

---

## **Métodos Nodales Híbridos en la Solución de las Ecuaciones de Difusión en Geometría XY**

---

**Natividad Hernández M.,**  
Comisión Federal de Electricidad  
Gerencia de Centrales Nucleoeléctricas  
Carretera Cardel–Nautla Km. 43.5, C. P. 91680, Veracruz  
[nhmiranda@mexico.com](mailto:nhmiranda@mexico.com),

**Gustavo Alonso V.<sup>1</sup>, Edmundo del Valle G.**  
Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Física y Matemáticas  
Unidad Profesional “Adolfo López Mateos”  
Col. Lindavista 07738, México D. F.  
[galonso@nuclear.inin.mx](mailto:galonso@nuclear.inin.mx), [edmundo@esfm.ipn.mx](mailto:edmundo@esfm.ipn.mx)

### **Resumen**

En 1979, Hennart y colaboradores aplicaron varios esquemas de elemento finito clásicos en la solución numérica de las ecuaciones de difusión en geometría XY y estado estacionario. Casi dos décadas después, en 1996, él y otros colaboradores realizaron un trabajo similar pero usando esquemas nodales tipo elemento finito. Continuando en esta última dirección, en este trabajo se describe un conjunto de varios esquemas denominados Nodales Híbridos (NH) así como su aplicación para resolver las ecuaciones de difusión en multigrupos en estado estacionario y geometría XY. El término nodales híbridos significa que dichos esquemas interpolan no solamente momentos de Legendre de cara y de celda sino también los valores del flujo escalar de neutrones en las cuatro esquinas de cada celda o elemento de la discretización espacial del dominio de interés. Todos los esquemas aquí considerados son polinomiales como lo fueron sus antecesores. Particularmente, se han desarrollado y aplicado ocho diferentes esquemas nodales híbridos que están muy cercanamente relacionados con los desarrollados por Hennart y colaboradores en el pasado. Se trata de esquemas en los que no obstante que se reduce el número de parámetros de interpolación se conserva la precisión en relación a los esquemas bi-cuadrático y bi-cúbico. De estos ocho, tres fueron descritos y aplicados en un trabajo anterior. Se trata del esquema clásico bi-lineal así como los esquemas nodales híbridos , bi-cuadrático y bi-cúbico por lo que aquí sólo se describen los otros 5 esquemas nodales híbridos aunque se proporcionan resultados numéricos para varios problemas de prueba con todos ellos.

---

<sup>1</sup> También en el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares.

## 1. INTRODUCCIÓN

En 1979 Hennart [1] y colaboradores aplicaron varios esquemas de elemento finito clásicos en la solución numérica de las ecuaciones de difusión en geometría XY y estado estacionario. Casi dos décadas después, en 1996, él y otros colaboradores [2] realizaron un trabajo similar pero usando esquemas nodales tipo elemento finito. Los métodos nodales tipo elemento finito consisten en métodos donde la variable dependiente, de aquí en adelante el flujo escalar de neutrones, es aproximada mediante una interpolación de ésta en momentos de Legendre de cara y de celda. No obstante, en este trabajo se presentan nuevos esquemas nodales que además de interpolar los momentos de Legendre de cara y de celda del flujo de neutrones interpolan también valores del flujo en las esquinas de una celda dada. A estos últimos les hemos designado como esquemas Nodales Híbridos (NH). En este trabajo se han desarrollado esquemas nodales híbridos polinomiales para resolver numéricamente las ecuaciones de difusión en multigrupos en geometría XY. Dada una discretización espacial del dominio de solución de las ecuaciones de difusión, estos esquemas interpolan, como ya se mencionó, el flujo escalar de neutrones en cada una de las celdas o elementos de la discretización. Los parámetros que se emplean para construir tal aproximación son los primeros  $(k+1)$  momentos de Legendre del flujo escalar de neutrones en cada cara,  $m$  momentos de Legendre del flujo de neutrones en la celda (momentos  $00, 10, 01, \text{etc.}$ ) y los 4 valores que tiene el flujo de neutrones en las cuatro esquinas de una celda dada. Esto conduce a  $4(k+2)+m$  parámetros de interpolación por celda siendo  $k$  y  $m$  enteros no negativos. Si  $m=(k+1)^2$  surge un caso particular que conduce a los esquemas nodales híbridos bi-cuadrático ( $k=0$ ), bi-cúbico ( $k=1$ ), etc. Si  $m=0$  entonces se tienen esquemas nodales híbridos a la Serendipity. Finalmente, también se consideran los casos con  $0 < m < (k+1)^2$  para  $k=0,1$ .

Introduciendo un par de espacios polinomiales que son útiles para entender la precisión de estos esquemas nodales híbridos. El primero de ellos es el espacio polinomial  $Q_{kl}$  definido por

$$Q_{kl} = \{x^\alpha y^\beta, 0 \leq \alpha \leq k, 0 \leq \beta \leq \ell\} \quad (1)$$

Si  $k=\ell$ , entonces se simplifica a

$$Q_k \equiv Q_{kk} \quad (2)$$

El segundo espacio polinomial es el espacio  $P_k$  y está dado por

$$P_k = \{x^\alpha y^\beta, 0 \leq \alpha + \beta \leq k\} \quad (3)$$

Con estas dos definiciones es fácil darse cuenta que los espacios polinomiales asociados a los esquemas nodales híbridos están dados por

$$\begin{aligned}
S_h &= Q_{k+2}, \quad m = (k+1)^2 \\
S_h &= Q_{k+1,k+2} + Q_{k+2,k+1}, \quad m = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Si  $k=1$  se tienen los siguientes tres casos

$$\begin{aligned}
S_h &= Q_{3,1} + Q_{1,3} + x^2 y^2, \quad m = 1 \\
S_h &= Q_{3,1} + Q_{1,3} + x^2 y^2 + x^3 y^3, \quad m = 2 \\
S_h &= Q_{3,1} + Q_{1,3} + x^2 y^2 + x^3 y^2 + x^2 y^3, \quad m = 3
\end{aligned} \tag{5}$$

Basados en las definiciones anteriores, se tiene que el espacio polinomial está incluido lo que hace que tenga una precisión  $O(h^{k+3})$  desde el punto de vista de interpolación. Por otro lado, se preservan  $k+3$  parámetros en cada una de las cuatro caras de cada celda de la discretización. Suponiendo válido el Teorema 1 de la Ref. [3], éste señala que el error en la norma  $L^2$  de los esquemas nodales es  $O(h^{\lambda+1})$  donde  $\lambda = \min(\ell, p, n+1)$ , siendo  $\ell$  el entero positivo más grande de tal modo que  $P_\ell \subset S_h$ ,  $p$  es el número de momentos de Legendre que se conservan entre caras de celdas adyacentes, y  $n$  es un índice que está relacionado con la precisión de la cuadratura numérica empleada para evaluar las integrales que definen a los elementos de las matrices de masa y rigidez, exacta para el espacio polinomial  $Q_{2n+1}$  entonces el error en la norma  $L^2$  de estos esquemas nodales híbridos sin introducir reglas de cuadratura es  $O(h^{k+3})$ , al menos para  $k=0,1$ .

Esto lleva a una aproximación que permite obtener la representación del flujo dentro de cada celda en una forma consistente. La técnica empleada para discretizar las ecuaciones de difusión fue la tradicional, es decir se usó la formulación de Galerkin. El problema de valor propio final se resuelve utilizando el método de las potencias para obtener el factor de multiplicación efectivo y el correspondiente flujo crítico de neutrones. Se describen tres problemas benchmark tomados de la literatura y se proporciona una comparación entre los resultados obtenidos con distintas técnicas.

## 2. DISCRETIZACIÓN ESPACIAL EN EL CASO MONOENERGÉTICO

La ecuación de difusión para un grupo de energía está dada por [4]:

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi + \Sigma \phi = S, \forall (x, y) \in \Omega \tag{6}$$

la cual se discretizará espacialmente usando el método tradicional de elementos finitos.

Para proceder a describir los esquemas Nodales Híbridos (NH) y su correspondiente aplicación en la solución numérica de las ecuaciones de difusión en multigrupos y

estado estacionario, primero, al igual que otros esquemas nodales para geometría  $XY$  [5,6], se discretiza el dominio de interés  $\Omega$  en “nodos”, “celdas o “elementos” que son del tipo rectangular, como se muestra en la Figura 1.

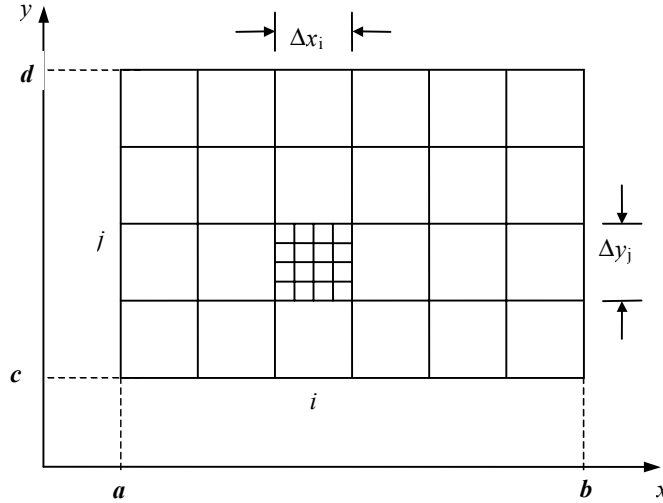


Figura 1. Discretización del dominio de interés  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ .

Antes de continuar introduciremos las siguientes definiciones de momentos de Legendre de cara y de celda dadas por:

$$m_L^i(u) = \frac{1}{N_i} \int_{-1}^{+1} P_i(y) u(-1, y) dy \quad (7)$$

$$m_R^i(u) = \frac{1}{N_i} \int_{-1}^{+1} P_i(y) u(+1, y) dy \quad (8)$$

$$m_T^i(u) = \frac{1}{N_i} \int_{-1}^{+1} P_i(x) u(x, +1) dx \quad (9)$$

$$m_B^i(u) = \frac{1}{N_i} \int_{-1}^{+1} P_i(x) u(x, -1) dx \quad (10)$$

$$m_C^{ij}(u) = \frac{1}{N_i N_j} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_{ij}(x, y) u(x, y) dx dy \quad (11)$$

donde:

$$P_{ij}(x, y) = P_i(x) P_j(y) \quad (12)$$

Los subíndices  $L$ ,  $R$ ,  $B$  y  $T$  se refieren a las caras izquierda, derecha, inferior y superior, respectivamente, el subíndice  $C$  se refiere a la celda. Los superíndices  $i$  y  $j$  son

enteros no negativos y  $P_i$  representa el polinomio de Legendre de grado  $i$  normalizado sobre  $[-1, 1]$  siendo  $N_i$  el factor de normalización de éstos el cual está dado por:

$$N_i = \frac{2}{2i + 1}$$

La formulación débil del problema de difusión [5,6], ecuación (6), consiste en encontrar  $\phi \in V$  tal que

$$a(\phi, \psi) = f(\psi), \forall \psi \in V \quad (13)$$

donde :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (D \nabla u \cdot \nabla v + \Sigma uv) dx dy \quad (14)$$

$$f(v) = \int_{\Omega} S(x) v dx dy \quad (15)$$

siendo  $V$  el espacio de funciones de Sobolev, el cual está formado por funciones que son cuadrado integrables hasta su primera derivada en  $\Omega$ , y que satisfacen las condiciones de frontera esenciales (es decir, flujo cero en las fronteras). En la aproximación estándar de elemento finito, se selecciona apropiadamente un subespacio de dimensión finita  $V_h \in V$ , de tal manera que la discretización del problema consiste en encontrar  $\phi_h \in V_h$ , tal que:

$$a(\phi_h, \psi_h) = f(\psi_h), \forall \psi_h \in V_h \quad (16)$$

donde  $\phi_h$  es una aproximación de  $\phi$  dada por:

$$\phi_h(x, y) = \sum_{i=1}^N \phi_i u_i(x, y) \quad (17)$$

en la que las  $u_i(x, y)$  son conocidas como las funciones base del espacio  $V_h$  de dimensión  $N$ .

De esta manera el problema se puede expresar como:

$$A \phi = F \quad (18)$$

donde

$$A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, N \quad (19)$$

$$\phi = [\phi_1, \dots, \phi_N]^T \quad (20)$$

$$F = [f_1, \dots, f_N]^T \quad (21)$$

con

$$a_{ij} = a(u_i, u_j) \text{ y } f_i = f_i(u_i) \quad (22)$$

## 2.1 Aproximación del Flujo Escalar Mediante Esquemas Nodales Híbridos [5,6]

Como ya se mencionó, el flujo de neutrones  $\phi$  se aproxima localmente por una función  $\phi_h$  en cada una de las celdas espaciales en que se subdivide el dominio. En general  $\phi_h$  es una función que se encuentra en el espacio polinomial  $S_h$  descritos en la Sección 1. Esta interpolante  $\phi_h$ , interpola el conjunto de parámetros  $D$  dado por:

$$D = \{ \phi_{p_i}, i = 1, \dots, 4, \phi_L^l, \phi_R^l, \phi_B^l, \phi_T^l, l = 0, \dots, k; \phi_C^n, n = 00, 10, 01, \dots \} \quad (23)$$

donde  $\phi_{p_1}, \phi_{p_2}, \phi_{p_3}, \phi_{p_4}$  representan a los flujos escalares en las 4 esquinas de la celda de referencia,  $\phi_L^l, \phi_R^l, \phi_B^l, \phi_T^l$  corresponden al momento  $l$ -ésimo de Legendre del flujo  $\phi$ , para  $l=0, \dots, k$ , sobre las caras izquierda (**L**eft), derecha (**R**ight), inferior (**B**ottom) y superior (**T**op) y  $\phi_C^n$  es el momento  $n$  de Legendre del flujo  $\phi$ , en la celda, con un total de  $m$  momentos sobre la celda. Esto da un total de  $4(k+2)+m$  parámetros de interpolación para un espacio polinomial  $S_h$  de igual dimensión.

Por otro lado, si  $u_{p_1}, u_{p_2}, u_{p_3}, u_{p_4}, u_L^l, u_R^l, u_B^l, u_T^l$ , y  $u_C^n$  son las funciones base correspondientes a cada uno de los parámetros de interpolación antes mencionados entonces la aproximación de  $\phi$  será aproximada por:

$$\phi_h(x, y) = \sum_{i=1}^4 \phi_{p_i} u_{p_i}(x, y) + \sum_{l=0}^k \sum_E \phi_E^l u_E^l(x, y) + \sum_n \phi_C^n u_C^n(x, y) \quad (24)$$

donde la suma sobre  $E$  se da para  $E=L, R, B$  y  $T$ , las caras de la celda, y la suma sobre  $n$ , un índice doble, se da sobre el número total  $m$  de momentos de Legendre de celda (00, 10, 01, etc.). El caso extremo se tendría cuando no hubiera momentos de Legendre de celda es decir cuando  $n=0$ .

Siguiendo el método de elementos finitos de Galerkin, usando la aproximación (24) para discretizar la ecuación (6) se obtiene el siguiente sistema algebraico:

$$K \phi + M \phi = S \quad (25)$$

donde  $K$  y  $M$  son conocidas como las matrices de rigidez y de masa, cuyos elementos locales están dados en general por:

$$K_{xe} = \frac{2 \Delta y D_e}{\Delta x} (k_{xij}), i, j = 1, \dots, n \quad (26a)$$

$$K_{ye} = \frac{2 \Delta x D_e}{\Delta y} (k_{yij}), i, j = 1, \dots, n \quad (26b)$$

$$K_e = K_{xe} + K_{ye} \quad (26c)$$

$$M_e = \frac{\Delta x \Delta y \Sigma_e}{4} (m_{ij}), i, j = 1, \dots, n \quad (27)$$

y

$$S_e = \frac{\Delta x \Delta y}{4} \{S_i\}, \phi_e = \{\phi_i\}, i = 1, \dots, n \quad (28)$$

donde:

$$k_{xij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx dy \quad (29a)$$

$$k_{yij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial u_j}{\partial y} dx dy \quad (29b)$$

y

$$m_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} u_i(x, y) u_j(x, y) dx dy \quad (30)$$

$$S_i = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} S(x, y) u_i(x, y) dx dy \quad (31)$$

$n$  representa aquí el número total de parámetros de interpolación por celda, es decir  $4(k+2)+m$ .

A continuación se describen cada uno de los 5 nuevos esquemas nodales híbridos desarrollados en este trabajo. Para facilitar su descripción se ha introducido la notación  $NH(k,m)$  para identificar a cada esquema nodal híbrido.

### 3. DESARROLLO DE 5 NUEVOS ESQUEMAS NODALES HÍBRIDOS [5,6]

#### 3.1 Esquema Nodal Híbrido Cuadrático à la Serendipity $NH(0,0)$

Los esquemas nodales híbridos que son del tipo Serendipity no tienen parámetros de interpolación en el interior de las celdas. Es decir, la interpolación polinomial considera sólo los parámetros de interpolación correspondientes al valor del flujo en las 4

esquinas y los momentos de Legendre en las caras. Ya que el esquema Bi-Lineal no tiene parámetros de interpolación dentro de cada celda uno podría pensar que se trata del más sencillo del tipo Serendipity pero no se tomará como tal ya que tampoco sobre las caras tiene otros parámetros de interpolación que no sean solamente los asociados a los puntos esquina. De esta manera el más sencillo de los esquemas nodales híbridos del tipo Serendipity es el cuadrático, el cual tiene, con excepción del momento de Legendre 00, todos los parámetros de interpolación del esquema nodal híbrido Bi-Cuadrático, aquí designado esquema NH(0,1), introducido en la Ref. [5]. Así, las funciones base correspondientes a este esquema están dadas por

$$u_{p1} = \frac{1}{4}(-P_{00} + P_{20} + P_{02} + P_{11} - P_{21} - P_{12})$$

$$u_B^0 = \frac{1}{2}(P_{00} - P_{01} - P_{20} + P_{21})$$

$$u_{p2} = \frac{1}{4}(-P_{00} + P_{20} + P_{02} - P_{11} - P_{21} + P_{12})$$

$$u_L^0 = \frac{1}{2}(P_{00} - P_{10} - P_{02} + P_{12})$$

$$u_R^0 = \frac{1}{2}(P_{00} + P_{10} - P_{02} - P_{12})$$

$$u_{p3} = \frac{1}{4}(-P_{00} + P_{20} + P_{02} - P_{11} + P_{21} - P_{12})$$

$$u_T^0 = \frac{1}{2}(P_{00} + P_{01} - P_{20} - P_{21})$$

$$u_{p4} = \frac{1}{4}(-P_{00} + P_{20} + P_{02} + P_{11} + P_{21} + P_{12})$$

Este esquema tiene un conjunto  $D$  de 8 parámetros de interpolación y un espacio polinomial  $S_h$  asociado a éste tal y como se muestran en la Figura 2.

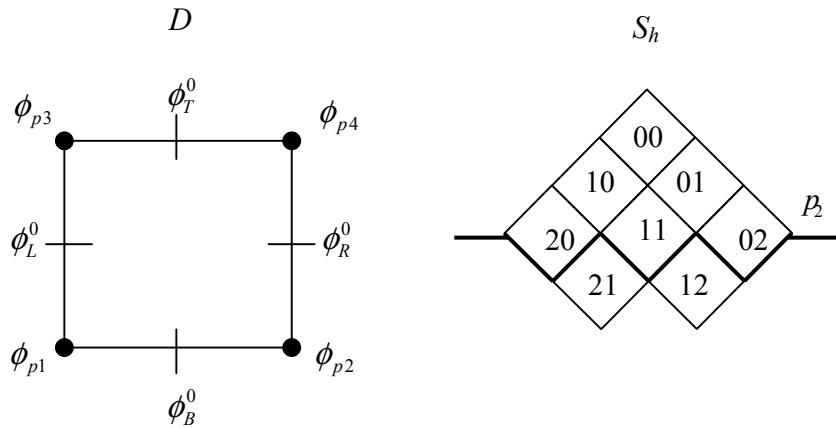


Figura 2. Conjunto  $D$  y espacio  $S_h$  para el Esquema Nodal Híbrido Cuadrático à la Serendipity NH(0,0).



### 3.2 Esquema Nodal Híbrido Cúbico à la Serendipity NH(1,0)

Este esquema nodal es similar al esquema nodal híbrido Bi-Cúbico, o NH(1,4), sin considerar los parámetros de interpolación correspondientes a los momentos 00, 10, 01, y 11 de Legendre en la celda. Esto reduce a sólo 12 los parámetros de interpolación. De esta manera las correspondientes funciones base están dadas por

$$u_{p1} = \frac{1}{4}(-P_{00} + P_{10} + P_{20} + P_{02} - P_{11} - P_{30} - P_{03} - P_{21} - P_{12} + P_{31} + P_{13})$$

$$u_B^0 = \frac{1}{2}(P_{00} - P_{01} - P_{20} + P_{21})$$

$$u_B^1 = \frac{1}{2}(P_{10} - P_{11} - P_{30} + P_{31})$$

$$u_{p2} = \frac{1}{4}(-P_{00} - P_{10} + P_{01} + P_{20} + P_{02} + P_{11} + P_{30} - P_{03} - P_{21} + P_{12} - P_{31} - P_{13})$$

$$u_L^0 = \frac{1}{2}(P_{00} + P_{10} - P_{02} - P_{12})$$

$$u_R^0 = \frac{1}{2}(P_{00} + P_{10} - P_{02} - P_{12})$$

$$u_L^1 = \frac{1}{2}(P_{01} - P_{11} - P_{03} + P_{13})$$

$$u_R^1 = \frac{1}{2}(P_{01} + P_{11} - P_{03} - P_{13})$$

$$u_{p3} = \frac{1}{4}(-P_{00} + P_{10} - P_{01} + P_{20} + P_{02} + P_{11} - P_{30} + P_{03} + P_{21} - P_{12} - P_{31} - P_{13})$$

$$u_T^0 = \frac{1}{2}(P_{00} + P_{01} - P_{20} - P_{21})$$

$$u_T^1 = \frac{1}{2}(P_{10} + P_{11} - P_{30} - P_{31})$$

$$u_{p4} = \frac{1}{4}(-P_{00} - P_{10} - P_{01} + P_{20} + P_{02} - P_{11} + P_{30} + P_{03} + P_{21} + P_{12} + P_{31} + P_{13})$$

En la Figura 3 se ilustra al conjunto  $D$  de parámetros de interpolación y al espacio polinomial  $S_h$ .

El esquema nodal híbrido Bi-Cúbico también se puede reducir considerando sólo uno, dos y tres momentos de celda los cuales corresponden a los momentos de celda (00),

(10) y (01). La idea detrás de estas reducciones es mostrar que mientras que el espacio polinomial  $P_3$  esté contenido en el espacio polinomial  $S_h$  todas estas versiones tendrán el mismo orden de precisión  $O(h^4)$ . La situación extrema la cumple el esquema NH(1,0), nodal híbrido cúbico à la Serendipity, que no obstante no tener parámetros de interpolación de celda también tiene la misma precisión que los ya mencionados. A continuación se describen estas tres versiones reducidas del esquema nodal híbrido Bi-Cúbico o simplemente esquema NH(1,4) .

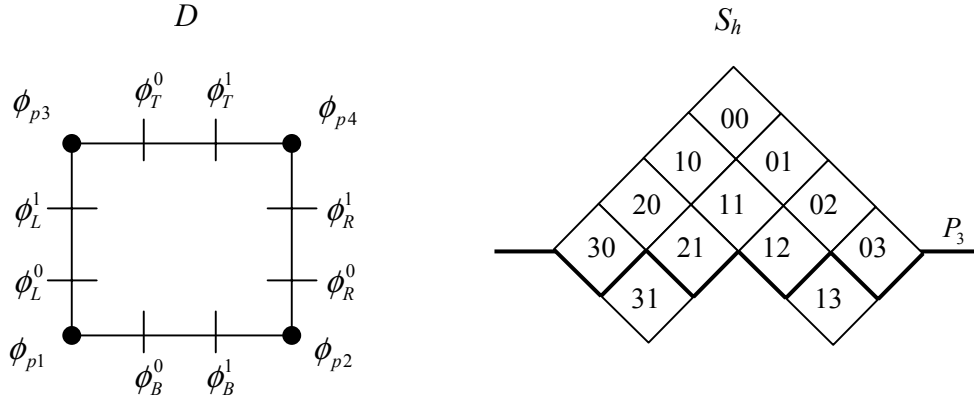


Figura 3. Conjunto  $D$  y espacio  $S_h$  para el Esquema Nodal Híbrido Cúbico à la Serendipity NH(1,0).

### 3.3 Esquema NH(1,1)

Este esquema, considera como único parámetro de interpolación dentro de la celda al momento 00. Así, el esquema consta de 13 parámetros de interpolación y sus funciones base están dadas como sigue

$$u_{p1} = \frac{1}{4}(P_{10} + P_{01} - P_{11} - P_{30} - P_{03} - P_{21} - P_{12} + P_{22} + P_{31} + P_{13})$$

$$u_B^0 = \frac{1}{2}(-P_{01} + P_{02} + P_{21} - P_{22})$$

$$u_B^1 = \frac{1}{2}(P_{10} - P_{11} - P_{30} + P_{31})$$

$$u_{p2} = \frac{1}{4}(-P_{10} + P_{01} + P_{11} + P_{30} - P_{03} - P_{21} + P_{12} + P_{22} - P_{31} - P_{13})$$

$$u_L^0 = \frac{1}{2}(-P_{10} + P_{20} + P_{12} - P_{22})$$

$$u_C^{00} = P_{00} - P_{20} - P_{02} + P_{22}$$

$$u_L^1 = \frac{1}{2}(P_{01} - P_{11} - P_{03} + P_{13})$$

$$u_R^0 = \frac{1}{2}(P_{10} + P_{20} - P_{12} - P_{22})$$

$$u_R^1 = \frac{1}{2}(P_{01} + P_{11} - P_{03} - P_{13})$$

$$u_{p3} = \frac{1}{4}(P_{10} - P_{01} + P_{11} - P_{30} + P_{03} + P_{21} - P_{12} + P_{22} - P_{31} - P_{13})$$

$$u_T^0 = \frac{1}{2}(P_{01} + P_{02} - P_{21} - P_{22})$$

$$u_T^1 = \frac{1}{2}(P_{10} + P_{11} - P_{30} - P_{31})$$

$$u_{p4} = \frac{1}{4}(-P_{10} - P_{01} - P_{11} + P_{30} + P_{03} + P_{21} + P_{12} + P_{22} + P_{31} + P_{13})$$

La Figura 4 ilustra al conjunto  $D$  de parámetros de interpolación y al espacio polinomial  $S_h$ .

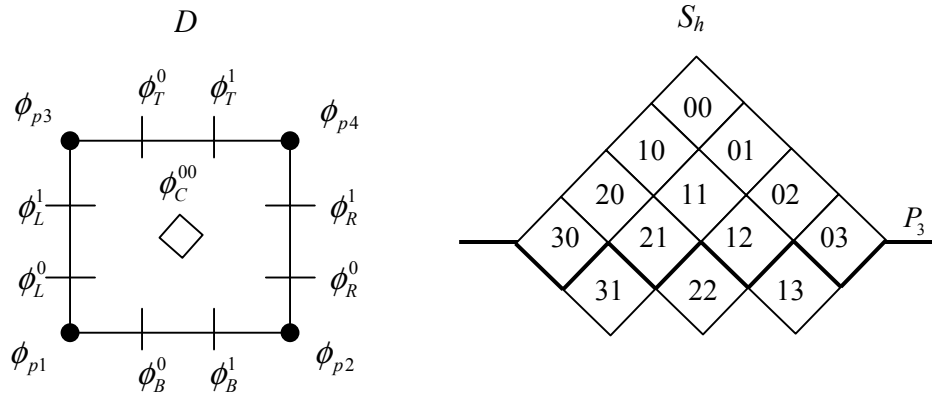


Figura 4. Conjunto  $D$  y espacio  $S_h$  para el Esquema NH(1,1).

### 3.4 Esquema NH(1,2)

A diferencia del esquema inmediato anterior, éste considera un momento de celda más que es el momento (11) teniendo un total de 14 parámetros de interpolación. Sus funciones base están dadas por las siguientes

$$u_{p1} = \frac{1}{4}(P_{10} + P_{01} - P_{30} - P_{03} - P_{21} - P_{12} + P_{22} + P_{33})$$

$$u_B^0 = \frac{1}{2}(-P_{01} + P_{02} + P_{21} - P_{22})$$

$$u_B^1 = \frac{1}{2}(P_{10} - P_{30} - P_{13} + P_{33})$$

$$u_{p2} = \frac{1}{4}(-P_{10} + P_{01} + P_{30} - P_{03} - P_{21} + P_{12} + P_{22} - P_{33})$$

$$u_L^0 = \frac{1}{2}(-P_{10} + P_{20} + P_{12} - P_{22})$$

$$u_C^{00} = P_{00} - P_{20} - P_{02} + P_{22}$$

$$u_R^0 = \frac{1}{2}(P_{10} + P_{20} - P_{12} - P_{22})$$

$$u_L^1 = \frac{1}{2}(P_{01} - P_{03} - P_{31} + P_{33})$$

$$u_C^{11} = P_{11} - P_{31} - P_{13} + P_{33}$$

$$u_R^1 = \frac{1}{2}(P_{01} - P_{03} + P_{31} - P_{33})$$

$$u_{p3} = \frac{1}{4}(P_{10} - P_{01} - P_{30} + P_{03} + P_{21} - P_{12} + P_{22} - P_{33})$$

$$u_T^0 = \frac{1}{2}(P_{01} + P_{02} - P_{21} - P_{22})$$

$$u_T^1 = \frac{1}{2}(P_{10} - P_{30} + P_{13} - P_{33})$$

$$u_{p4} = \frac{1}{4}(-P_{10} - P_{01} + P_{30} + P_{03} + P_{21} + P_{12} + P_{22} + P_{33})$$

La Figura 5 ilustra al conjunto  $D$  de parámetros de interpolación y al espacio polinomial  $S_h$ .

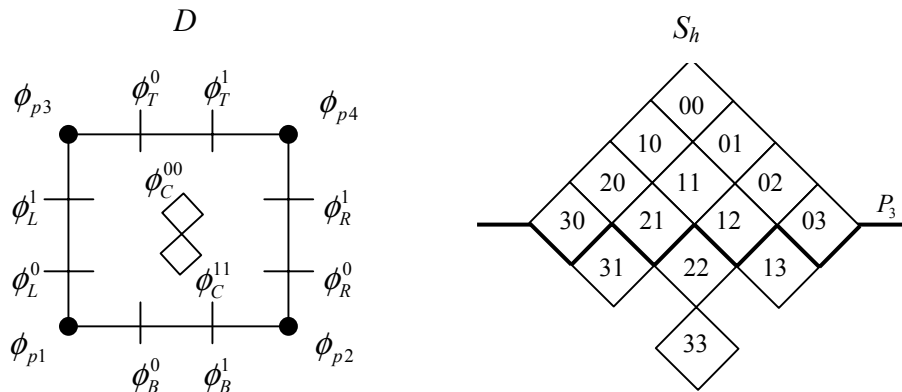


Figura 5. Conjunto  $D$  y espacio  $S_h$  para el Esquema NH(1,2).

### 3.5 Esquema NH(1,3)

Finalmente, este esquema considera a los momentos de celda (00), (10) y (01) con un total de 15 parámetros de interpolación. Sus funciones base están dadas por las siguientes

$$u_{p1} = \frac{1}{4}(-P_{11} + P_{22} + P_{31} + P_{13} - P_{32} - P_{23})$$

$$u_B^0 = \frac{1}{2}(P_{02} - P_{03} - P_{22} + P_{23})$$

$$u_B^1 = \frac{1}{2}(-P_{11} + P_{12} + P_{31} - P_{32})$$

$$u_{p2} = \frac{1}{4}(P_{11} + P_{22} - P_{31} - P_{13} + P_{32} - P_{23})$$

$$u_L^0 = \frac{1}{2}(P_{20} - P_{30} - P_{22} + P_{32})$$

$$u_C^{00} = P_{00} - P_{20} - P_{02} + P_{22}$$

$$u_C^{10} = P_{10} - P_{30} - P_{12} + P_{32}$$

$$u_R^0 = \frac{1}{2}(P_{20} + P_{30} - P_{22} - P_{32})$$

$$u_L^1 = \frac{1}{2}(-P_{11} + P_{21} + P_{13} - P_{23})$$

$$u_C^{01} = P_{01} - P_{03} - P_{21} + P_{23}$$

$$u_R^1 = \frac{1}{2}(P_{11} + P_{21} - P_{13} - P_{23})$$

$$u_{p3} = \frac{1}{4}(P_{11} + P_{22} - P_{31} - P_{13} - P_{32} + P_{23})$$

$$u_T^0 = \frac{1}{2}(P_{02} + P_{03} - P_{22} - P_{23})$$

$$u_T^1 = \frac{1}{2}(P_{11} + P_{12} - P_{31} - P_{32})$$

$$u_{p4} = \frac{1}{4}(-P_{11} + P_{22} + P_{31} + P_{13} + P_{32} + P_{23})$$

La Figura 6 ilustra al conjunto  $D$  de parámetros de interpolación y al espacio polinomial  $S_h$ .

Una vez definidos los esquemas nodales híbridos se obtuvieron las funciones base para cada uno de ellos y todos los elementos de las matrices de rigidez (29) y de masa (30) evaluados exactamente usando el paquete Maple 7. Los nuevos esquemas nodales híbridos fueron agregados al programa de cómputo **NHDXY** (Nodal Híbrido para Difusión en geometría XY) con lo cual se resolvieron numéricamente las ecuaciones de difusión en multigrupos para los problemas de prueba que se mencionan a continuación.

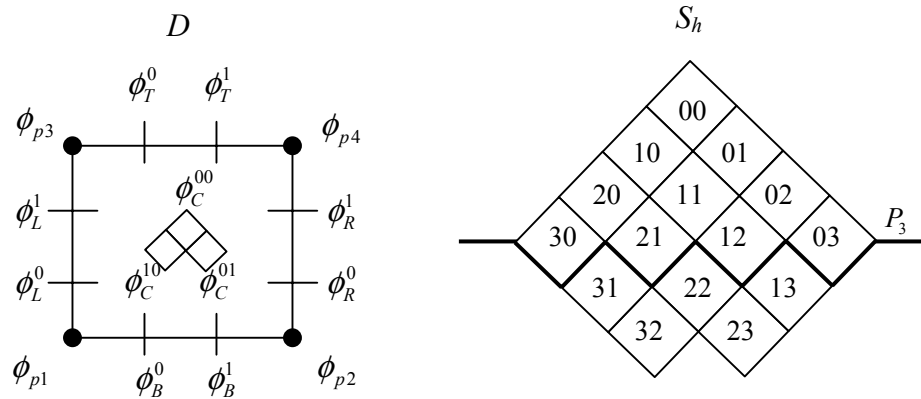


Figura 6. Conjunto  $D$  y espacio  $S_h$  para el Esquema NH(1,3).

#### 4. DESCRIPCIÓN DE LOS PROBLEMAS BENCHMARK

Para probar los métodos nodales híbridos descritos en las secciones anteriores se resolvieron varios problemas de prueba. Estos problemas fueron los siguientes: a) el 2D Biblis PWR, el 2D LRA BWR, y finalmente el LMFBR. Aunque todos estos problemas están completamente descritos en la Ref. [7] aquí se dará una breve descripción de cada uno de ellos.

##### 4.1 Problema Benchmark 2D Biblis PWR

Este problema es representativo de un reactor de agua presurizada (PWR), con 8 diferentes materiales, cuyas constantes nucleares correspondientes se obtuvieron de la Ref. [7]. Las condiciones de frontera son de flujo cero en las cara superior y derecha y de corriente cero en las caras inferior e izquierda, presentando una simetría espejo sobre el eje x y sobre el eje y. En la Fig. 7 se puede ver la distribución de los materiales.

##### 4.2 Problema Benchmark 2D LRA BWR

El problema 2D LRA representa un reactor BWR, el cual muestra un arreglo de 6 materiales y 2 grupos de energía, los materiales están distribuidos de la forma que

puede observarse en la Figura 8, y que presenta una simetría tipo espejo tanto sobre el eje  $x$  como el eje  $y$ .

8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
3	3	3	3	8	8	8	8	8	8
1	1	1	7	3	3	8	8	8	8
6	1	6	1	4	3	3	8	8	8
1	7	2	7	2	4	3	8	8	8
5	2	7	2	7	1	7	3	8	8
2	7	1	7	2	6	1	3	8	8
7	1	7	2	7	1	1	3	8	8
1	7	2	5	1	6	1	3	8	8

Figura 7. Distribución de materiales para el problema benchmark 2D Biblis PWR.

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
3	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5
2	1	1	1	1	2	2	6	6	5	5
2	1	1	1	1	2	2	6	6	5	5
1	1	1	1	1	1	1	3	3	5	5
1	1	1	1	1	1	1	3	3	5	5
1	1	1	1	1	1	1	3	3	5	5
1	1	1	1	1	1	1	3	3	5	5
2	1	1	1	1	2	2	3	3	5	5

Figura 8. Distribución de materiales para el problema benchmark 2D LRA BWR.

### 4.3 Problema 2D LMFBR

El problema 2D LMFBR muestra un diseño de un reactor de cría enfriado con metal líquido. La Figura 9 muestra el arreglo de la distribución de materiales, un total de 5. El problema es resuelto para 4 grupos de energía. Las secciones eficaces se proporcionan en la Ref. [7]. Las condiciones de frontera son de reflexión sobre las caras izquierda e inferior mientras que en las dos caras restantes es de flujo cero sobre la frontera física.

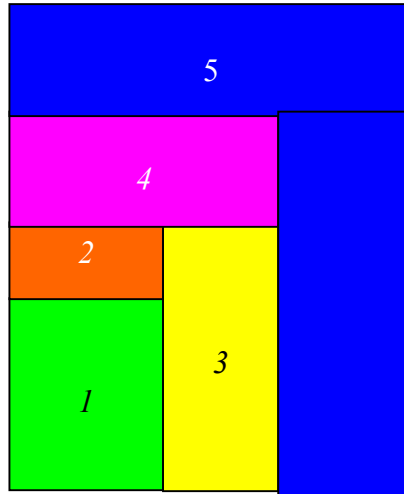


Figura 9. Distribución de materiales para el problema benchmark 2D LMFBR.

## 5. RESULTADOS OBTENIDOS

Cada uno de los problemas benchmark antes descritos fueron resueltos con el programa **NHDXY** usando varias mallas espaciales. La Tabla I muestra, para cada problema benchmark, el factor de multiplicación efectivo  $k_{eff}$  para todos los esquemas nodales híbridos ya mencionados usando mallas 1x1 y 2x2 por cada celda. Los resultados obtenidos con el programa de cómputo **NHDXY** se comparan contra el Método Nodal de Funciones de Green (NGFM, de sus siglas en inglés Nodal Green's Function Method) [7]. A partir de esta tabla se puede observar que los resultados obtenidos con el programa de cómputo **NHDXY** son comparables a aquellos de las soluciones de referencia para los mismos problemas benchmark usando el programa NGFM. Esto, aunado a otras pruebas documentadas en [5,6], sugiere que **NHDXY** puede ser usado para el cálculo del factor de multiplicación así como de la distribución del flujo neutrónico tanto a nivel ensamble de combustible como a núcleo completo. Por limitaciones de espacio no se presentan los perfiles unidimensionales ni las figuras 2D ni 3D del flujo de neutrones que prepara el programa y que se visualizan con MatLab. Particularmente, la inmediata aplicación de **NHDXY** sería en el núcleo del reactor nuclear de la Central Laguna Verde.



**Tabla I. Resultados para k-efectiva usando simetría 1/4.**

2D-LRA BWR (NGFM 0.996368 (malla 4x4))							
Malla	NH(0,1)	NH(1,4)	NH(0,0)	NH(1,0)	NH(1,1)	NH(1,2)	NH(1,3)
1x1	0.997275	0.996510	0.997621	0.996874	0.996566	0.996547	0.996515
2x2	0.996500	0.996339	0.996521	0.996366	0.996346	0.996344	0.996339
2D-Biblis PWR (NGFM 1.025103 (malla 6x6))							
Malla	NH(0,1)	NH(1,4)	NH(0,0)	NH(1,0)	NH(1,1)	NH(1,2)	NH(1,3)
1x1	1.025227	1.025164	1.024098	1.024043	1.025173	1.025164	1.025166
2x2	1.025155	1.025083	1.025140	1.025064	1.025080	1.025084	1.025083
2D-LMFBR (NGFM 1.056991 (malla 4x4))							
Malla	NH(0,1)	NH(1,4)	NH(0,0)	NH(1,0)	NH(1,1)	NH(1,2)	NH(1,3)
1x1	1.056958	1.057046	1.056880	1.056966	1.057043	1.057044	1.057045
2x2	1.057028	1.056993	1.057027	1.056993	1.056994	1.056994	1.056993

## 6. CONCLUSIONES

Se han desarrollado y aplicado cinco nuevos esquemas nodales híbridos que fueron incorporados al programa de cómputo **NHDXY**. Los resultados de la comparación con los resultados que proporciona la técnica Nodal de Funciones de Green es muy satisfactoria. Un punto a favor de aquellos esquemas que no tienen parámetros de interpolación en el interior de las celdas es que proporcionan prácticamente los mismos resultados numéricos que aquellos que sí los tienen obteniendo por tanto el mismo resultado en menos tiempo. Por supuesto que habrá que realizar una validación del programa desarrollado con problemas de prueba más severos y más realistas y estudiar la posibilidad de extender a problemas 3D esta técnica utilizando técnicas de reducción de acoplamiento entre parámetros como ya se hace en otros trabajos [8].

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al CONACyT el apoyo para desarrollar este trabajo bajo el contrato 33806-U.

## REFERENCIAS

1. J. P. Hennart, E. Sainz, M. Villegas, "On the efficient use of the finite element method in static neutron diffusion calculations," *Proc. Topl. Mtg. Computational Methods in Nuclear Engineering*, Williamsburg, Virginia, p. 3.87, ANS (1979).
2. J.P. Hennart, E. Malambu, E.H. Mund, E. del Valle, "Efficient higher order nodal finite element formulations for neutron multigroup diffusion equations", *Nucl. Sci. Engng.* **124**, 97-110 (1996).
3. J. P. Hennart, E. del Valle, "Mesh-centered nodal finite elements for elliptic problems," *Num. Meth. Part. Diff. Eqs.*, **14**(4), pp. 439-465 (1998).

4. J.J. Duderstadt and L. J. Hamilton, *Nuclear Reactor Analysis*, John Wiley & Sons, New York (1976).
5. Natividad Hernández Miranda, Gustavo Alonso Vargas, Edmundo del Valle Gallegos, Desarrollo y validación del programa NHDXY para resolver las ecuaciones de difusión en multigrupos usando los esquemas nodales híbridos Bi-Lineal, Bi-Cuadrático y Bi-Cúbico, *Memorias del XIII Congreso Anual de la Sociedad Nuclear Mexicana/XX Reunión Anual de la Sociedad Mexicana de Seguridad Radiológica*, Ixtapa-Zihuatanejo, 10-13 Noviembre (2002).
6. Natividad Hernández Miranda, *Simulación Estática en 1, 2 y 3 Dimensiones de la Neutrónica de un BWR Usando Métodos Nodales*, Tesis de Maestría en Preparación, ESFM-IPN.
7. R.D. Lawrence, "A Nodal Green's Function Method for Multidimensional Neutron Diffusion Calculations", *PhD Thesis*, University of Illinois at Urban Champaign, Urbana (1979).
8. Arturo Delfín Loya, Gustavo Alonso Vargas, Edmundo del Valle Gallegos, Desarrollo y aplicación de un esquema de tercer orden de diferencias finitas centradas en malla, *Memorias del XIV Congreso Anual de la Sociedad Nuclear Mexicana/XXI Reunión Anual de la Sociedad Mexicana de Seguridad Radiológica*, Guadalajara, Jalisco, México, 10-13 Septiembre. (2003).