

---

## **Método de Wielandt Aplicado a las Ecuaciones de Difusión Discretizadas por Métodos Nodales de Elemento Finito**

---

**Adrián Múgica Rodríguez, Edmundo del Valle Gallegos**  
*Instituto Politécnico Nacional*  
*Escuela Superior de Física y Matemáticas*  
*Unidad Profesional "Adolfo López Mateos"*  
*Col. Lindavista 07738, México D. F.*  
[mugica@esfm.ipn.mx](mailto:mugica@esfm.ipn.mx), [edmundo@esfm.ipn.mx](mailto:edmundo@esfm.ipn.mx)

### **Resumen**

Hoy en día los métodos numéricos de solución a la ecuación de difusión mediante algoritmos y programas de cómputo resultan un tanto extensos debido al gran número de rutinas y cálculos que deben realizar, esto repercute directamente en los tiempos de ejecución de dichos programas, obteniéndose resultados en tiempos relativamente largos. Este trabajo muestra la aplicación de un método de aceleración de la convergencia del método clásico de las potencias que reduce notablemente el número de iteraciones necesarias para obtener resultados fiables, lo que significa que los tiempos de cómputo se ven reducidos en gran medida. Este método es conocido en la literatura como método de Wielandt y se ha incorporado a un programa de cómputo que está basado en la discretización de las ecuaciones de difusión de neutrones en geometría placa y estado estacionario por métodos nodales polinomiales. En este trabajo se describen las ecuaciones de difusión de neutrones para varios grupos de energía y su discretización mediante los así llamados métodos nodales físicos, ilustrándose en lo particular el caso cuadrático. Se describe un problema modelo descrito ampliamente en la literatura el cual se resuelve para los esquemas nodales físicos de grado 1, 2, 3 y 4 de tres formas distintas: a) con el método clásico de las potencias, b) método de las potencias con la aceleración de Wielandt y c) método de las potencias con la aceleración modificada de Wielandt. Se reportan los resultados para el problema modelo así como para dos problemas adicionales conocidos como problemas benchmark. Tal método de aceleración puede ser también implementado a problemas de geometría distinta a la propuesta en el presente trabajo, además de ser posible extender su aplicación a problemas en 2 ó 3 dimensiones.

### **1. INTRODUCCIÓN**

El objetivo de este trabajo es aplicar un método eficiente que implementado al problema de la solución numérica de la ecuación de difusión, acelere de manera importante la obtención de la  $k_{eff}$  (factor de multiplicación efectiva), obteniéndose resultados precisos en tiempos relativamente cortos y con un número de iteraciones pequeño comparado con el número obtenido utilizando el tradicional método de las potencias para la

solución de este tipo de sistemas matriciales en problemas de valores y vectores propios.

Para lograr lo anterior se desarrolló el programa de cómputo **N1DMW (Nodal 1 Dimensión con el Método de Wielandt)** el cual realiza la solución del sistema mediante la discretización del problema vía métodos nodales físicos polinomiales [1] y utiliza varios métodos para obtener el valor propio del sistema ( $k_{eff}$ ). Este programa de cómputo puede resolver el problema de tres formas distintas: por el método tradicional de las potencias, por el método de las potencias con aceleración de Wielandt y por el método de las potencias con aceleración modificada de Wielandt. La utilización de estos métodos de aceleración nos conducen a realizar pruebas cambiando ciertos parámetros del problema a resolver, tales como el grado del polinomio interpolante y el tamaño de la malla (número de puntos de la discretización). Los resultados obtenidos se comparan entre sí para el número de iteraciones que realiza cada método y para el valor propio obtenido, concluyéndose en las ventajas y desventajas que presentan cada uno de ellos.

## 2. ECUACIÓN DE DIFUSIÓN

Al realizar el análisis en un reactor de la difusión de neutrones, se encuentra que para obtener resultados que representen fielmente el estado o comportamiento neutrónico de éste, habría que resolver varias ecuaciones diferenciales (una por cada grupo de energía), lo que llevaría un tiempo considerable si el número total de grupos de energía es alto. Es por lo tanto más factible desarrollar programas de cómputo que resuelvan dichas ecuaciones en forma numérica. Así, para resolver este tipo de problemas, primero se discretiza el dominio de la solución tomando en cuenta un número finito de puntos para realizar los cálculos necesarios, obteniéndose siempre buenas aproximaciones a la solución real.

El sistema de ecuaciones a resolver es [2]:

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \mathbf{f}_g + (\Sigma_{Rg} + D_g B^2) \mathbf{f}_g = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg' \rightarrow g} \mathbf{f}_{g'} + \frac{1}{\mathbf{I}} \mathbf{c}_g \sum_{g'=1}^G \mathbf{n}_{fg'} \mathbf{f}_{g'}, \quad g = 1, \dots, G \quad (1)$$

Donde:

$\mathbf{f}_g$  es el flujo neutrónico para el grupo de energía  $g$ ,

$D_g$  es el coeficiente de difusión para el grupo de energía  $g$ ,

$\Sigma_{Rg}$  es la sección eficaz de remoción del grupo  $g$ ,

$B^2$  es el buckling geométrico del sistema,

$\Sigma_{sg' \rightarrow g}$  es la sección eficaz de dispersión del grupo  $g'$  al grupo  $g$ ,

$\chi_g$  es la probabilidad de que un neutrón de fisión nazca con la energía del grupo  $g$ ,

$\mathbf{I}$  es el valor propio del sistema de interés,

$\mathbf{n}$  es el número promedio de neutrones producidos por fisión

$\Sigma_{fg'}$  es la sección eficaz de fisión para el grupo de energía  $g'$ ,

$G$  es el número total de grupos de energía.

El flujo de neutrones en (1) debe cumplir con condiciones de frontera dadas, siendo las más comunes la condición de frontera de flujo cero o de Dirichlet, la condición de corriente cero, también conocida como condición de simetría o de Neumann y la condición de frontera extrapolada o de Robin [3].

Respecto del valor propio  $\lambda$  se sabe que en realidad es un espectro que depende de las características del medio, tanto geométricas como físicas, así como de las condiciones de frontera. La  $\lambda$  más grande corresponde al factor de multiplicación efectivo del sistema nuclear que se esté considerando.

Para el modelo de 1 grupo de energía se tendría entonces, por reducción de (1), la siguiente ecuación

$$-\nabla \cdot D \nabla \mathbf{f} + (\Sigma_R + DB^2) \mathbf{f} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{K} \mathbf{f} \quad (2)$$

### 3. DISCRETIZACIÓN ESPACIAL DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN

#### 3.1 Esquema Nodal Físico Cuadrático (Caso Monoenergético)

Para este esquema, se realiza una aproximación del flujo neutrónico  $\mathbf{f}$  mediante una función  $\mathbf{f}_h$  que localmente, en cada intervalo de la discretización espacial, es un polinomio interpolante de grado 2 (en este trabajo se considerarán polinomios de grado  $n$  con  $1 < n < 4$ ), que interpola los parámetros dados por  $\{\mathbf{f}_l, \mathbf{f}_r, \mathbf{f}_c^0\}$ , donde:  $\mathbf{f}_l$  y  $\mathbf{f}_r$  son los flujos a la izquierda y derecha de cada intervalo o celda y  $\mathbf{f}_c^0$  es el momento cero de Legendre del flujo sobre la celda.

Entonces, si se consideran las funciones base:  $\{u_l, u_r, u_c^0\}$  que generan localmente a  $\mathbf{f}_h$  como una combinación lineal de los parámetros de flujo correspondientes, entonces:

$$\mathbf{f}_h = \mathbf{f}_l u_l(x) + \mathbf{f}_r u_r(x) + \mathbf{f}_c^0 u_c^0(x) \quad (3)$$

donde las funciones base están dadas por:

$$u_l(x) = \frac{1}{2} [P_1(x) - P_2(x)]$$

$$u_r(x) = \frac{1}{2} [P_1(x) + P_2(x)]$$

$$u_c^0(x) = P_0(x) - P_2(x)$$

con  $P_k$  como los polinomios de Legendre de grado  $k$ . Entonces, siguiendo el método tradicional de elementos finitos, particularmente la técnica de Galerkin [3], se obtiene el siguiente problema de valor propio

$$(K + M_a)\mathbf{f} = \frac{1}{k}M_f\mathbf{f} \quad (4)$$

donde  $K$  es conocida como la matriz de rigidez y  $M_a$  y  $M_f$  como matrices de masa, con sus elementos locales dados de la forma:

$$\begin{aligned} K_e &= \frac{2D_e}{\Delta x}(k_{ij}) \\ M_{ae} &= \frac{\Delta x \sum_{ae}}{2}(m_{ij}) \\ M_{fe} &= \frac{\Delta x \mathbf{n} \sum_{fe}}{2}(m_{ij}) \end{aligned} \quad i,j=1,2,3$$

con

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_{-1}^1 \frac{du_i}{dx} \frac{du_j}{dx} dx \\ m_{ij} &= \int_{-1}^1 u_i(x) u_j(x) dx \end{aligned}$$

Entonces, para el caso cuadrático, las matrices  $K_e$ ,  $M_{ae}$  y  $M_{fe}$  toman la forma:

$$\begin{aligned} K_e &= \frac{2D_e}{\Delta x} \begin{bmatrix} +2 & -3 & +1 \\ -3 & +6 & -3 \\ +1 & -3 & +2 \end{bmatrix} \\ M_{ae} &= \frac{\Delta x \sum_{ae}}{30} \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -3 & +36 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \\ M_{fe} &= \frac{\Delta x \mathbf{n} \sum_{fe}}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -3 & +36 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde  $\Delta x$  es el tamaño de cada intervalo o celda y el subíndice  $e$  en el coeficiente de difusión y secciones eficaces hace referencia a la celda. Estas matrices elementales se valoraron al integrar exactamente las expresiones arriba indicadas y se utilizan para generar las matrices globales del sistema matricial (problema del valor propio) dado por la ecuación (4). Si se tienen en total  $N_p$  parámetros de interpolación entonces el sistema será de orden  $N_p$ .

### 3.2 Esquema Nodal Físico Cuadrático (Caso Multigrupos)

En el caso de varios grupos de energía, al aplicarle el procedimiento antes mencionado al sistema de ecuaciones (1) se obtendría un problema de valor propio de la forma

$$A\mathbf{f} = \frac{1}{\mathbf{I}} B\mathbf{f} \quad (5)$$

donde  $A$  y  $B$  son matrices de orden  $N$  con  $N = N_p G$ .

Se tendría entonces que:

$$\mathbf{I}\mathbf{f} = A^{-1}B\mathbf{f} = T\mathbf{f}$$

es decir que los valores y vectores propios corresponden a la matriz  $T = A^{-1}B$ . En la siguiente sección se describe el método de las potencias el cual, mediante un proceso iterativo, permite obtener el valor propio dominante (el factor de multiplicación efectivo) y su correspondiente vector propio (el flujo crítico de neutrones).

## 4. MÉTODO DE LAS POTENCIAS

El método de las potencias consiste en llevar a cabo el siguiente proceso iterativo

$$\mathbf{y}^{(n)} = A^{-1} B \mathbf{f}^{(n-1)},$$

$$\mathbf{f}^{(n)} = \frac{1}{\mathbf{I}^{(n)}} \mathbf{y}^{(n)}$$

$$\mathbf{I}^{(n)} = \frac{\int \mathbf{n} \Sigma_f^T \mathbf{f}^{(n)} dV}{\int \mathbf{n} \Sigma_f^T \mathbf{f}^{(n-1)} dV}$$

para  $n=1,2,\dots$ , hasta satisfacer algún criterio de convergencia, con

$$\mathbf{n} \Sigma_f = (\mathbf{n} \Sigma_{f1}, \dots, \mathbf{n} \Sigma_{fG})^T$$

donde  $\mathbf{f}^{(0)}$  es un flujo inicial de prueba y  $\mathbf{I}^{(n)}$  es una constante de normalización que conforme va avanzando el proceso iterativo se va acercando más y más al valor propio de mayor magnitud.

También a este proceso iterativo se le conoce como iteración de fuente de fisión y consiste en aplicar potencias sucesivas del operador  $A^{-1}B$  a algún flujo inicial  $\mathbf{f}^{(0)}$  normalizando el vector obtenido en cada etapa.

Kirkhoff y Varga han mostrado que la matriz  $T$  tiene un vector propio único  $\mathbf{y}_1$  el cual tiene todas sus entradas no negativas y al que le corresponde un valor propio real positivo más grande en módulo que los restantes.

Si se desarrolla  $\mathbf{f}^{(0)}$  como una serie de potencias de vectores propios se tiene

$$\mathbf{f}^{(0)} = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{f}_i$$

aplicando el proceso iterativo  $n$  veces, se tendrá lo siguiente;

$$\mathbf{f}^{(n)} = \frac{1}{\mathbf{I}^{(1)} \mathbf{I}^{(2)} \dots \mathbf{I}^{(n)}} T^n \mathbf{f}^{(0)}$$

Si se toma la norma para ambos miembros, la componente de  $\mathbf{f}^{(0)}$  a lo largo de  $\mathbf{f}^{(i)}$  es multiplicada por  $|\mathbf{I}_i / \mathbf{I}_1|^n$ , que es menor que 1 excepto para  $i=1$ . Por lo tanto  $\mathbf{f}^{(n)}$  es proporcional al modo fundamental  $\mathbf{y}_1$  después de un número suficientemente grande de iteraciones;

$$\mathbf{f}^{(n)} \approx \frac{\mathbf{I}_1^n}{\mathbf{I}^{(1)} \mathbf{I}^{(2)} \dots \mathbf{I}^{(n)}} a_1 \mathbf{y}_1$$

Además, de la ecuación ( ) puede verse que

$$\mathbf{I}^{(n+1)} = \frac{1}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{k_{eff}}$$

La eficiencia del método de las potencias puede ser evaluada mediante la “razón de dominancia”  $d$

$$d = \max \left| \frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{I}_1} \right|$$

donde las  $\mathbf{I}_i$  son los valores propios de  $A^{-1}B$ , siendo  $\mathbf{I}_1$  la  $k_{eff}$ .

La iteración de fuente de fisión es comúnmente llamada “iteración externa”, esta terminología es debida a la necesidad de efectuar otra iteración llamada “iteración interna” o “iteración de flujo” para calcular el vector  $\mathbf{y}^{(n)}$  en cada iteración.

La iteración externa consiste en resolver un problema de varios grupos con una fuente calculada en la iteración previa; el número de iteraciones externas dependerá de la precisión con que se desee obtenerlo y de la razón de dominancia.

Existen en la literatura otros métodos numéricos para la solución del problema del valor propio (5), entre ellos pueden mencionarse el método de Gerschgorin (gráfico), el método de Newton y el método inverso de las potencias.

## 5. MÉTODO DE WIELANDT

A continuación se describen dos variantes del método de Wielandt [5] para obtener de manera rápida el valor propio dominante del problema definido por la ecuación (5).

### 5.1 Iteración Simple de Wielandt

Cuando se resuelve iterativamente el problema de valor propio, es de bastante utilidad encontrar algoritmos que aceleren la convergencia y provean de resultados confiables y precisos con un bajo número de iteraciones y en poco tiempo. El método de aceleración de Wielandt es un algoritmo de fácil implementación, además de ser confiable y manejable en la aplicación de métodos de solución para este tipo de problemas. Veamos ahora su utilidad y aplicación en el problema del valor propio para la ecuación de difusión.

Debido a que el valor del factor de multiplicación  $k_{eff}$  en un reactor, está alrededor de 1, es válido proponer una aproximación inicial  $\lambda_e$  de esta cantidad, donde:

$$\lambda_e \geq \lambda_1$$

Así, restando en ambos lados de la ecuación  $\frac{1}{I_e} B \mathbf{f}$  se tendrá entonces:

$$\left( A - \frac{1}{I_e} B \right) \mathbf{f} = \frac{1}{\Pi} B \mathbf{f} \quad (6)$$

donde

$$\frac{1}{\Pi} = \frac{1}{I} - \frac{1}{I_e} \quad (7)$$

Si se renombra al término  $\left( A - \frac{1}{I_e} B \right)$  como la matriz  $C$  se tendrá entonces:

$$C\mathbf{f} = \frac{1}{\Pi} B\mathbf{f}$$

que no es otra cosa que la forma elemental del problema de valor propio discreto dado por la ecuación (5) y así, se puede resolver dicho problema por el método de las potencias. De esta forma, al obtener la solución del valor propio  $\frac{1}{\Pi}$  de la ecuación (6), se encontrará, mediante la relación (7), el valor propio  $\frac{1}{I}$  de la ecuación (5).

La razón de dominancia para la iteración de Wielandt está definida como:

$$\bar{s}_w = \max_{i \neq 1} \frac{|\Pi_i|}{|\Pi_1|} = f\bar{s}_p$$

donde

$$f = \max_{i \neq 1} \frac{|I_e - I_1|}{|I_e - I_i|} \quad \text{con} \quad I_e \gg I_1 > I_2 > \dots > I_N$$

## 5.2 Iteración Modificada de Wielandt

Es posible aún conseguir una convergencia más rápida, escogiendo un nuevo valor de  $\lambda_e$ , denominado  $\lambda_e'$  de tal forma que:

$$\lambda_1 < \lambda_e' < \lambda_e$$

Así, entonces se puede proceder tal y como se hizo en la Sección 5.1 de la siguiente manera. Partiendo del problema de valor propio

$$A\mathbf{f} = \frac{1}{I_e'} B\mathbf{f}$$

restando a ambos lados el término  $\frac{1}{I_e'} B\mathbf{f}$ , se tiene:

$$\left( A - \frac{1}{I_e'} B \right) \mathbf{f} = \frac{1}{\Pi} B\mathbf{f}$$

donde ahora el problema puede ser considerado iterando internamente sobre el valor propio  $\Pi$  tomando como una nueva aproximación el nuevo valor encontrado  $\lambda_e'$  y realizando nuevamente el cálculo, de tal forma que en general:



$$\left( A - \frac{1}{\mathbf{I}_e^{(m-1)}} B \right) \mathbf{f} = \frac{1}{\mathbf{I}_e^{(m)}} B \mathbf{f} \quad (8)$$

Recordando que la primera aproximación es  $\frac{1}{\mathbf{I}_e^{(0)}} = \frac{1}{\mathbf{I}_e^{(0)}} - \frac{1}{\mathbf{I}_e}$  donde  $\mathbf{I}_e$  es utilizada una vez al principio del cálculo, ya que en la siguiente iteración este valor se actualiza por el nuevo valor  $\hat{\lambda}_e$  encontrado. De manera que, en general, la relación (7) toma la forma:

$$\frac{1}{\mathbf{I}_e^{(m)}} = \frac{1}{\mathbf{I}_e^{(m)}} - \frac{1}{\mathbf{I}_e^{(m-1)}} \quad (9)$$

y entonces se procede a resolver la ecuación (8), análoga a (6) del caso simple, y haciendo uso de la nueva definición (9). De esta forma la convergencia se acelera aún más, ya que se actualiza con el nuevo valor encontrado en cada iteración, esto es; cambia hacia un valor aún más preciso de  $\mathbf{I}$  a partir de la aproximación inicial  $\mathbf{I}_e$ .

Definiendo el error como:

$$\mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{I}_e^{(m-1)}}{\mathbf{I}_e^{(m)}}$$

el proceso puede continuar hasta que se satisfaga un criterio de convergencia previamente estipulado.

## 6. RESULTADOS NUMÉRICOS

### 6.1 Solución del Problema Modelo

El problema consiste en una placa formada por 10 regiones diferentes cuyas propiedades se especifican en la Tabla I. El problema fue tomado de la Ref. [4]. El problema modelo se enfoca a la solución de la ecuación de difusión para geometría plana en una dimensión, variando la  $\mathbf{I}_e$ , la malla en cada región ( $Int/Reg.$ ), el método de solución: Método de las Potencias (A), Método de Wielandt (B), y Método de Wielandt Modificado (C), y el grado del polinomio interpolante en la solución ( $P_1, P_2, P_3, P_4$ ) para los cuales se obtienen el factor de multiplicación efectivo ( $k_{eff}$ ) y el número de iteraciones externas ( $N_{out}$ ). El número de grupos de energía para este problema es de 2. La Tabla II muestra los resultados obtenidos para este problema usando el programa de cómputo N1DMW desarrollado para este trabajo. Se puede observar que la reducción en el número de iteraciones externas es impresionante, particularmente con el método de Wielandt modificado.

**Tabla I. Valores para dos grupos de energía, 10 regiones y geometría plana unidimensional**

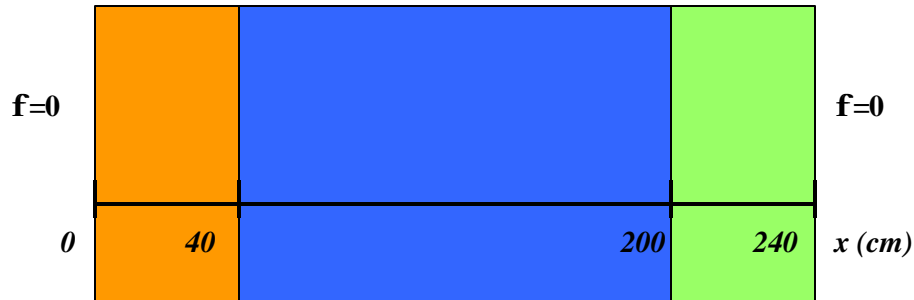
Región	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dato										
D	1	1.5580	1.8859	1.8758	1.8346	1.7753	1.6870	1.5601	1.4525	1.4152
	2	0.2392	0.5205	0.5053	0.4858	0.4611	0.4255	0.3789	0.3381	0.3279
$\Sigma_s (10^{-4})$	1	497.7	89.0944	89.8493	96.8049	107.742	125.588	154.955	184.103	195.887
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\Sigma_a (10^{-4})$	1	4.687	71.7746	75.3696	77.1192	78.4814	80.1515	82.0311	83.1166	80.9642
	2	104.1	587.174	623.687	628.667	625.666	619.6	611.025	607.131	616.842
$\nu \Sigma_f (10^{-4})$	1	0.0	45.0381	43.7017	43.1388	42.7987	42.3311	41.8064	41.8016	44.7386
	2	0.0	888.843	915.332	909.121	893.477	868.543	833.837	812.825	858.271
Tamaño del intervalo [cm]	4.0	26.126	52.251	52.251	52.251	52.251	52.251	52.251	26.126	15.0
Bukcling	$1.95605 \times 10^{-4}$									

**Tabla II. Resultados numéricos para varios métodos nodales físicos**

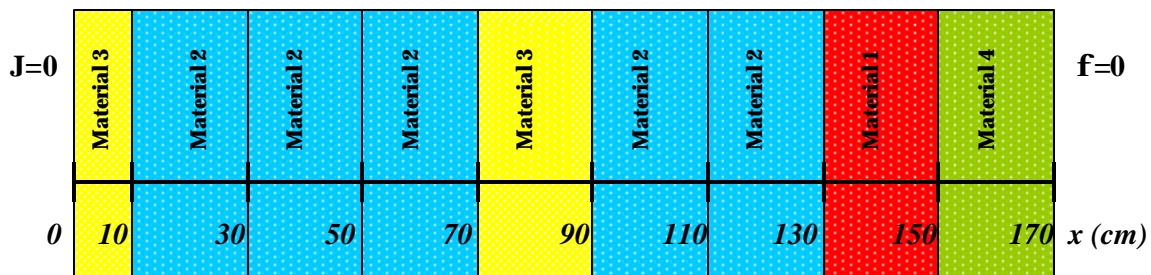
$\lambda_e$	Int/Reg.	Método	$k_{eff}$				$N_{out}$			
			$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
1.00	8	A	1.0499262, 1.0497326, 1.0497838, 1.0497859				232, 232, 232, 232			
		B	1.0012915, 1.0009477, 1.0010771, 1.001078				7, 7, 7, 7			
		C	1.0499690, 1.0497753, 1.0498266, 1.0498287				15, 15, 15, 15			
1.10	8	A	1.0499262, 1.0497326, 1.0497838, 1.0497859				232, 232, 232, 232			
		B	1.0499690, 1.0497753, 1.0498259, 1.0498287				28, 28, 55, 28			
		C	1.0499690, 1.0497753, 1.0498266, 1.0498287				13, 13, 14, 13			
1.15	8	A	1.0499262, 1.0497326, 1.0497838, 1.0497859				232, 232, 232, 232			
		B	1.0499687, 1.0497750, 1.0498263, 1.0498284				43, 43, 43, 43			
		C	1.0499690, 1.0497753, 1.0498266, 1.0498287				14, 14, 14, 14			
	4	A	1.0502250, 1.0496316, 1.0497668, 1.0497846				232, 232, 232, 232			
		B	1.0502677, 1.0496735, 1.0498093, 1.0498271				43, 43, 43, 43			
		C	1.0502680, 1.0496738, 1.0498096, 1.0498274				14, 14, 14, 14			
2	A	1.0507925, 1.0494931, 1.0496785, 1.0497691				233, 230, 232, 232				
	B	1.0508354, 1.0495355, 1.0497210, 1.0498116				43, 43, 43, 43				
	C	1.0508356, 1.0495358, 1.0497213, 1.0498119				14, 14, 14, 14				
1.20	1	A	1.0510205, 1.0497064, 1.0494890, 1.0496743				235, 227, 232, 232			
		B	1.0510650, 1.0497467, 1.0495311, 1.0497168				44, 42, 43, 43			
		C	1.0510653, 1.0497469, 1.0495314, 1.0497171				14, 13, 14, 14			
8	A	1.0499262, 1.0497326, 1.0497838, 1.0497859				232, 232, 232, 232				
	B	1.0499684, 1.0497747, 1.0498265, 1.0498281				55, 55, 28, 55				
	C	1.0499690, 1.0497753, 1.0498266, 1.0498287				14, 14, 13, 14				

## 6.2 Problemas Benchmark

Como aplicación de N1DMW se resolvieron un par de problemas benchmark reportados en la literatura. Uno de ellos es la parte estática del benchmark 6.A1 del ANL-7416 mientras que el segundo es la versión unidimensional del benchmark del IAEA. En la Figura 1 se describe la distribución de materiales y condiciones de frontera para el primero de ellos mientras que en la Figura 2 se describe el segundo problema.



**Figura 1. Problema benchmark 1: 3 materiales, 3 regiones y 2 grupos de energía**



**Figura 2. Problema benchmark 2: 4 materiales, 9 regiones y 2 grupos de energía**

Ambos problemas son de dos grupos de energía y representan un cierto grado de dificultad. El primero de estos problemas benchmark es un arreglo simétrico ya que las regiones a ambos extremos tienen el mismo material y condición de frontera. El segundo problema presenta condición de frontera de corriente cero en la cara izquierda y de flujo cero en la derecha. Los datos de los materiales correspondientes al primer problema se muestran en la Tabla III y para el segundo en la Tabla IV.

**Tabla III. Valores de entrada para el problema benchmark 1**

Valor	Grupo	Región		
		I	II	III
$D$	1	1.5	1.0	1.5
	2	0.5	0.5	0.5
$S_R$	1	0.026	0.02	0.026
	2	0.18	0.08	0.18
$S_f$	1	0.01	0.005	0.01
	2	0.2	0.099	0.2
$c$	1	1.0	1.0	1.0
	2	0.0	0.0	0.0
$S_s$	1	0.0, 0.015	0.0, 0.01	0.0, 0.015
	2	0.0, 0.0	0.0, 0.0	0.0, 0.0

**Tabla IV. Valores de entrada para el problema benchmark 2**

Valor	Grupo	Región								
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$D$	1	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	2.0
	2	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.3
$S_R$	1	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04
	2	0.13	0.085	0.085	0.085	0.13	0.085	0.085	0.08	0.01
$S_f$	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.135	0.135	0.135	0.135	0.135	0.135	0.135	0.135	0.0
$c$	1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$S_s$	1	0, 0.02	0, 0.02	0, 0.02	0, 0.02	0, 0.02	0, 0.02	0, 0.02	0, 0.02	0, 0.04
	2	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0

Los resultados obtenidos para estos problemas, con el método clásico de las potencias y Wielandt modificado y el esquema nodal físico cúbico se muestran en la Tabla V. En ella se puede observar nuevamente que el método de Wielandt modificado reduce considerablemente el número de iteraciones externas cuando se le compara con el que tiene que realizar el método tradicional de las potencias.

**Tabla V. Resultados obtenidos para los problemas benchmark 1 y 2**

Problema	Método	$k_{eff}$	$N_{out}$
Benchmark 1	A	0.90159926	133
	C	0.90160061	14
Benchmark 2	A	1.0045017	350
	C	1.0045117	19

## 7. CONCLUSIONES

Se observó que el número de iteraciones se reduce considerablemente al implementar el método de Wielandt a los problemas de solución de la ecuación de difusión, comparado con el número de iteraciones realizadas utilizando el método clásico de las potencias. El valor de la  $k_{eff}$  para cada caso, es muy próximo y su variación es de orden muy pequeño.

Resolviendo por el método de Wielandt para cualquier grado del polinomio interpolante con una aproximación inicial de 1.00, se observa que el valor de la  $k_{eff}$  obtenido se aleja de su valor esperado esto se debe a que para el problema modelo la  $I_e$  es menor que la  $k_{eff}$  que se espera. Sin embargo, si se utiliza la versión modificada de Wielandt, se obtiene que, para esa misma aproximación, el valor obtenido retoma su cercanía al valor real de  $k_{eff}$ , es decir sufre una corrección a partir de la segunda iteración donde  $I_e$  deja de ser 1.00.

En términos generales, el método utilizado es eficiente y provee de resultados fiables. En cuanto al tiempo de cómputo se puede decir que al menos para los problemas benchmark resueltos el ahorro va del 90% al 95% pero este ahorro dependerá de las características del problema ya que este ahorro es mayor cuando la razón de dominancia se acerca a la unidad. Como una aplicación más extensa de la implementación de dicho método, queda aún para algún trabajo futuro, su inclusión a problemas de 2 o 3 dimensiones y la determinación de los flujos adjuntos con los cuales se pueden hacer estimaciones de cambios en reactividad usando teoría lineal de perturbación [5].

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) el apoyo para desarrollar este trabajo bajo el Proyecto de Investigación 33806-U.

## REFERENCIAS

1. A. Múgica Rodríguez, Aplicación del Método de Wielandt a las Ecuaciones de Difusión en Multigrupos, Tesis de Licenciatura, ESFM-IPN. En preparación.
2. J.J. Duderstadt and L.J. Hamilton, *Nuclear Reactor Analysis*, John Wiley & Sons, New York 1(976).
3. G. Strang and G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1973).
4. G. E. Fladmak et al., *Numerical methods for the solution of the diffusion equation*, Scandpower A/S (1987).
5. A. M. Gómez et al., Cálculos de reactividad analíticos y numéricos en geometría plana, utilizando teoría de perturbación lineal: Un estudio comparativo, *Memorias del XIII congreso anual de la SNM/XX Reunión anual SMSR*, Ixtapa Zihuatanejo, 2002.