasiques, nous complétons un travail antérieur [4] par l'utilisation des méthodes de la thermodynamique des systèmes en non-équilibre.

Dans un premier chapitre nous rappelons les concepts fondamentaux de cette thermodynamique. Nous avons suivi la présentation devenue classique de S.R. DE GROOT et de P. MAZUR [1]. Les lecteurs intéressés pourront également consulter l'ouvrage de J. MEIXNER et H.G. REIK [2].

Le deuxième chapitre est consacré à l'établissement d'un système d'équations fermé pour le modèle à élément de volume diphasique. Dans ce modèle nous supposons que l'élément de volume $\Delta\tau$ peut contenir les deux phases et qu'il est ainsi possible de définir une concentration volumique locale. Dans l'établissement du bilan d'entropie nous avons le choix entre la réversibilité du mouvement barycentrique et la réversibilité du mouvement de chacune des phases. C'est ce dernier point de vue que nous avons adopté. Nos calculs sont calqués sur ceux de I. PRIGOGINE et P. MAZUR [5] concernant l'hydrodynamique de l'hélium liquide.

Le but de ce travail n'est pas de trouver une solution générale aux problèmes posés par les écoulements diphasiques mais de fournir un nouvel ensemble d'équations susceptibles d'être utilisé pour expliquer certains phénomènes caractéristiques des écoulements diphasiques tels la propagation des ondes ou les états critiques.

1 - RAPPELS SUR LA THERMODYNAMIQUE DES SYSTEMES EN NON-EQUILIBRE.

Dans la thermodynamique des systèmes en non-équilibre, l'équation du bilan d'entropie joue un rôle fondamental. L'entropie d'un élément de volume varie au cours du temps pour deux raisons :

- a) il existe un flux d'entropie à travers les surfaces limitant le volume,
- b) il existe une source d'entropie à l'intérieur du volume due aux phénomènes irréversibles qui s'y produisent.

Considérons un système. Le deuxième principe, dit qu'il existe une fonction d'état s telle que la variation ds peut se mettre sous la forme :

$$ds = d_e s + d_i s \quad (1)$$

$d_e s$ est l'entropie apportée au système par le milieu extérieur

$d_i s$ est l'entropie créée à l'intérieur du système.

La source d'entropie est toujours une quantité positive ou nulle car l'entropie ne peut être détruite :

$$\begin{aligned} d_i s &= 0 \quad \text{pour une transformation réversible} \\ d_i s &> 0 \quad \text{pour une transformation irréversible,} \end{aligned}$$

donc on aura toujours :

$$d_i s \geq 0 \quad (2)$$

Pour un système isolé (pas d'échange de matière avec le milieu extérieur) le théorème de CARNOT-CLAUSIUS donne :

$$d_e s = \frac{dQ}{T}$$

dQ étant la quantité de chaleur échangée entre le système et une source à température T .

Donc :

$$ds \geq \frac{dQ}{T} \quad \text{pour un système isolé.}$$

Les équations (1) et (2) peuvent s'écrire aussi de la façon suivante :

$$\rho \frac{dS}{dt} = - \operatorname{div} \vec{\Phi}(S) + \tau(S) \quad (3)$$

$$\tau(S) \geq 0 \quad (4)$$

S : est l'entropie massique

ρ : est la masse volumique

$\vec{\Phi}(S)$: est le flux d'entropie

$\tau(S)$: est la source d'entropie.

Le problème est d'explicitier la source d'entropie $\tau(S)$ en fonction des différents phénomènes irréversibles qui apparaissent dans le système. Pour cela il nous faudra les lois de conservation sous forme locale. Ces lois relient :

- a) le flux de diffusion au transport de masse
- b) le tenseur de contrainte au transport de quantité de mouvement
- c) le flux de chaleur au transport d'énergie.

La source d'entropie se calcule alors avec la relation de GIBBS. Cette relation n'est valable rigoureusement que pour une transformation réversible. En effet elle s'écrit :

$$T dS = dE + p dv \quad (5)$$

et découle du premier principe qui s'énonce :

$$dE = dW + dQ$$

et pour une transformation réversible :

$$dE = - p dv + T dS$$

avec :

- E : énergie interne massique
- p : pression réversible
- v : volume massique
- T : température absolue
- S : entropie massique.

On a donc fait l'hypothèse suivante : bien que le système total ne soit pas en équilibre, la relation de GIBBS est applicable au centre de gravité d'un petit élément de masse. C'est une hypothèse d'équilibre local.

Du point de vue macroscopique, cette hypothèse n'est justifiée que par la validité de ses conséquences.

Du point de vue microscopique, on montre que cette hypothèse n'est valable que pour de petites déviations à partir de l'équilibre.

Il apparaît que la source d'entropie se met sous la forme d'une somme de termes, chacun d'eux étant le produit :

- a) d'un flux J caractérisant un processus irréversible
- b) d'une force thermodynamique X reliée à :

- α) la non uniformité du système (ex. : $\vec{\text{grad}} T$)
- β) la déviation d'une fonction d'état par rapport à sa valeur d'équilibre (ex. : affinité chimique).

On aura ainsi :

$$\tau(S) = J_i X_i \quad (6)$$

Montrons cette propriété dans le cas particulier du fluide visqueux. La relation de GIBBS (5) s'écrit :

$$\rho \frac{dS}{dt} = \frac{\rho}{T} \frac{dE}{dt} + \frac{p\rho}{T} dv$$

$\rho \frac{dE}{dt}$ est donné par le premier principe (loi de conservation de l'énergie).

$$\rho \frac{dE}{dt} = - \operatorname{div} \vec{J} - p\rho dv + \vec{\tau} : \operatorname{grad} \vec{V}$$

où \vec{J} est le vecteur flux de chaleur et $\vec{\tau}$ le déviateur de contrainte.

On en déduit :

$$\rho \frac{dS}{dt} = - \frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{J} + \frac{1}{T} \vec{\tau} : \operatorname{grad} \vec{V}$$

ou encore :

$$\rho \frac{dS}{dt} = - \operatorname{div} \left(\frac{1}{T} \vec{J} \right) - \frac{1}{T^2} \vec{J} \cdot \operatorname{grad} T + \frac{1}{T} \vec{\tau} : \operatorname{grad} \vec{V}$$

D'où, en comparant cette équation avec (3) :

a) l'expression du flux d'entropie :

$$\vec{\Phi}(S) = \frac{1}{T} \vec{J}$$

b) l'expression de la source d'entropie :

$$\tau(S) = - \frac{1}{T^2} \vec{J} \cdot \operatorname{grad} T + \frac{1}{T} \vec{\tau} : \operatorname{grad} \vec{V}$$

On démontre que ces expressions de $\vec{\Phi}(S)$ et $\tau(S)$ sont des solutions uniques. Nous constatons ainsi que la source d'entropie $\tau(S)$ est bien une forme bilinéaire, c'est-à-dire une somme de produits de deux facteurs :

Forces thermodynamiques :

$\operatorname{grad} T$ (gradient de température)

$\operatorname{grad} \vec{V}$ (gradient de vitesse)

Flux correspondants :

\vec{J} (flux de chaleur)

$\vec{\tau}$ (flux de quantité de mouvement)

À ce stade nous avons donc :

- a) les lois de conservation : masse, quantité de mouvement, énergie
- b) le bilan d'entropie
- c) l'équation d'état.

Le système n'est pas fermé car les flux irréversibles sont des paramètres inconnus. C'est ici qu'il faut introduire des relations supplémentaires, phénoménologiques entre flux et forces.

Dans certains cas particuliers et en première approximation ces relations sont linéaires :

- loi de FICK (diffusion) : $\vec{J}_d = D \vec{\text{grad}} c$ (\vec{J}_d : flux de diffusion ; c : concentration)

- loi de FOURIER (conduction) : $\vec{J} = k \cdot \vec{\text{grad}} T$ (k : conductivité).

Ces lois phénoménologiques peuvent décrire des couplages car chaque flux peut en principe être une fonction linéaire de TOUTES les forces présentes dans la source d'entropie. Un exemple de couplage est l'effet SORET de diffusion de masse dans un gradient de température.

Compte tenu des remarques précédentes, on écrit de façon tout à fait générale :

$$J_i = L_{ik} X_k$$

Les quantités L_{ik} sont les coefficients phénoménologiques. D'après (6), la source d'entropie s'écrit donc :

$$\tau(S) = J_i X_i = L_{ik} X_k X_i$$

Comme $\tau(S)$ a une valeur positive ou nulle, c'est une forme quadratique définie non négative.

La transformation linéaire qui fait passer des forces aux flux est caractérisée par une matrice de coefficients $\| L_{ik} \|$. Des relations entre les éléments de cette matrice peuvent être trouvées grâce :

a) aux lois de réciprocité d'ONSAGER :

$$L_{ik} = L_{ki} \text{ (autrement dit la matrice } \| L_{ik} \| \text{ est symétrique).}$$

b) au théorème de CURIE qui interdit les couplages entre des éléments de caractère tensoriel différent. Par exemple dans un fluide isotrope un phénomène scalaire comme une réaction chimique ne peut être couplé à un phénomène vectoriel comme la conduction de la chaleur.

La source d'entropie s'écrit de façon générale :

$$\tau(S) = J_i X_i + \vec{J}_k \cdot \vec{X}_k + \bar{J}_m : \bar{X}_m \geq 0$$

Le théorème de CURIE dit aussi que l'on a séparément :

$$J_i X_i \geq 0 \quad ; \quad \vec{J}_k \cdot \vec{X}_k \geq 0 \quad ; \quad \bar{J}_m : \bar{X}_m \geq 0.$$

Etablissons les relations phénoménologiques dans le cas du fluide visqueux.

Nous allons transformer l'expression de la source d'entropie $\tau(S)$ (7).

Posons :

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \tau \bar{U} + \bar{\tau}_0 & \text{avec } \tau &= \frac{1}{3} \bar{\tau} : \bar{U} \\ \text{grad } \bar{V} &= \frac{1}{3} \text{div } \bar{V} \bar{U} + \text{grad}_0 \bar{V} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{\tau} &= \tau \bar{U} + \bar{\tau}_0 \\ \text{grad } \bar{V} &= \frac{1}{3} \text{div } \bar{V} \bar{U} + \text{grad}_0 \bar{V} \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{l'indice } 0 \text{ indique que le tenseur correspondant a} \\ \text{une trace nulle.} \end{array}$$

$$\bar{\tau} : \text{grad } \bar{V} = (\tau \bar{U} + \bar{\tau}_0) : \left(\frac{1}{3} \text{div } \bar{V} \bar{U} + \text{grad}_0 \bar{V} \right) = \tau \text{div } \bar{V} + \bar{\tau}_0 : \text{grad}_0 \bar{V}$$

Le tenseur $\text{grad}_0 \bar{V}$ peut être décomposé en une somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique :

$$\text{grad}_0 \bar{V} = \text{grad}_{os} \bar{V} + \text{grad}_{oa} \bar{V}$$

Donc nous avons :

$$\bar{\tau} : \text{grad } \bar{V} = \tau \text{div } \bar{V} + \bar{\tau}_0 : \text{grad}_{os} \bar{V}$$

puisque le produit scalaire d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique est nul.

La source d'entropie s'écrit donc :

$$\tau(S) = - \frac{1}{T^2} \bar{J} \cdot \text{grad } T + \frac{1}{T} \tau \text{div } \bar{V} + \frac{1}{T} \bar{\tau}_0 : \text{grad}_{os} \bar{V}$$

Forces :	Flux :	Caractère tensoriel :
$\text{grad } T$	\bar{J}	vecteur
$\text{grad}_{os} \bar{V}$	$\bar{\tau}_0$	tenseur du second ordre
$\text{div } \bar{V}$	τ	scalaire.

D'après le théorème de CURIE qui interdit tout couplage entre grandeurs de caractère tensoriel différent, nous aurons :

$$\bar{J} = -k T^2 \text{grad } T$$

$$\bar{\tau}_0 = 2\eta T \text{grad}_{os} \bar{V}$$

$$\tau = \eta_v T \text{div } \bar{V}$$

où k est la conductivité thermique, η la viscosité de cisaillement et η_v la viscosité de volume.

Les résultats de la thermodynamique des systèmes en non équilibre peuvent se justifier :

- a) par la mécanique statistique
- b) à un degré moindre par la théorie cinétique des gaz.

Il faut cependant ajouter que, d'après C. TRUESDELL et R. TOUPIN [3], le théorème de CURIE n'est pas encore démontré de façon absolue et que "a clear and precise formulation of irreversible thermodynamics is not yet available".

2 - APPLICATION AUX ECOULEMENTS DIPHASIQUES AVEC CHANGEMENT DE PHASE.

2.1. Le modèle à élément de volume diphasique

Il existe deux façons d'aborder l'étude théorique des écoulements diphasiques. Ou bien l'élément de volume $\Delta \tau$ ne peut contenir qu'une phase et une seule ($\Delta \tau$ monophasique), ou bien l'élément de volume $\Delta \tau$ peut contenir les deux phases dans des proportions variables ($\Delta \tau$ diphasique). Dans ce dernier cas, il est possible de définir une concentration volumique locale c_k de la phase k ($k = G$ ou L). C'est ce modèle que nous adoptons ici. Nous avons commencé son étude dans un rapport précédent [4] auquel le lecteur pourra se reporter. Dans toute la suite, nous avons supprimé l'indice supérieur * qui indiquait une opération de moyenne locale (cf. [4]).

2.2. Conservation de la masse.

Les équations (77), (78) et (79) de [4] s'écrivent :

$$\frac{\partial c_k \rho_k}{\partial t} + \text{div } c_k \rho_k \vec{v}_k = \Gamma_k \quad (k = G \text{ ou } L) \quad (8)$$

$$\Gamma_G + \Gamma_L = 0 \quad (9)$$

avec ρ_k et \vec{v}_k , la masse volumique et la vitesse locale de la phase k , le terme Γ_k représentant la masse de la phase k créée par unité de volume et par unité de temps. En ajoutant membre à membre les deux équations (8), nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0 \quad (10)$$

où nous avons :

$$\rho = c_G \rho_G + c_L \rho_L \quad (11)$$

$$\rho \vec{v} = c_G \rho_G \vec{v}_G + c_L \rho_L \vec{v}_L \quad (12)$$

2.3. Conservation de la quantité de mouvement.

L'équation k phasique de la quantité de mouvement, c'est-à-dire l'équation relative à la phase k se met sous la forme :

$$c_k \rho_k \frac{D_k \vec{v}_k}{Dt} = c_k \rho_k \vec{F} + \text{div} \vec{\sigma}_k + \vec{\Lambda}_k \quad (k = G \text{ ou } L) \quad (13)$$

$\frac{D_k}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_k \cdot \text{grad}$ est la dérivée matérielle relative à la phase k, \vec{F} la force extérieure massique, $\vec{\sigma}_k$ le tenseur de contrainte de la phase k et $\vec{\Lambda}_k$ la source de quantité de mouvement due aux échanges de la phase k avec l'autre phase.

En ajoutant membre à membre les relations (13), il vient :

$$c_G \rho_G \frac{D_G \vec{v}_G}{Dt} + c_L \rho_L \frac{D_L \vec{v}_L}{Dt} = c_G \rho_G \vec{F} + c_L \rho_L \vec{F} + \text{div} \vec{\sigma}_G + \text{div} \vec{\sigma}_L + \vec{\Lambda}_G + \vec{\Lambda}_L$$

En comparant cette équation avec l'équation suivante démontrée dans [4] :

$$c_G \rho_G \frac{D_G \vec{v}_G}{Dt} + c_L \rho_L \frac{D_L \vec{v}_L}{Dt} = c_G \rho_G \vec{F} + c_L \rho_L \vec{F} + \text{div} \vec{\sigma}_G + \text{div} \vec{\sigma}_L - \Gamma_G \cdot \vec{v}_G - \Gamma_L \cdot \vec{v}_L$$

nous obtenons :

$$\vec{\Lambda}_G + \Gamma_G \cdot \vec{v}_G + \vec{\Lambda}_L + \Gamma_L \cdot \vec{v}_L = 0$$

D'autre part, rappelons que nous avons montré dans [4] que l'équation diphasique de la quantité de mouvement se mettait sous la forme :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \text{div} \vec{\sigma} + \rho \vec{F}$$

et que le tenseur de contrainte diphasique avait pour expression :

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_G + \vec{\sigma}_L - \frac{c_G c_L \rho_G \rho_L}{\rho} (\vec{v}_G - \vec{v}_L) \otimes (\vec{v}_G - \vec{v}_L)$$

2.4. Equation phasique de l'énergie cinétique.

On part de l'équation phasique de quantité de mouvement (13) mise sous la forme :

$$c_k \rho_k \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial t} + c_k \rho_k \vec{v}_k \cdot \text{grad} \vec{v}_k = c_k \rho_k \vec{F} + \text{div} \vec{\sigma}_k + \vec{\Lambda}_k \quad (k = G \text{ ou } L)$$

En multipliant scalairement chaque terme par \vec{v}_k et en tenant compte de l'équation (8), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (c_k \rho_k \frac{1}{2} \vec{V}_k^2) + \text{div} \frac{1}{2} c_k \rho_k \vec{V}_k^2 \cdot \vec{V}_k = c_k \rho_k \vec{V}_k \cdot \vec{F} + \vec{V}_k \cdot \overrightarrow{\text{div}} \vec{\sigma}_k + \frac{1}{2} \Gamma_k \vec{V}_k^2 + \vec{\Lambda}_k \cdot \vec{V}_k \quad (14)$$

2.5. Equation phasique de la conservation d'énergie.

Elle s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} [c_k \rho_k E_k + \frac{1}{2} c_k \rho_k \vec{V}_k^2] + \text{div} [c_k \rho_k E_k \vec{V}_k + \frac{1}{2} c_k \rho_k \vec{V}_k^2 \cdot \vec{V}_k + \vec{J}_k - \vec{\sigma}_k \cdot \vec{V}_k] - c_k \rho_k \vec{F} \cdot \vec{V}_k - \Delta_k = 0$$

$$(k = G \text{ ou } L) \quad (15)$$

Δ_k est la source d'énergie par unité de volume et par unité de temps dues aux interactions entre phases, E_k l'énergie interne de la phase k et \vec{J}_k le vecteur flux de chaleur.

L'équation (15) s'écrit encore en tenant compte de l'équation de continuité (8) :

$$c_k \rho_k \frac{D_k}{Dt} (E_k + \frac{1}{2} \vec{V}_k^2) + \Gamma_k (E_k + \frac{1}{2} \vec{V}_k^2) + \text{div} (\vec{J}_k - \vec{\sigma}_k \cdot \vec{V}_k) - c_k \rho_k \vec{F} \cdot \vec{V}_k - \Delta_k = 0 \quad (16)$$

Or nous avons, d'après les relations (111) et (112) de [4] :

$$\rho E = c_G \rho_G E_G + c_L \rho_L E_L - \frac{1}{2} \rho \vec{U}_G \cdot \vec{U}_L \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 = \frac{1}{2} c_G \rho_G \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} c_L \rho_L \vec{V}_L^2 + \frac{1}{2} \rho \vec{U}_G \cdot \vec{U}_L \quad (18)$$

où \vec{U}_G et \vec{U}_L sont les vitesses de diffusion égales à :

$$\vec{U}_k = \vec{V}_k - \vec{V}$$

En ajoutant membre à membre les équations (17) et (18), il vient :

$$\rho (E + \frac{1}{2} \vec{V}^2) = c_G \rho_G (E_G + \frac{1}{2} \vec{V}_G^2) + c_L \rho_L (E_L + \frac{1}{2} \vec{V}_L^2)$$

donc la quantité $E + \frac{1}{2} \vec{V}^2$ vérifie l'équation (105) de [4].

Ajoutons membre à membre les équations (16) pour $k = G$ et $k = L$. En tenant compte de l'identité fondamentale (105) de [4] il vient :

$$\rho \frac{D}{Dt} (E + \frac{1}{2} \vec{V}^2) + \text{div} \left\{ \vec{J}_G + \vec{J}_L - \vec{\mathcal{C}}_G \cdot \vec{V}_G - \vec{\mathcal{C}}_L \cdot \vec{V}_L + \frac{c_G \rho_G c_L \rho_L}{\rho} [(E_G + \frac{1}{2} \vec{V}_G^2) - (E_L + \frac{1}{2} \vec{V}_L^2)] \cdot (\vec{V}_G - \vec{V}_L) \right\} - \rho \vec{F} \cdot \vec{V} - \Delta_G - \Delta_L = 0$$

D'où nous obtenons en utilisant l'équation (113) de [4] :

$$\rho \frac{D}{Dt} (E + \frac{1}{2} \vec{V}^2) + \text{div} (\vec{J} - \vec{\mathcal{C}} \cdot \vec{V}) - \rho \vec{F} \cdot \vec{V} - \Delta_G - \Delta_L = 0$$

ce qui, comparé avec (110) de [4], donne :

$$\Delta_G + \Delta_L = 0 \quad (19)$$

2.6. Equations de l'énergie.

En retranchant membre à membre l'équation (14) à l'équation (15), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} c_k \rho_k E_k + \text{div} (c_k \rho_k E_k \vec{V}_k + \vec{J}_k - \vec{\mathcal{C}}_k \cdot \vec{V}_k) - c_k \rho_k \vec{V}_k \cdot \vec{F} + c_k \rho_k \vec{V}_k \cdot \vec{F} + \vec{V}_k \cdot \text{div} \vec{\mathcal{C}}_k \\ + \frac{1}{2} \Gamma_k \cdot \vec{V}_k^2 + \Lambda_k \cdot \vec{V}_k - \Delta_k = 0 \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre cette équation pour $k = G$ et pour $k = L$. Nous obtenons en tenant compte de (19) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho E = - \text{div} (c_G \rho_G E_G \vec{V}_G + \vec{J}_G + c_L \rho_L E_L \vec{V}_L + \vec{J}_L) + \vec{\mathcal{C}}_G : \text{grad} \vec{V}_G + \vec{\mathcal{C}}_L : \text{grad} \vec{V}_L \\ - \frac{1}{2} \Gamma_G \cdot \vec{V}_G^2 - \frac{1}{2} \Gamma_L \cdot \vec{V}_L^2 - \vec{\Lambda}_G \cdot \vec{V}_G - \vec{\Lambda}_L \cdot \vec{V}_L \quad (20) \end{aligned}$$

2.7. Equation de l'entropie

La relation de GIBBS s'écrit de façon générale :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dE}{dt} + p \frac{1}{T} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

où S est l'entropie massique et T la température thermodynamique, p est la pression réversible.

On peut écrire cette relation de GIBBS, soit pour le mouvement barycentrique, soit pour chacune des phases. C'est ce dernier point de vue que nous adopterons et nous suivrons le calcul effectué par I. PRIGOGINE et P. MAZUR [5] dans le cas de l'hydrodynamique de l'hélium liquide. Selon notre hypothèse nous aurons alors :

$$\frac{D_k S_k}{Dt} = \frac{1}{T_k} \frac{D_k E_k}{Dt} + \frac{P_k}{T_k} \frac{D_k}{Dt} \left(\frac{1}{c_k \rho_k} \right) \quad (k = G \text{ ou } L)$$

et en multipliant chaque terme par $c_k \rho_k$:

$$c_k \rho_k \frac{D_k S_k}{Dt} = \frac{1}{T_k} c_k \rho_k \frac{D_k E_k}{Dt} + P_k \frac{c_k \rho_k}{T_k} \frac{D_k}{Dt} \left(\frac{1}{c_k \rho_k} \right)$$

Evaluons séparément chaque terme de l'expression précédente :

$$1 - \quad c_k \rho_k \frac{D_k S_k}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} c_k \rho_k S_k + \text{div } c_k \rho_k S_k \vec{V}_k - \Gamma_k \cdot S_k$$

$$2 - \quad c_k \rho_k \frac{D_k E_k}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} c_k \rho_k E_k + \text{div } c_k \rho_k E_k \vec{V}_k - \Gamma_k \cdot E_k$$

$$3 - \quad P_k = c_k \rho_k (\mu_k - E_k + T_k S_k)$$

où μ_k est le potentiel thermodynamique

$$4 - \quad \frac{D_k}{Dt} \left(\frac{1}{c_k \rho_k} \right) = - \frac{1}{(c_k \rho_k)^2} (\Gamma_k - c_k \rho_k \text{div } \vec{V}_k)$$

La relation de GIBBS devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} c_k \rho_k S_k = - \operatorname{div} c_k \rho_k S_k \vec{V}_k + \frac{1}{T_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} c_k \rho_k E_k + \operatorname{div} c_k \rho_k \vec{V}_k E_k - \Gamma_k \mu_k + p_k \operatorname{div} \vec{V}_k \right\}$$

En sommant cette équation sur k, nous obtenons, en supposant $T_G = T_L = T$ (hypothèse sur laquelle nous reviendrons 2.9) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} = & - \operatorname{div} (c_G \rho_G S_G \vec{V}_G + c_L \rho_L S_L \vec{V}_L) + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial c_G \rho_G E_G}{\partial t} + \operatorname{div} c_G \rho_G E_G \vec{V}_G \right. \\ & \left. + p_G \operatorname{div} \vec{V}_G - \Gamma_G \mu_G + \frac{\partial c_L \rho_L E_L}{\partial t} + \operatorname{div} c_L \rho_L E_L \vec{V}_L \right. \\ & \left. + p_L \operatorname{div} \vec{V}_L - \Gamma_L \mu_L \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (20) pour transformer la relation précédente, on obtient finalement l'équation d'entropie suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} = & - \operatorname{div} \sum_k (c_k \rho_k S_k \vec{V}_k + \frac{1}{T} \vec{J}_k) - \frac{1}{T^2} \sum_k \vec{J}_k \cdot \vec{\operatorname{grad}} T + \frac{1}{T} \sum_k \vec{\tau}_k : \vec{\operatorname{grad}} \vec{V}_k \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T} \sum_k \Gamma_k \cdot \vec{V}_k^2 - \frac{1}{T} \sum_k \Gamma_k \mu_k - \frac{1}{T} \sum_k \vec{\Lambda}_k \cdot \vec{V}_k \end{aligned}$$

où nous avons posé :

$$\sum_k f_k = f_G + f_L$$

On tire immédiatement de l'équation d'entropie les expressions du flux d'entropie $\vec{\Phi}(S)$ et de la source d'entropie $\tau(S)$:

$$\vec{\Phi}(S) = \sum_k (c_k \rho_k S_k \vec{V}_k + \frac{1}{T} \vec{J}_k)$$

$$\tau(S) = \frac{1}{T} \vec{\tau}_G : \vec{\operatorname{grad}} \vec{V}_G + \frac{1}{T} \vec{\tau}_L : \vec{\operatorname{grad}} \vec{V}_L \quad \Rightarrow \text{tenseurs (21)}$$

$$-\frac{1}{T^2} (\vec{J}_G + \vec{J}_L) \cdot \vec{\text{grad}} T \quad -\frac{1}{T} (\vec{\Lambda}_G \cdot \vec{v}_G + \vec{\Lambda}_L \cdot \vec{v}_L) \Rightarrow \text{vecteurs}$$

3 4

$$-\frac{1}{T} \Gamma_G \left(\frac{1}{2} \vec{v}_G^2 + \mu_G \right) - \frac{1}{T} \Gamma_L \left(\frac{1}{2} \vec{v}_L^2 + \mu_L \right) \Rightarrow \text{scalaires}$$

5

Nous voyons sur cette expression que la production d'entropie est due :

- a) à la viscosité de chaque phase : termes 1 et 2
- b) à la conductibilité thermique : terme 3
- c) au frottement entre les phases : terme 4
- d) au changement d'état : terme 5

La source d'entropie peut aussi s'écrire en fonction des vitesses de diffusion

\vec{U}_G et \vec{U}_L :

$$\begin{aligned} T \cdot \tau (S) = & -\frac{1}{T} (\vec{J}_G + \vec{J}_L) \cdot \vec{\text{grad}} T + \vec{\tau}_G : \vec{\text{grad}} \vec{v}_G + \vec{\tau}_L : \vec{\text{grad}} \vec{v}_L \\ & - [\vec{\Lambda}_G + \frac{c_G \rho_G}{\rho} (\Gamma_G \vec{v}_G + \Gamma_L \vec{v}_L)] \cdot \vec{v}_G - [\vec{\Lambda}_L + \frac{c_L \rho_L}{\rho} (\Gamma_G \vec{v}_G + \Gamma_L \vec{v}_L)] \cdot \vec{v}_L \\ & - \frac{1}{2} \Gamma_G \vec{U}_G^2 - \frac{1}{2} \Gamma_L \vec{U}_L^2 - \Gamma_G \mu_G - \Gamma_L \mu_L \end{aligned}$$

Posons :

$$\vec{\psi}_G = \vec{\Lambda}_G + \frac{c_G \rho_G}{\rho} (\Gamma_G \vec{v}_G + \Gamma_L \vec{v}_L) \quad (22)$$

$$\vec{\psi}_L = \vec{\Lambda}_L + \frac{c_L \rho_L}{\rho} (\Gamma_G \vec{v}_G + \Gamma_L \vec{v}_L) \quad (23)$$

On en déduit :

$$\vec{\psi}_G + \vec{\psi}_L = 0 \quad (24)$$

Les relations (22) et (23) peuvent encore s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Lambda}_G = \vec{\Psi}_G + \Gamma_G (\vec{V}_L - \vec{V}) \\ \vec{\Lambda}_L = \vec{\Psi}_L + \Gamma_L (\vec{V}_G - \vec{V}) \end{array} \right.$$

La production de quantité de mouvement à l'intérieur d'une phase peut donc être considérée comme la somme d'une source de quantité de mouvement due au frottement pur entre les phases et d'une source de quantité de mouvement due au changement d'état.

La source d'entropie (21) s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} T \cdot \tau(S) = & -\frac{1}{T} (\vec{J}_G + \vec{J}_L) \vec{\text{grad}} T + \bar{\tau}_G : \vec{\text{grad}} \vec{V}_G + \bar{\tau}_L : \vec{\text{grad}} \vec{V}_L - \vec{\Psi}_G \cdot \vec{V}_G - \vec{\Psi}_L \cdot \vec{V}_L \\ & - \left(\frac{1}{2} \vec{U}_G^2 + \mu_G \right) \Gamma_G - \left(\frac{1}{2} \vec{U}_L^2 + \mu_L \right) \Gamma_L \end{aligned}$$

2.8. Les relations phénoménologiques.

D'après le théorème de CURIE et l'expression ci-dessus de la source d'entropie nous avons :

a) pour les quantités tensorielles :

$$\bar{\tau}_G : \vec{\text{grad}} \vec{V}_G + \bar{\tau}_L : \vec{\text{grad}} \vec{V}_L \geq 0 \quad (25)$$

b) pour les quantités vectorielles :

$$-\frac{1}{T} (\vec{J}_G + \vec{J}_L) \vec{\text{grad}} T - \vec{\Psi}_G \cdot \vec{V}_G - \vec{\Psi}_L \cdot \vec{V}_L \geq 0 \quad (26)$$

c) pour les quantités scalaires :

$$-\left(\frac{1}{2} \vec{U}_G^2 + \mu_G \right) \Gamma_G - \left(\frac{1}{2} \vec{U}_L^2 + \mu_L \right) \Gamma_L \geq 0 \quad (27)$$

En tenant compte de (24), l'inéquation (26) devient :

$$-\frac{1}{T} (\vec{J}_G + \vec{J}_L) \vec{\text{grad}} T - \vec{\Psi}_G (\vec{V}_G - \vec{V}_L) \geq 0 \quad (28)$$

Supposons les vecteurs $\vec{\psi}_G$ et $(\vec{v}_G - \vec{v}_L)$ colinéaires. Si $\vec{v}_G > \vec{v}_L$ le gaz cède de la quantité de mouvement du liquide par effet de frottement pur donc $\vec{\psi}_G$ est de sens contraire à $(\vec{v}_G - \vec{v}_L)$ donc :

$$-\vec{\psi}_G \cdot (\vec{v}_G - \vec{v}_L) \geq 0$$

Si $\vec{v}_G < \vec{v}_L$ le liquide cède de la quantité de mouvement au gaz donc $\vec{\psi}_L$ est de sens contraire à $(\vec{v}_L - \vec{v}_G)$, c'est-à-dire que $\vec{\psi}_G$ est de sens contraire à $(\vec{v}_G - \vec{v}_L)$. Donc dans ce cas aussi nous aurons :

$$-\vec{\psi}_G \cdot (\vec{v}_G - \vec{v}_L) \geq 0$$

Cette inéquation ayant lieu quel que soit $\vec{\text{grad}} T$, nous en déduisons que dans l'inéquation (28) nous avons séparément :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{T} (\vec{J}_G + \vec{J}_L) \vec{\text{grad}} T \geq 0 \\ -\vec{\psi}_G \cdot (\vec{v}_G - \vec{v}_L) \geq 0 \end{array} \right.$$

et qu'il n'existe aucun couplage entre la conductibilité thermique et les effets de frottement pur entre les phases.

Si nous supposons en outre que chaque phase garde son individualité, c'est-à-dire que le déviateur de contrainte d'une phase dépend uniquement du champ des vitesses de cette phase, alors les relations phénoménologiques entre flux et forces thermodynamiques se réduisent à :

$$\vec{\tau}_k = \eta_k (\vec{\text{grad}} \vec{v}_k + \vec{\text{grad}}^t \vec{v}_k) - \frac{2}{3} \eta_k \text{div} \vec{v}_k \cdot \vec{U} \quad (k = G \text{ ou } L) \quad (29)$$

$$\vec{J}_G + \vec{J}_L = -k \vec{\text{grad}} T \quad (30)$$

$$\vec{\psi}_G = \vec{F}_f (\vec{v}_G - \vec{v}_L) \quad (31)$$

$$\Gamma_G = a \left(\frac{1}{2} \vec{U}_L^2 - \frac{1}{2} \vec{U}_G^2 + \mu_L - \mu_G \right) \neq a (\mu_L - \mu_G) \quad (32)$$

Les coefficients phénoménologiques sont η_L , η_G , k et a . \vec{F}_f est une fonctionnelle de frottement pur et \vec{U} le tenseur unitaire. Dans la dernière relation (32), nous avons négligé l'énergie cinétique de diffusion devant le potentiel thermodynamique.

Nous admettrons en outre que la fonctionnelle de frottement pur est donnée par :

$$\vec{\psi}_G = f(|\vec{v}_G - \vec{v}_L|) \cdot (\vec{v}_G - \vec{v}_L) \quad (33)$$

2.9. Les équations de la dynamique des fluides diphasiques.

En introduisant les relations (22), (23) et (29) dans l'équation des quantités de mouvement (13), on obtient :

$$c_k \rho_k \frac{D_k \vec{v}_k}{Dt} = c_k \rho_k \vec{F} + \vec{\text{div}} [\eta_k (\text{grad} \vec{v}_k + \text{grad}^t \vec{v}_k) - \frac{2}{3} \eta_k \text{div} \vec{v}_k] \\ + \vec{\psi}_k - \frac{c_k \rho_k}{\rho} \Gamma_G (\vec{v}_G - \vec{v}_L)$$

Si η_k est constant l'équation (34) transformée et associée à (33) donne :

$$c_G \rho_G \frac{D_G \vec{v}_G}{Dt} = c_G \rho_G \vec{F} - \vec{\text{grad}} p_G + \eta_G [\Delta \vec{v}_G + \frac{1}{3} \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{v}_G)] + f(\vec{v}_G - \vec{v}_L) \\ - \frac{c_G \rho_G}{\rho} \Gamma_G (\vec{v}_G - \vec{v}_L) \quad (34)$$

$$c_L \rho_L \frac{D_L \vec{v}_L}{Dt} = c_L \rho_L \vec{F} - \vec{\text{grad}} p_L + \eta_L [\Delta \vec{v}_L + \frac{1}{3} \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{v}_L)] - f(\vec{v}_G - \vec{v}_L) \\ - \frac{c_L \rho_L}{\rho} \Gamma_G (\vec{v}_G - \vec{v}_L) \quad (35)$$

Eliminons p_G et p_L . Pour cela considérons la relation :

$$d\mu_k = - S_k dT + \frac{1}{c_k \rho_k} dp_k \quad (k = G \text{ ou } L)$$

ou encore :

$$c_G \rho_G d\mu_G = - c_G \rho_G S_G dT + dp_G \quad (36)$$

$$c_L \rho_L d\mu_L = - c_L \rho_L S_L dT + dp_L \quad (37)$$

En ajoutant membre à membre ces deux équations nous tirons :

$$\rho d\mu_G = c_L \rho_L d(\mu_G - \mu_L) - (c_G \rho_G S_G + c_L \rho_L S_L) dT + dp$$

d'où en remplaçant $d\mu_G$ par sa valeur dans (36) :

$$dp_G = \frac{c_G \rho_G}{\rho} dp + \frac{c_G \rho_G c_L \rho_L}{\rho} (S_G - S_L) dT + \frac{c_G \rho_G c_L \rho_L}{\rho} d(\mu_G - \mu_L)$$

De même :

$$dp_L = \frac{c_L \rho_L}{\rho} dp + \frac{c_G \rho_G c_L \rho_L}{\rho} (S_G - S_L) dT - \frac{c_G \rho_G c_L \rho_L}{\rho} d(\mu_G - \mu_L)$$

Les équations (34) et (35) s'écrivent finalement :

$$\begin{aligned} c_G \rho_G \frac{D_G \vec{V}_G}{Dt} = c_G \rho_G \vec{F} - \frac{c_G \rho_G}{\rho} \vec{\text{grad}} p - \frac{c_G \rho_G c_L \rho_L}{\rho} (S_G - S_L) \vec{\text{grad}} T + f (\vec{V}_G - \vec{V}_L) \\ - \frac{c_G \rho_G c_L \rho_L}{\rho} \vec{\text{grad}} (\mu_G - \mu_L) + \eta_G [\Delta \vec{V}_G + \frac{1}{3} \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{V}_G)] \\ - \frac{c_G \rho_G}{\rho} \Gamma_G (\vec{V}_G - \vec{V}_L) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} c_L \rho_L \frac{D_L \vec{V}_L}{Dt} = c_L \rho_L \vec{F} - \frac{c_L \rho_L}{\rho} \vec{\text{grad}} p + \frac{c_G \rho_G c_L \rho_L}{\rho} (S_G - S_L) \vec{\text{grad}} T - f (\vec{V}_G - \vec{V}_L) \\ + \frac{c_G \rho_G c_L \rho_L}{\rho} \vec{\text{grad}} (\mu_G - \mu_L) + \eta_L [\Delta \vec{V}_L + \frac{1}{3} \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{V}_L)] \\ - \frac{c_L \rho_L}{\rho} \Gamma_G (\vec{V}_G - \vec{V}_L) \end{aligned} \quad (39)$$

Ces équations remplacent les équations de NAVIER pour un système diphasique de deux fluides au sens de PRIGOGINE.

Nous allons faire une hypothèse concernant la façon dont se fait le changement de phase. Nous supposons que l'équilibre est immédiat, c'est-à-dire que nous avons les relations :

$$\mu_G - \mu_L = 0$$

$$S_G - S_L = \frac{\mathcal{L}}{T} \quad (\mathcal{L} \text{ étant la chaleur latente de vaporisation}).$$

Cette hypothèse revient à admettre que le coefficient phénoménologique a défini par l'équation (32) est de l'ordre de $(\mu_G - \mu_L)^{-1}$. Nous sommes obligés de faire cette hypothèse

car nous avons supposé $T_G = T_L = T$ au paragraphe 2.7 alors que nous avons un transfert de masse Γ_G non nul. Les équations du mouvement (38) et (39) se simplifient et s'écrivent :

$$c_G \rho_G \frac{D_G \vec{V}_G}{Dt} = c_G \rho_G \vec{F} - \frac{c_G \rho_G}{\rho} \text{grad } p - \frac{c_G \rho_G c_L \rho_L}{\rho} \frac{\mathcal{L}}{T} \text{grad } T + f (\vec{V}_G - \vec{V}_L) + \eta_G [\Delta \vec{V}_G + \frac{1}{3} \text{grad } (\text{div } \vec{V}_G)] - \frac{c_G \rho_G}{\rho} \Gamma_G (\vec{V}_G - \vec{V}_L) \quad (40)$$

$$c_L \rho_L \frac{D_L \vec{V}_L}{Dt} = c_L \rho_L \vec{F} - \frac{c_L \rho_L}{\rho} \text{grad } p + \frac{c_G \rho_G c_L \rho_L}{\rho} \frac{\mathcal{L}}{T} \text{grad } T - f (\vec{V}_G - \vec{V}_L) + \eta_L [\Delta \vec{V}_L + \frac{1}{3} \text{grad } (\text{div } \vec{V}_L)] - \frac{c_L \rho_L}{\rho} \Gamma_G (\vec{V}_G - \vec{V}_L) \quad (41)$$

2.10. Tentative de fermeture du système d'équations.

Effectuons le bilan des données, des inconnues et des équations.

2.10.1. Données.

Les viscosités η_G et η_L seront supposées constantes. Les masses volumiques ρ_G et ρ_L sont données par les équations d'état $\rho_G = \rho_G(p, T)$ et $\rho_L = \rho_L(p, T)$. Le vecteur \vec{F} est le champ de force dû à la pesanteur. La chaleur latente de vaporisation \mathcal{L} est donnée en fonction de p et de T . La fonctionnelle de frottement f est une fonction inconnue de $(\vec{V}_G - \vec{V}_L)$. Pour le moment cette grandeur sera considérée comme une simple constante ajustable.

2.10.2. Inconnues.

$$c_k, \vec{V}_k, \Gamma_k \quad (k = G \text{ ou } L)$$

$$p, \rho, T$$

Il y a donc 9 inconnues et par conséquent il faut écrire 9 équations indépendantes.

2.10.3. Equations.

- 2 équations de continuité (8) (k = G ou L)
- 1 équation de transfert de masse (9)
- 1 équation déduite de la définition des concentrations volumiques :

$$c_G + c_L = 1$$

- 1 équation de définition de la masse volumique diphasique (11)
- 2 équations de la dynamique (40) et (41)
- 1 équation reliant p et T (courbe de saturation).

Cela ne fait que 8 équations. Il manque l'équation d'énergie diphasique que nous allons transformer pour faire apparaître l'enthalpie et que nous allons simplifier en négligeant le travail de compression pour obtenir l'équation dite de l'enthalpie.

L'enthalpie de la phase k s'écrit :

$$h_k = E_k + \frac{p_k}{c_k \rho_k} \quad (k = G \text{ ou } L)$$

En remplaçant l'énergie interne par sa valeur dans l'équation d'énergie diphasique (20) et en négligeant le travail de compression de chacune des phases $\frac{D_k p_k}{Dt}$ (k = G ou L), il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (c_G \rho_G h_G + c_L \rho_L h_L) + \text{div} (c_G \rho_G h_G \vec{V}_G + c_L \rho_L h_L \vec{V}_L) + \text{div} (\vec{J}_G + \vec{J}_L)$$

$$- \vec{\tau}_G : \text{grad} \vec{V}_G - \vec{\tau}_L : \text{grad} \vec{V}_L + \frac{1}{2} \Gamma_G \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \Gamma_L \vec{V}_L^2 + \vec{\Lambda}_G \cdot \vec{V}_G$$

$$+ \vec{\Lambda}_L \cdot \vec{V}_L = 0$$

Les relations phénoménologiques (29), (30), (31), associées aux équations (22) et (23) donnent les expressions de $(\vec{J}_G + \vec{J}_L)$, $\vec{\tau}_k$ et $\vec{\Lambda}_k$ (k = G ou L) en fonction des inconnues. Le système d'équations est donc fermé mais il reste à déterminer de façon expérimentale les coefficients phénoménologiques r et k.

REFERENCES.

- [1] DE GROOT S.R., MAZUR P.
Non-equilibrium Thermodynamics
North Holland, 1962.
- [2] MEIXNER J., REIK. H.G.
Thermodynamic der irreversiblen Prozesse
Encyclopedia of Physics - Springer Verlag - Vol. 3, n° 2, 1959.
- [3] TRUESDELL, TOUPIN R.
The classical field theory
Encyclopedia of physics - Springer Verlag, vol. 3, n° 1, 1960
- [4] DELHAYE J.M.
Equations fondamentales des écoulements diphasiques.
Première partie : équations générales de conservation
Deuxième partie : compléments et remarques
Rapport C.E.A. R - 3429 (1) et (2)
1968
- [5] PRIGOGINE I., MAZUR P.
Sur deux formulations de l'hydrodynamique et le problème de l'hélium liquide II
Physica XVII, n° 7 - Juillet 1951.

FIN