



MX0500275

XVI Congreso Anual de la SNM y XXIII Reunión Anual de la SMSR
XVI SNM Annual Meeting and XXIII SMSR Annual Meeting
Oaxaca, Oaxaca, México, Julio 10-13, 2005 / Oaxaca, Oaxaca, México, July 10-13, 2005

Solución de la Ecuación de Transporte de Neutrones en Geometría Hexagonal Usando Esquemas Nodales Fuertemente Discontinuos

César Adrián Múgica Rodríguez y Edmundo del Valle Gallegos

Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Nuclear

Av. IPN s/n, Col. Lindavista, 07738, México, D.F., MEXICO

cmugica@ipn.mx; evalle@ipn.mx

Resumen

En 2002, E. del Valle y Ernest H. Mund desarrollaron una técnica para resolver numéricamente las ecuaciones de transporte de neutrones en ordenadas discretas y geometría hexagonal utilizando dos esquemas nodales tipo elemento finito débilmente discontinuos denominados $WD_{5,3}$ y $WD_{12,8}$ (de sus siglas en inglés Weakly Discontinuous). La técnica consiste en representar cada hexágono en la unión de tres rombos cada uno de los cuales es transformado en un cuadrado en el que los métodos $WD_{5,3}$ y $WD_{12,8}$ fueron aplicados. En este trabajo se resuelven las ecuaciones de transporte mencionadas usando la misma técnica de discretización por hexágono pero utilizando dos esquemas nodales tipo elemento finito fuertemente discontinuos denominados SD_3 y SD_8 (de sus siglas en inglés Strongly Discontinuous). Se describe la aplicación en cada caso así como un problema de referencia para los que se proporcionan resultados para el factor de multiplicación efectivo. Se realiza una comparación con los resultados obtenidos por del Valle y Mund para diferentes mallas de discretización tanto angulares como espaciales.

1. INTRODUCCIÓN

La solución numérica de la ecuación de transporte de neutrones (ETN) en ordenadas discretas ha sido obtenida por diferencias finitas, elementos finitos variacionales y elementos finitos no variacionales entre otras muchas más. En nuestro país se han hecho algunas contribuciones en la solución de la ETN usando elementos finitos nodales no variacionales entre los que destacan los trabajos de Filio [1], Delfín[2], del Valle [3], Aveyra [4] y Xolocostli [5]. Con excepción del cuarto de ellos, que resuelve las ETN con dependencia X-t, los otros cuatro trabajos se dedican en parte a la solución de la ETN en geometría bidimensional X-Y. El trabajo de tesis de Filio fue pionero en nuestro país en este tema y proporcionó los elementos básicos y directrices para mejorar los resultados por él obtenidos. Posteriormente Delfín [2] muestra avances al aplicar métodos nodales discontinuos que son renombrados como débilmente y fuertemente discontinuos. Finalmente, Xolocostli [5] desarrolla y aplica los así denominados métodos nodales híbridos tipo elemento finito. Más recientemente del Valle y Mund [6,7] extienden la aplicación de los métodos nodales de elemento finito RTk (Raviart-Thomas de índice k), también conocidos como métodos nodales débilmente discontinuos a la solución de la ETN en geometría hexagonal

utilizando una técnica de descomposición que consiste en dividir cada hexágono en tres rombos los que son convertidos en cuadrados una vez que se emplea una transformación transfinita de Gordon y Hall [8].

Con los antecedentes antes mencionados, este trabajo describe la solución de la ETN en geometría hexagonal usando los métodos nodales fuertemente discontinuos SD_3 y SD_8 . (de sus siglas en inglés Strongly Discontinuous). En la Sección 2 se describe la ecuación de transporte para geometría hexagonal, en la Sección 3 se describe el problema de referencia y finalmente la Sección 4 muestra los resultados obtenidos para éste problema.

2. DESCRIPCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE

Para simplificar la descripción de la aplicación de los esquemas nodales fuertemente discontinuos SD consideraremos como punto de partida la ecuación de transporte de neutrones monoenergéticos en ordenadas discretas [9], en $2D$, en un dominio dado V , que es la unión de ensamblajes hexagonales de combustible nuclear con propiedades homogéneas:

$$\mu_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x} + \nu_k \frac{\partial \psi_k}{\partial y} + \Sigma_i \psi_k = \Sigma_s \sum_{\ell=1}^M w_\ell \psi_\ell + S_k (\equiv Q_k), \quad (x, y) \in V, \quad 1 \leq k \leq M. \quad (1)$$

En esta ecuación, ψ_k representa el flujo angular correspondiente al k -ésimo rayo de la aproximación angular de ordenadas discretas, también conocida como aproximación S_N , con coeficientes angulares μ_k y ν_k , siendo M el número total de rayos. El lado derecho de la Ec. (1), Q_k , incluye las contribuciones debidas a las dispersiones y a las fisiones o a una fuente de neutrones independiente del flujo. Los coeficientes w_ℓ son los pesos de cuadratura asociados a las direcciones angulares (μ_ℓ, ν_ℓ) del método de ordenadas discretas escogido. del Valle y Mund [6,7] adoptaron el conjunto de ordenadas discretas que utiliza el código DIAMANT2 el cual utiliza elementos triangulares para descomponer un hexágono [10].

En este trabajo también se utilizan dichos conjuntos de cuadratura. De esta manera la esfera unitaria correspondiente al ángulo sólido se divide en los seis sextantes $(\Omega_1, \dots, \Omega_6)$ que se muestran en la Figura 1a. El número total de rayos asociados a la aproximación S_N en $2D$ está dado por:

$$M=3N(N+2)/4 \text{ (para geometría XY } M \text{ es } N(N+2)/2).$$

A manera de ejemplo, los puntos sobre la Figura 1a denotan a las 18 ordenadas discretas que corresponden a la aproximación S_4 . La parte derecha (Figura 1b) muestra la distribución de los sextantes en un hexágono en particular.

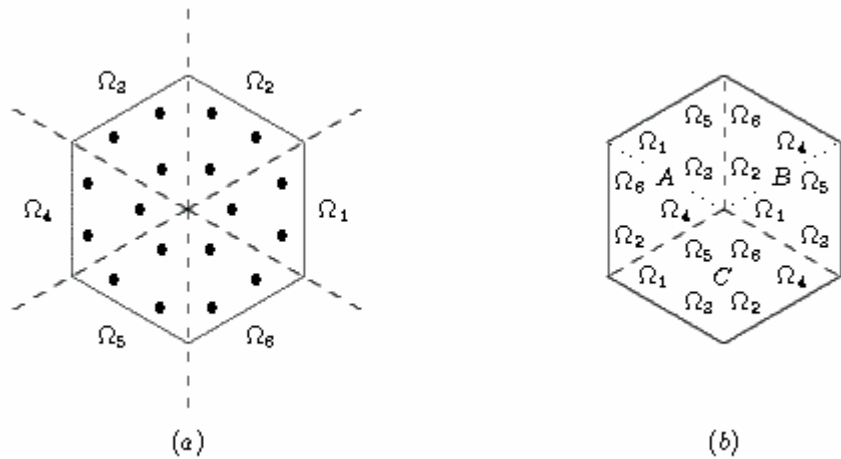


Figura 1: Sectores angulares (código DIAMANT2) y conjunto de ordenadas discretas para la aproximación S_4 (a). Sectores angulares en la partición en rombos de un hexágono genérico (b).

2.1. Descripción de la Partición de un Hexágono

Como ya se mencionó, cada hexágono es dividido en tres rombos, como se muestra en la Figura 2, que son a su vez convertidos en cuadrados mediante transformaciones de Gordon y Hall [8]. Por ejemplo, si se considera el rombo A en su sistema coordenado (x,y) , entonces la transformación de Gordon y Hall, que lo convierte en un cuadrado en el sistema coordenado (ξ,η) , estará dada por:

$$\begin{aligned} x &= a(\xi - 1)/2, \\ y &= b(\eta + (\xi + 1)/2), \end{aligned} \tag{2}$$

donde $a = R\sqrt{3}/2$ y $b = R/2$, siendo R la longitud de cada lado del hexágono.

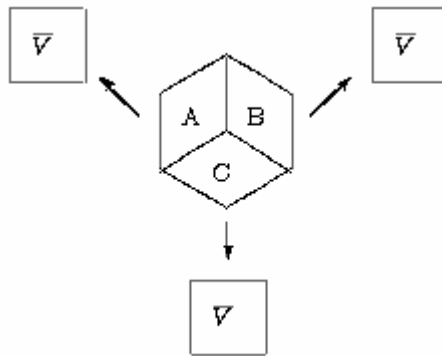


Figura 2. Descomposición de un hexágono en las celdas de referencia $\bar{V} = [-1,+1]^2$.

Una vez que se tiene esta transformación se aplica a la Ec. (1) obteniéndose una ecuación similar dada por:

$$\hat{\mu}_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} + \hat{\nu}_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta} + \hat{\Sigma}_t \psi_k = \hat{Q}_k, \quad (\xi, \eta) \in \bar{V}, \quad k = 1, \dots, M, \quad (3)$$

donde:

$$\hat{\mu}_k = \mu_k, \quad \hat{\nu}_k = \left(\frac{\nu_k \sqrt{3} - \mu_k}{2} \right), \quad (4)$$

y

$$\hat{\Sigma}_t = \frac{\sqrt{3}R}{4} \Sigma_t, \quad \hat{Q}_k = \frac{\sqrt{3}R}{4} Q_k. \quad (5)$$

Expresiones similares se obtienen para los rombos *B* y *C*.

2.2. Descripción de la Estrategia de Solución

Una vez que se obtienen las ecuaciones transformadas (4) y (5) para cada uno de los tres rombos *A*, *B* y *C* entonces se aplican los métodos nodales de elemento finito fuertemente discontinuo *SD₃* y *SD₈* a cada una de las celdas en que se subdivide cada cuadrado, un total de $N_H \times N_V$, donde N_H es el número de particiones en la dirección horizontal y N_V en la dirección vertical. En el método *SD₃* el flujo angular es aproximado mediante una función polinomial que interpola tres parámetros que son sus valores promedio en las caras derecha y superior así como el promedio de celda. En el método *SD₈* son 8 los parámetros que interpola dicha función de aproximación los que corresponden a los momentos de Legendre 0 y 1 de las caras derecha y superior así como los momentos de Legendre (00), (10), (01), y (11) del flujo en la celda. Estos métodos se describen en detalle en Delfín y del Valle [11].

Suponiendo que $\psi(x, y)$ es aproximada por $\psi_h(x, y) \in S$ y los momentos de Legendre de celda de ψ_h están definidos sobre \bar{V} por :

$$\psi_C^{ij} := \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_{ij}(x, y) \psi_h(x, y) dx dy / (N_i \cdot N_j). \quad (6)$$

donde $P_{ij}(x, y) = P_i(x)P_j(y)$, siendo $P_i(x)$ el polinomio de Legendre de grado i el cual tiene las siguientes propiedades:

$$P_i(+1) = 1, \quad P_i(-1) = (-1)^i, \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{+1} P_i(x)P_j(x) dx = N_i \delta_{ij}, \quad \text{con} \quad N_i = 2/(2i+1) \quad (7)$$

Análogamente, los momentos de cara están definidos por

$$\psi_E^i := \int_{-1}^{+1} P_i(s_E) \psi_h(x_E, y_E) ds_E / N_i, \quad (8)$$

donde E denota R , o T , para la cara derecha y la cara superior de la celda, siendo x_E o y_E iguales a 1 dependiendo de la cara particular que se considere, siendo la otra coordenada s_E , la coordenada a lo largo de esa cara.

El espacio polinomial, S_h , donde se construye la función de interpolación se puede definir en términos del los espacio polinomial $\mathbf{Q}_{ij}(x, y) \equiv \{x^a y^b \mid 0 \leq a \leq i, 0 \leq b \leq j\}$, donde a y b son enteros no negativos. Así, los métodos nodales fuertemente discontinuos de índice m , SD_m , donde $m=(k+1)(k+3)$, con k un entero no negativo, se puede definir como sigue:

$$SD_m = \left[D \equiv \{\psi_E^i, \psi_C^{ij}, i, j = 0, \dots, k\}, S_h \equiv \{\mathbf{Q}_{k+1,k}(x, y) + \mathbf{Q}_{k,k+1}(x, y)\} \right] \quad (9)$$

A continuación se muestra el conjunto de ecuaciones para cada esquema (SD_3 y SD_8):

Para SD_3 :

Momento 00:

$$\frac{\mu}{\Delta x} \psi_R^0 + \frac{\nu}{\Delta x} \psi_T^0 + \Sigma_t \psi_c^{00} = \frac{\mu}{\Delta x} \psi_L^0 + \frac{\nu}{\Delta x} \psi_B^0 + Q_c^{00} \quad (10a)$$

Momento 10:

$$\frac{3\mu}{\Delta x} (\psi_R^0 - 2\psi_c^{00}) + \frac{\nu}{\Delta x} (\psi_R^0 - \psi_c^{00}) + \Sigma_t (\psi_R^0 - \psi_c^{00}) = -\frac{3\mu}{\Delta x} \psi_L^0 + \frac{\nu}{\Delta x} \psi_B^1 + Q_c^{10} \quad (10b)$$

Momento 01:

$$\frac{\mu}{\Delta x} (\psi_T^0 - \psi_c^{00}) + \frac{3\nu}{\Delta x} (\psi_T^0 - 2\psi_c^{00}) + \Sigma_t (\psi_T^0 - \psi_c^{00}) = \frac{\mu}{\Delta x} \psi_L^1 - \frac{3\nu}{\Delta x} \psi_B^0 + Q_c^{01} \quad (10c)$$

Para SD_8 :

Momento 00:

$$\frac{\mu}{\Delta x} \psi_R^0 + \frac{\nu}{\Delta x} \psi_T^0 + \Sigma_t \psi_c^{00} = \frac{\mu}{\Delta x} \psi_L^0 + \frac{\nu}{\Delta x} \psi_B^0 + Q_c^{00} \quad (11a)$$

Momento 01:

$$\frac{\mu}{\Delta x} \psi_R^1 + \frac{3\nu}{\Delta x} (\psi_T^0 - 2\psi_c^{00}) + \Sigma_t \psi_c^{01} = \frac{\mu}{\Delta x} \psi_L^1 - \frac{3\nu}{\Delta x} \psi_B^0 + Q_c^{01} \quad (11b)$$

Momento 10:

$$\frac{3\mu}{\Delta x}(\psi_R^0 - 2\psi_c^{00}) + \frac{\nu}{\Delta x}\psi_T^1 + \Sigma_t\psi_c^{10} = -\frac{3\mu}{\Delta x}\psi_L^0 + \frac{\nu}{\Delta x}\psi_B^1 + Q_c^{10} \quad (11c)$$

Momento 20:

$$\begin{aligned} \frac{5\mu}{\Delta x}(\psi_R^0 - 2\psi_c^{10}) + \frac{\nu}{\Delta x}(\psi_R^0 + \psi_R^1 - \psi_c^{11} - \psi_c^{01} - \psi_c^{10} - \psi_c^{00}) + \Sigma_t(\psi_R^0 - \psi_c^{10} - \psi_c^{00}) = \\ \frac{5\mu}{\Delta x}\psi_L^0 + \frac{\nu}{\Delta x}\psi_B^2 + Q_c^{20} \end{aligned} \quad (11d)$$

Momento 11:

$$\frac{3\mu}{\Delta x}(\psi_R^1 - 2\psi_c^{01}) + \frac{3\nu}{\Delta x}(\psi_T^1 - 2\psi_c^{01}) + \Sigma_t\psi_c^{11} = -\frac{3\mu}{\Delta x}\psi_L^1 - \frac{3\nu}{\Delta x}\psi_B^1 + Q_c^{11} \quad (11e)$$

Momento 02:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\Delta x}(\psi_T^0 + \psi_T^1 - \psi_c^{11} - \psi_c^{10} - \psi_c^{01} - \psi_c^{10}) + \frac{5\nu}{\Delta x}(\psi_T^0 - 2\psi_c^{01}) + \Sigma_t(\psi_T^0 - \psi_c^{01} - \psi_c^{00}) = \\ \frac{\mu}{\Delta x}\psi_L^2 + \frac{5\nu}{\Delta x}\psi_B^0 + Q_c^{02} \end{aligned} \quad (11f)$$

Momento 12:

$$\begin{aligned} \frac{3\mu}{\Delta x}(\psi_T^1 - \psi_T^0 - \psi_c^{11} + \psi_c^{01} - \psi_c^{10} + \psi_c^{00}) + \frac{5\nu}{\Delta x}(\psi_T^1 - 2\psi_c^{11}) + \Sigma_t(\psi_T^1 - \psi_c^{11} - \psi_c^{10}) = \\ -\frac{3\mu}{\Delta x}\psi_L^2 + \frac{5\nu}{\Delta x}\psi_B^1 + Q_c^{12} \end{aligned} \quad (11g)$$

Momento 21:

$$\begin{aligned} \frac{5\mu}{\Delta x}(\psi_R^1 - 2\psi_c^{11}) + \frac{3\nu}{\Delta x}(\psi_R^1 - \psi_R^0 - \psi_c^{11} + \psi_c^{10} - \psi_c^{01} + \psi_c^{00}) + \Sigma_t(\psi_R^1 - \psi_c^{11} - \psi_c^{01}) = \\ \frac{5\mu}{\Delta x}\psi_L^1 - \frac{3\nu}{\Delta x}\psi_B^2 + Q_c^{21} \end{aligned} \quad (11h)$$

La Figura 3 muestra el espacio polinomial y los parámetros de interpolación (3 y 8 respectivamente) para cada uno de estos dos esquemas (los fuertemente discontinuos SD_3 y SD_8), utilizados en el presente trabajo para resolver la ecuación de transporte en geometría hexagonal.

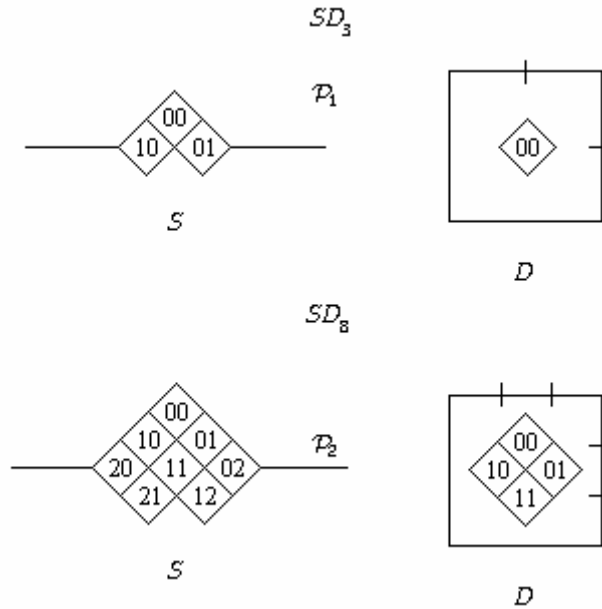


Figura 3. Espacio polinomial y parámetros de interpolación para los esquemas SD_3 y SD_8 .

3. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE REFERENCIA

La Figura 4 muestra la configuración para 1/12 de núcleo para el problema de referencia [12] utilizado en el presente trabajo, este problema se compone de 5 regiones y no son consideradas en su solución las condiciones de simetría existentes. El cálculo se realiza con 4 grupos de energía.

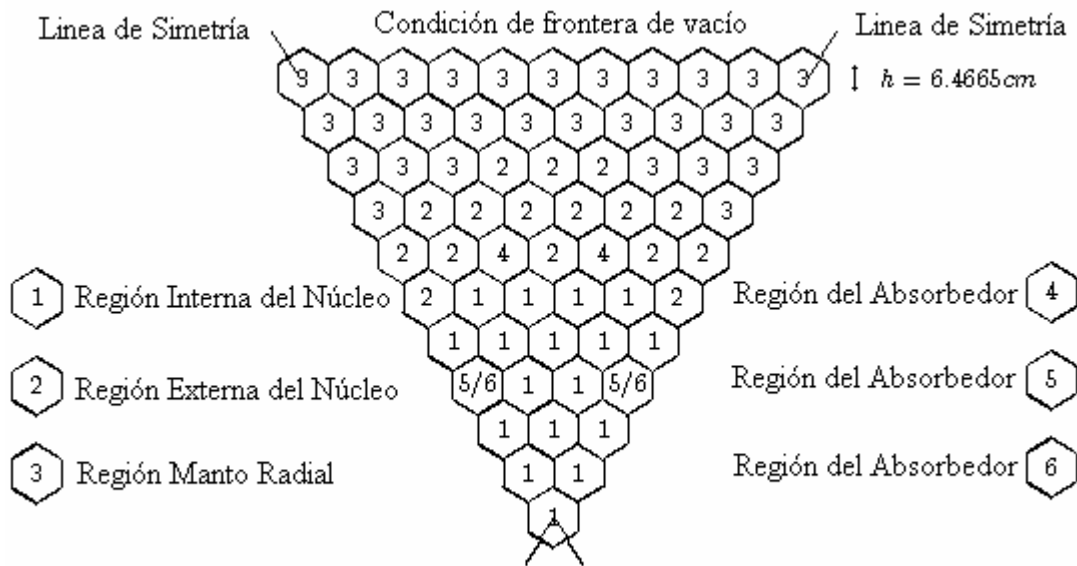


Figura 4: Problema Benchmark Modificado 2D-SNR (1/12 de núcleo)

4. RESULTADOS

Los resultados obtenidos para el problema de referencia se muestran en esta sección, la Tabla I muestra las comparaciones para los valores de la k_{eff} entre los esquemas nodales débilmente discontinuos obtenidos por E. del Valle y E. Mund [7] y los obtenidos en el presente trabajo para los esquemas nodales fuertemente discontinuos para el problema de referencia 2D-SNR.

Tabla I: Comparación entre los valores de k_{eff} para el problema benchmark 2D-SNR modificado, para barras de control parcialmente insertadas (CRI) utilizando los esquemas nodales fuertemente discontinuos SD_3 y SD_8 para varias aproximaciones S_N .

2D-SNR-CRI (WD)					
<i>RT0</i>					DIAMANT2
Malla	S_2	S_4	S_6	S_8	S_8
1×1	1.1327058	1.1343344	1.1344893	1.1344070	1.13460
2×2	1.1331834	1.1348424	1.1348735	1.1348609	1.13518
4×4	1.1332958	1.1349174	---	---	1.13536
<i>RTI</i>					DIAMANT2
Malla	S_2	S_4	S_6	S_8	S_8
1×1	1.1331975	1.1346717	1.1348807	1.1348554	1.13460
2×2	1.1333988	1.1349037	1.1350677	---	1.13518
4×4	1.1334049	---	---	---	1.13536
2D-SNR-CRI (SD)					
<i>SD₃</i>					DIAMANT2
Malla	S_2	S_4	S_6	S_8	S_8
1×1	1.1322894	1.1340330	1.1341912	1.1342412	1.13460
2×2	1.1332072	1.1348543	1.1349741	1.1350064	1.13518
4×4	1.1333959	1.1349957	---	---	1.13536
<i>SD₈</i>					DIAMANT2
Malla	S_2	S_4	S_6	S_8	S_8
1×1	1.1332957	1.1349005	1.1350088	1.1350360	1.13460
2×2	1.1334184	1.1349982	1.1350987	---	1.13518
4×4	1.1334379	---	---	---	1.13536

CONCLUSIONES

Se observó que los resultados para la k_{eff} obtenidos para los esquemas fuertemente discontinuos se acercan bastante a los obtenidos para los esquemas *RT0* y *RTI* (débilmente discontinuos) obtenidos por E. del Valle y E. Mund [6]. El código utilizado en ambos casos resuelve de manera completa el núcleo del reactor, lo cual requiere de largos tiempo de cómputo; como un trabajo futuro y parte de una tesis de maestría se prevé utilizar las condiciones de simetría para el reactor y las condiciones de frontera de flujo re-entrante, con esto será posible reducir de manera

considerable el tiempo de cómputo y obtener resultados más precisos al considerar los neutrones que regresan al sistema.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Instituto Politécnico Nacional el apoyo recibido a través del proyecto de investigación 20050154 registrado en la Coordinación General de Posgrado e Investigación (CGPI) para la realización del presente estudio.

REFERENCIAS

1. C. Filio López, “*Solución Numérica de la Ecuación de Transporte de Neutrones en Geometría XY*”, Tesis de Maestría, ESFM-IPN (1993), México D.F.
2. A. Delfín Loya, “*Solución Numérica de la Ecuación de Transporte de Neutrones Usando Métodos Nodales Discontinuos en Geometría XY*”, Tesis de Maestría, ESFM-IPN (1996), México D.F.
3. E. del Valle, “*Métodos Nodales en Difusión y Transporte de Partículas*”, Tesis Doctoral, ESFM-IPN (1998), México D.F.
4. Gustavo Aveleyra M., “*Solución Numérica de las Ecuaciones de Transporte de Neutrones Dependientes del Tiempo en Geometría Placa Usando los Esquemas Nodales SD_3 y SD_8* ”, Tesis de Maestría, ESFM-IPN (2002), México D.F.
5. José V. Xolocostli M., “*Solución de la Ecuación de Transporte en Estado Estacionario, en 1 y 2 Dimensiones para Ensamblados Tipo BWR Usando Métodos Nodales*”, Tesis de Maestría, ESFM-IPN (2003), México D.F.
6. E. del Valle and E. Mund, “*RTk/SN Solutions of the 2D Multigroup Transport Equations in Hexagonal Geometry*”, Proceedings Physor 2002, Seoul Korea.
7. E. del Valle and E. Mund, “*RTk/SN Solutions of the Two Dimensional Multigroup Transport Equations in Hexagonal Geometry*”, Nuclear Science and Engineering, 148, 172-185, (2004).
8. Jean P. Hennart, E. Mund and E. del Valle, “*A Composite Nodal Finite Element for Hexagon*”, Nuclear Science and Engineering, 127, 139, (1997).
9. James J. Duderstadt, “*Nuclear Reactor Analysis*”, John Wiley & Sons (1976).
10. K. Kufner and J. Burkhard, “*An Updated Fortran 77 Version of the 2D Static Neutron Transport Code DIAMANT2 for Regular Triangular Geometry*”, KfK-4133, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1987).
11. A. Delfín, E. del Valle y Jean P. Hennart, “*Discontinuous Nodal Finite Element Schemes for the Discretized-Ordinates Neutron Transport Equation in XY Geometry*”, Third Mexico-United States WorkShop on Numerical Particle Transport, UNAM, May 24 and 25, 1995.
12. *Benchmark Problem Book*, ANL-7416, Supply 3, p. 861, Argonne National Laboratory (1985).