MX0600199

INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES NUCLEARES

DIVISION DE SERVICIOS TECNICOS

# EL CALCULO DE ACTIVIDAD ABSOLUTA POR LA TECNICA DE COINCIDENCIAS $4\pi\beta-\gamma$

## I.- FÓRMULA CORREGIDA DE J. BRYANT.


GERENCIA DE SEGURIDAD

DEPTO. DE METROLOGIA DE RADIACIONES IONIZANTES
LABORATORIO DE PATRONES RADIACTIVOS



INFORME TÉCNICO LPR-CMRI-02-90

MARZO DE 1990

# EL CALCULO DE ACTIVIDAD ABSOLUTA POR LA TECNICA DE COINCIDENCIAS

## I.- FORMULA CORREGIDA DE J. BRYANT

DR. ARIEL TEJERA RIVERA, FIS. ALFONSO CORTÉS PALACIOS Y M. EN C. ARTURO BECERRIL VILCHIS.

DIVISIÓN DE SERVICIOS TÉCNICOS
GERENCIA DE SEGURIDAD
DEPTO. DE METROLOGÍA DE RADIACIONES IONIZANTES
LABORATORIO DE PATRONES RADIACTIVOS

INFORME TECNICO LPR-CMRI-02-90

MARZO DE 1990

# I N D I C E

# INTRODUCCION

La calibración absoluta de radisótopos emisores beta-gamma se inició con éxito desde las contribuciones fundamentales a la teoría y técnica de coincidencias $4\pi$beta-gamma hechas por Putman, Campión, Gandy y Bryant en el lapso comprendido entre 1950 a 1962. Se estableció entonces la posibilidad de hacer medidas muy aproximadas de la actividad, mejoradas por correcciones de los errores instrumentales. En los siguientes 13 años se analizaron y perfeccionaron los instrumentos y la corrección de los errores, principalmente por coincidencias accidentales y por los tiempos muertos no extendibles en los canales beta y gamma.

A través de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, Sèvres, se organizó un plan de comparaciones de medidas de actividad entre los laboratorios nacionales, iniciándose para los emisores beta-gamma con el I-131 en 1961. Para 1975 se habían comparado Au-198, Co-60 y Cs-134, entre otros. Del análisis de los resultados se concluyó que las fórmulas matemáticas utilizadas permitían en general medir la actividad con incertidumbres de 0.1%, si esta actividad no era mayor a 50 KBq; por lo que se pidió a los matemáticos Cox e Isham plantear un modelo matemático exacto del problema para tiempos muertos no extendibles. Lo lograron y encontraron la solución exacta, la que Smith, en 1977, se encargó de presentarla en forma útil para las situaciones prácticas. Con algunas extensiones de la teoría se estimó una mejoría de la exactitud de las medidas de 0.01% para 0.5 MBq de actividad.

En los años siguientes se atacó el problema teórico e instrumental para el caso de los tiempos muertos extendibles y se tiene por lo menos dos soluciones, la del grupo del LMRI (Saclay), encabezada por Chauvenet, y la del BIPM (Sèvres) encabezada por Müller.

El método propuesto por Müller, a partir de 1981, lleva el nombre de SESAM y esencialmente consiste en usar tiempos muertos extendibles y guardar memoria temporal de los pulsos gamma que aparecen después de cada pulso beta, que produzca una coincidencia genuina. El método del LMRI, llamado IMPECC (1987), también se auxilia de tiempos muertos extensibles. Está concebido para contar los eventos coincidentes, sólo cuando el sistema no esté perturbado por algún evento parcialmente registrado. Con este sistema se han medido fuentes de Co-60 con actividades de 1.3 MBq y una incertidumbre mejor al 0.25%.

ECUACIONES DE PROBABILIDAD EN LA FORMULACION DE J. BRYANT.

## PRINCIPIOS

Sean B, G y C las razones de conteo verdaderas, o sea corregidas de tiempo muerto, fondo, etc, en cada canal. Para una fuente puntual de actividad verdadera A sean las probabilidades de conteo $\beta$ y $\gamma$ en los canales beta y gamma, respectivamente. Se cumple que

$$B = A\beta \ , \qquad G = A\gamma \qquad y \qquad C = A\beta\gamma \tag{1}$$

de donde $\frac{BG}{C} = \frac{A^2\beta\gamma}{A\ \beta\gamma}$

$$y \quad A = \frac{BG}{C} \tag{2}$$

Esta fórmula destaca el gran interés en este método, que permite evadir conocer las eficiencias de los detectores.

La relación establecida para una fuente puntual puede generalizarse para fuentes extendidas.

Sea $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ y $\overline{\beta\gamma}$ los promedios de las eficiencias obtenidas integrando las eficiencias elementales sobre el volumen de lafuente, y la eficiencia promedio del producto de las eficiencias elementales.

El método de coincidencias se podrá aplicar con mayor éxito en la medida en que la razón

$$\frac{\overline{\beta\gamma}}{\overline{\beta}\ \overline{\gamma}} \tag{3}$$

se aproxime a la unidad.

Para que esta condición quede satisfecha [1] [2] es suficiente qûe uno de los detectores presente la misma eficiencia respecto al total de la fuente, por ejemplo el $\gamma$, y que uno de los detectores presente una eficiencia igual a 1, por ejemplo el canal $\beta$.

Para la aplicación práctica del método, es necesario aplicar una serie de correcciones pequeñas relacionadas con el fondo, el tiempo muerto de los detectores y de los canales, con el tiempo de resolución de las coincidencias, con las coincidencias accidentales, con el esquema de decaimiento y con la eficiencia gamma del detector beta y la eficiencia beta del detector gamma.

En un sistema de coincidencias integrado cuyos detectores son una cámara proporcional y cristales de centelleo de NaI(Tl), la cámara detecta las partículas β con una alta eficiencia β, así como la radiación fotónica con una eficiencia β(γ). El cristal, a su vez, detecta la radiación gamma con una eficiencia γ y la radiación de bremsstrahlung producida por las β con una eficiencia γ(β).

Se supone que los detectores son sistemas paralizables, es decir, que después de que un detector responde a una radiación incidente queda inactivo por tiempo definido, $T\beta$ o $T\gamma$, ya sea el propio o impuesto por un artificio electrónico.

También se suponen los tiempos muertos de los dos detectores, cuando operan disparados por un mismo evento nuclear, coinciden totalmente.

## CALCULO DE LA FORMULA DE CORRECCION

En la presente deducción debida a J. Bryant[3], se trata como un solo problema las coincidencias accidentales y las pérdidas por tiempo muerto.

Para un instante arbitrario dado se pueden distinguir cinco posibles estados de los detectores B y G.

1° Ambos, B y G activos.
2° B bloqueado, pero G activo.
3° B activo, pero G bloqueado.
4° Ambos bloqueados por una coincidencia verdadera registrada.
5° Ambos bloqueados, pero no por una coincidencia verdadera registrada.

Sean las probabilidades de observar cada uno de estos estados $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ y $P_5$.

Se le designará con la expresión (r,s) a la probabilidad de un estado r presente al instante de una desintegración arbitrariamente seleccionada y del estado s presente al instante de la siguiente desintegración.

Considérense dos desintegraciones sucesivas. Cuando ocurre la primera, r, la probabilidad del estado de los detectores es uno de los $P_i$ dados. Para cada caso, cuando ocurre la siguiente desintegración se puede calcular la probabili dad del siguiente estado, s. Resultan 25 combinaciones de los estados (r,s).

Un tiempo muerto correspondiente a una coincidencia genuina se define como el que se inicia simultáneamente en B y G por una desintegración. Si la coincidencia no es genuina, los tiempos muertos se desfasan.

Sean las eficiencias de B y G, $\beta$ y $\gamma$ respectivamente; sea la razón de desintegración A; el tiempo muerto, igual para B y G, igual con T y el tiempo de resolución de las coincidencias, R. Las eficiencias $\beta$ y $\gamma$ son las probabilidades de detección de la desintegración en B y G, respectivamente, cuando están activos. R se toma cuando menos igual a T/2 y se define como el periodo después de que se inicia el tiempo muerto en uno de los detectores, durante el cual una desintegración detectada por el otro detector produce una cuenta de concidencia.

GLOSARIO

| | |
|---|---|
| A | Actividad de la fuente |
| B | Razón de conteo del detector $\beta$ |
| G | Razón de conteo del detector $\gamma$ |
| C | Razón de conteo de coincidencias |
| $\beta$ | eficacia del detector $\beta$, probabilidad de detectar un evento en el detector $\beta$ |
| $\gamma$ | eficacia del detector $\gamma$, probabilidad de detectar un evento en el detector $\gamma$ |
| T | tiempo muerto igual para el canal $\beta$ y $\gamma$. |
| R | tiempo de resolución del módulo de conciden-cias. |

| | |
|---|---|
| $p_1 = (1 - \beta);\ (1 - \gamma)$ | probabilidad de no detectar un evento en el detector $\beta$ ; $\gamma$. |
| $p_2 = (1 - \beta)(1 - \gamma)$ | probabilidad de no detectar un evento en ambos detectores. |
| $p_3 = e^{-AT}$ | probabilidad de que no ocurra un solo evento en el tiempo T (distribución de Poisson). |
| $p_4 = (1 - e^{AT})$ | probabilidad de que por lo menos ocurra un evento en el tiempo T. |
| $p_5 = \left[1 - (1 - \beta)(1 - \gamma)\right]$ | probabilidad de detectar un evento por lo menos en un detector |

$= (1 - P_2)$

Tabla 1: Probabilidad del primer estado existente al instante de una desintegración y el segundo estado al instante de la siguiente desintegración.

| 1er ESTADO \ 2º ESTADO | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $P_1\{1+(\beta\gamma-\beta-\gamma)\times(1-e^{-AT})\}$ | $P_1\{\gamma(1-e^{-AT})(1-\beta)\}$ | $P_1\{\beta(1-\gamma)(1-e^{-AT})\}$ | $P_1\{\beta\gamma\times(1-e^{-AT})$ | 0 |
| 2 | $P_2\{\beta e^{-AT}+\frac{1}{AT}(1-\beta)\times(1-e^{-AT})\}$ | $P_2\{(1-\beta)[1-\frac{1}{AT}(1-e^{-AT})]\}$ | $P_2\{\beta[\frac{1}{AT}(1-e^{-AT})-e^{-AT}]\}$ | 0 | $P_2\{\beta[1-\frac{1}{AT}(1-e^{-AT})]\}$ |
| 3 | $P_3\{\gamma e^{-AT}+\frac{1}{AT}(1-\gamma)(1-e^{-AT})\}$ | $P_3\{\gamma[\frac{1}{AT}(1-e^{-AT})-e^{-AT}]\}$ | $P_3\{(1-\gamma)[1-\frac{1}{AT}(1-e^{-AT})]\}$ | 0 | $P_3\{\gamma[1-\frac{1}{AT}(1-e^{-AT})]\}$ |
| 4 | $P_4[\frac{1}{AT}(1-e^{-AT})$ | 0 | 0 | $P_4[1-\frac{1}{AT}(1-e^{-AT})]$ | 0 |
| 5 | $P_5[\frac{2}{A^2T^2}(1-e^{-AT})-\frac{2}{AT}e^{-AT}]$ | $P_5[\frac{1}{AT}(1+e^{-AT})-\frac{2}{A^2T^2}(1-e^{-AT})]$ | $P_5[\frac{1}{AT}(1+e^{-AT})-\frac{2}{A^2T^2}(1-e^{-AT})$ | 0 | $P_5[1+\frac{2}{A^2T^2}(1-e^{-AT})-\frac{2}{AT}]$ |

CASOS

Los 25 casos que se consideran, enlistados en la tabla 1, se obtienen indicando el producto de las probabilidades de cada uno de los 5 estados dados, que corresponden al momento en que se produce una primera desintegración y la probabilidad del estado en que se encontrará el sistema cuando ocurra una segunda desintegración.

En la tabla 1, cada renglón corresponde a la probabilidad de un estado dado al momento de la primera desintegración y cada columna al estado correspondiente al momento de la segunda desintegración.

Los casos anotados en la tabla 1 son los siguientes:

Sea (r,s) la representación de r, primer estado seleccionado cuando ocurra una desintegración; s, el segundo estado cuando ocurra la desintegración siguiente:

(1, 1).- Se indica por el producto del primer estado hipotético $P_1$ y las dos posibilidades siguientes

a) no se registra la primera desintegración en ninguno de los detectores con probabilidad $p_2$ del Glosario, por lo que los detectores B y G están activos cuando ocurre la segunda desintegración.

b) la 1a desintegración se detecta cuando menos en uno de los detectores, por lo que la probabilidad de que cuando ocurra la 2a desintegración los detectores estén activos, para un tiempo mayor que T es $p_3 = e^{-AT}$, luego

$$(1,1) = P_1 \left| p_2 + (1 - p_2)p_3 \right|$$

$$= P_1 \{ (1 - \beta)(1 - \gamma) + \left[1 - (1 - \beta)(1 - \gamma)\right] e^{-AT} \}$$

(2.1). Supóngase que el detector B se active después de un tiempo **x**. Hay 2 casos a considerar:

a) la primera desintegración se detecta en G, por lo que la probabilidad de que G esté activo cuando ocurra la 2a desintegración es $\gamma e^{-AT}$

b) la desintegración no se detecta en G, luego la probabilidad por eficiencia es $P_1 = (1 - \gamma)$, a la que hay que multiplicar por el promedio temporal calculado de la siguiente manera:

En la figura 1 se grafican en señales paralelas el estado de los detectores. Cuando se produce la primera desintegración $q$, el canal B estará bloqueado durante un tiempo x.

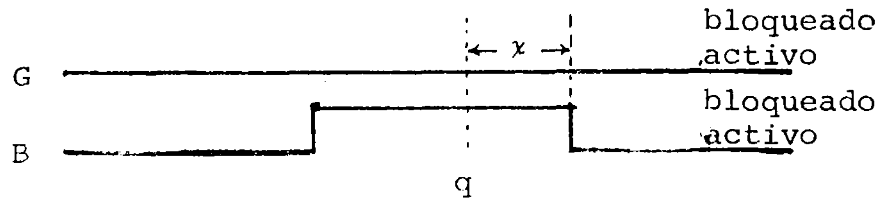



Fig. 1

Para un valor particular de $x$ la probabilidad de recuperación del canal B es $e^{-Ax}$, y el promedio temporal de la probabilidad teniendo en cuenta que todos los valores de $x$ entre 0 y T son igualmente probables, es

$$P_6 = \frac{\int_0^T e^{-Ax}dx}{\int_0^T dx} = \frac{1 - e^{-AT}}{AT}$$

por lo que finalmente

$$(2.1) = P_2\{\gamma e^{-AT} + [(1 - \gamma)(1 - e^{-AT})/AT]\}$$

(3.1) En este caso, cuando ocurre la primera desintegración, el canal B está activo y el G bloqueado durante un tiempo x. Este caso es simétrico del (2.1), y por analogía con (2.1)- se puede escribir

$$(3.1) = P_3\{\beta e^{-AT} + [(1 - \beta)(1 - e^{-AT})/AT]\}$$

(4.1) Cuando ocurre la primera desintegración ambos canales están bloqueados por una coincidencia verdadera registrada, con probabilidad $P_4$, ver fig. 2.

Como ambos canales estarán muertos un tiempo $x$, el promedio temporal de que ocurra una segunda desintegración y encuentra activos a ambos canales es

$$p_6 = \frac{\int_0^T e^{-Ax}dx}{\int_0^T dx} = (1 - e^{-AT})/AT$$

por lo que

$$(4.1) = P_4 \,|(1 - e^{-AT})/AT|$$

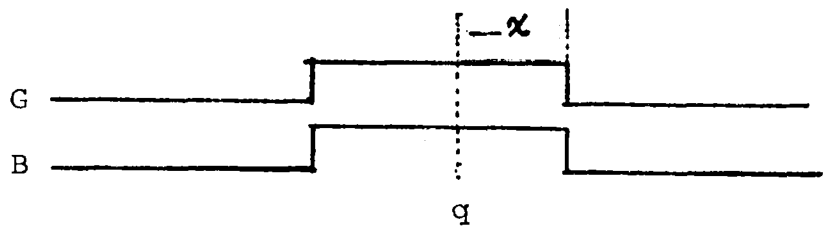



Fig. 2

(5.1) Cuando ocurre la primera desintegración ambos canales - están bloqueados y desfasados en el tiempo. Sea el bloqueo B anterior a G. Ver fig. 3. La probabilidad **W** de que B se recobre antes de G es proporcional a $x$, cuanto mayor sea x mayor chance tiene B de recobrarse, por lo que

$$W = x/T$$

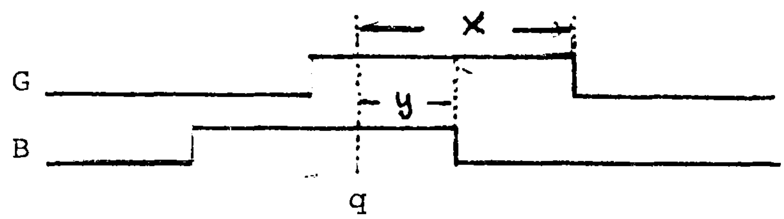



Fig. 3

y la probabilidad de que una segunda desintegración se produzca cuando el canal G esté activo es

$$We^{-\Lambda x}$$

ya estando activo el canal B, por lo que el promedio temporal de la probabilidades

$$p = \frac{\int_0^T \frac{x}{T} e^{-\Lambda x} dx}{\int_0^T dx} = [(1 - e^{-AT})/A^2T^2] - [e^{-AT}/AT]$$

Si el canal G está muerto antes que el B, la probabilidad de que la segunda desintegración ocurra cuando ambos canales estén vivos es

$$p' = \frac{\int_0^T \frac{y}{T} e^{-Ay} dx}{\int_0^T dx} = [(1 - e^{-AT})/A^2T^2] - [e^{-AT}/AT]$$

y la probabilidad para ambos casos es

$$(5.1) = P_5\{[2(1 - e^{-AT})/A^2T^2] - [(2\ e^{-AT})/AT]\}$$

(1.2) Cuando ocurre la primera desintegración ambos canales están activos con probabilidad $P_1$. El segundo factor es la probabilidad $\beta$ de que el canal B registre la desintegración multiplicado por la probabilidad $p_1 = (1 - \gamma)$ de que el canal G no la detecte. El tercer factor es la probabilidad $p_4$ de que por lo menos una desintegración ocurra durante el tiempo T. $(1.2) = P_1 \cdot \beta(1 - \gamma)(1 - e^{-AT})$

(2.2) Cuando ocurre la primera desintegración el canal B está bloqueado y el G activo, con probabilidad $P_2$. La probabilidad de que siga activo el canal G es $P_1 = (1 - \gamma)$ y simultáneamente el promedio de la probabilidad de que mientras dura ocupado el canal B ocurra una segunda desintegración es $\{1 - p_6\}$, Fig. 4.

$$(2.2) = P_2(1 - \gamma)\{1 - |(1 - e^{AT})/AT|\}$$

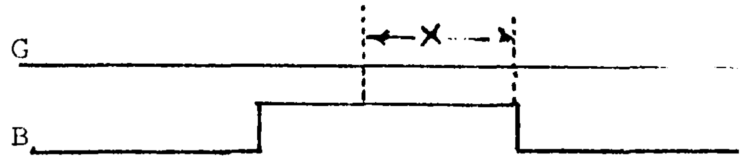



Fig. 4

(3.2) Cuando ocurre la primera desintegración el canal G está bloqueado y el B activo, probabilidad $P_3$. La probabilidad de que el B se bloquée por la desintegración es $\beta$ y la probabilidad de que no ocurra una segunda desintegración en el tiempo $\chi$, y de que por lo menos ocurra una segunda desintegración en el tiempo $T - \chi$ es $p_9$, ver fig. 5.

El promedio de esta probabilidad en el lapso T es

$$|(1 - e^{-AT})/AT| - e^{-AT}$$

por lo que

(3.2) $= P_3 \ \beta\{[(1 - e^{-AT})/AT] - e^{-AT}\}$

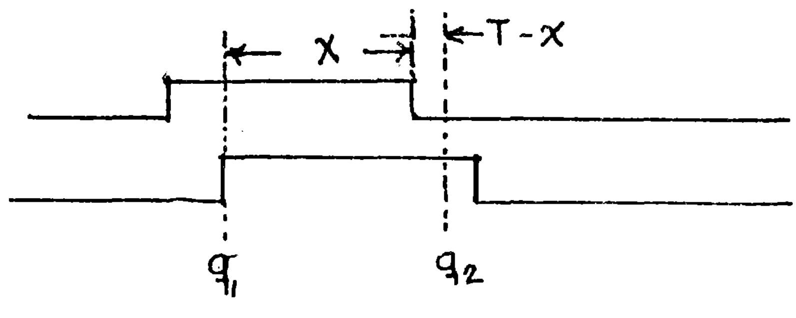


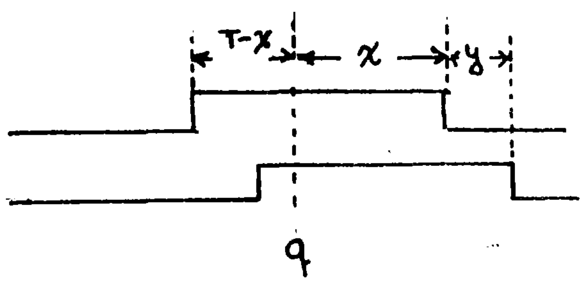

Fig. 5

(4.2) Si cuando arriba la primera desintegración, ambos canales están ocupados por una coincidencia genuina, la probabilidad de que una segunda desintegración encuentre un canal activo y el otro ocupado es cero, luego

(4.2) = 0

(5. 2) La primera desintegración encuentra a los canales bloqueados y desfasados por una coincidencia no genuina, ver fig. 6. La probabilidad de que B se recupere antes de G es x/T, porque el borde b puede ocupar cualquier lugar de $x$, y el máximo valor posible es T. La probabilidad de que B se recupere después de G es (1 - X/T) y la probabilidad de que no se presenta una desintegración en el tiempo $x$ es $e^{-Ax}$, el producto de ambas probabilidades es

$$\left(\frac{T - x}{T}\right) e^{-Ax}$$



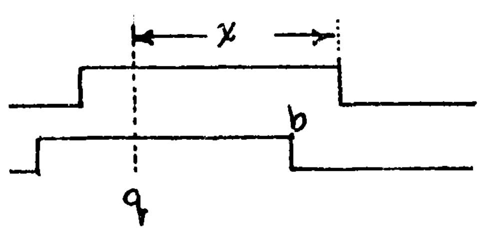




Fig. 6

Fig. 7

La probabilidad de que B permanezca bloqueado durante un tiempo "y" y espués de la recuperación de G y ocurra por lo menos una desintegración en este lapso es $(1 - e^{-Ay})/(T - x)$ El promedio del producto de las probabilidades es

$$(5.2) = P_5 \frac{\int_0^T \frac{T - x}{T} e^{-Ax} \cdot \left[\int_0^{T-x} \frac{(1 - e^{-Ay})}{T - x} dy\right] dx}{\int_0^T dx}$$

$$= P_5 \left\{\frac{1}{AT} (1 + e^{-AT}) - \frac{2}{A^2T^2} (1 - e^{-AT})\right\}$$

(1.3).- Se forma el producto de la probabilidad $P_1$ de que ambos canales estén activos con la probabilidad $\beta$ de que el canal B esté activo, la probabilidad $\gamma$ de que el canal G esté bloqueado y la probabilidad $(1 - e^{-AT})$ de que por lo menos se produzca una desintegración durante el tiempo T, quedando, Fig. 8,

$$(1.3) = P_1\beta(1 - \gamma)(1 - e^{-AT})$$

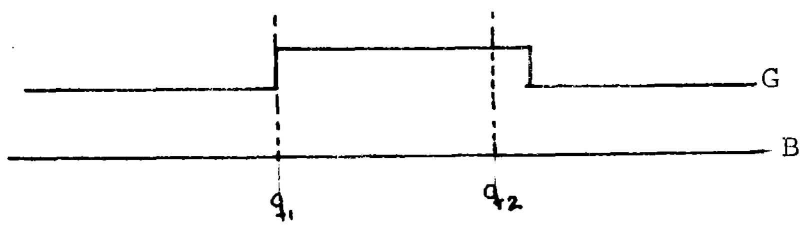



Fig. 8

(2.3) La probabilidad de que cuando ocurra la primera desintegración B esté muerto y G vivo es $P_2$, ver Fig. 9

La probabilidad de que el canal G registre la primera desintegración es $\gamma$. La probabilidad de que no se produzca una segunda desintegración durante el tiempo x es $e^{-Ax}$ y que se produzca por lo menos una durante el tiempo $(T - x)$ es $(1 - e^{-A(T-x)})$ por lo que en promedio

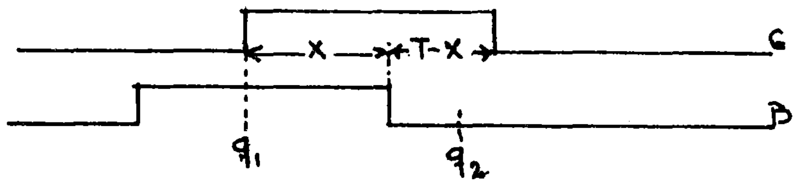



Fig. 9

$p_9 = \frac{1}{AT}(1 - e^{-AT}) - e^{-AT}$, luego

$(2.3) = P_3\beta\{[(1 - e^{-AT})/AT)] - e^{-AT}\}$

(3.3).- Este caso es análogo al (2.2), por lo que

$(3.3) = P_3(1 - \beta)\ \{1 - |(1 - e^{-AT})/AT|\}$

**(4.3)**.- La primera desintegración encuentra a los dos canales bloqueados por una desintegración genuina. La segunda desintegración encuentra a los canales bloqueados por la desintegración anterior o ambos activos, siendo cero la probabilidad de que el canal G esté bloqueado y el B activo, luego (4.3) = 0

(5.3).- El caso (5.3) es análogo al (5.2), por lo que

$(5.3) = P_5\{|(1 + e^{-AT})/AT| - 2|(1 - e^{-AT})/A^2T^2|$

(1.4).- Cuando incide la primera desintegración, ambos canales están activos, $P_1$, y la probabilidad de que se ocupen ambos con una coincidencia verdadera es $p_6 = \beta\gamma$ multiplicado por la probabilidad $p_4$ de que por lo menos ocurra una desintegración en el tiempo T, luego

$(1.4) = P_1\beta\gamma(1 - e^{-AT})$

(2.4).- Cuando ocurre la primera desintegración, G está activo y B bloqueado. La probabilidad de que cuando ocurra la segunda desintegración ambos canales estén ocupados por una desintegración genuina es cero, luego

(2.4) = 0

(3.4).- Por analogía con el caso (2.4)

(3.4) = 0

(4.4).- La primera desintegración encuentra ocupados ambos canales por una coincidencia genuina. El promedio de las probabilidades de que en el lapso T ocurra por lo menos una desintegración es $(1 - p_7)$, por lo que

$$(4.4) = P_4\{1 - |(1 - e^{-AT})/AT|$$

(5.4).- Si la primera desintegración encuentra ambos canales ocupados y desfasados, la segunda desintegración no tiene oportunidad de producir una coincidencia genuina.
(5,4) = 0

(1.5).- Si la primera desintegración encuentra ambos canales activos, no hay forma de que una segunda desintegración produzca una ocupación desfasada de los canales, luego

(1.5) = 0

(2.5) La primera desintegración encuentra ocupado el canal B y activo el canal G, con probabilidad $P_2$. La probabilidad de que dispare al canal G es $\gamma$. El promedio de la probabilidad de que ocurra una segunda desintgración en x, Fig. 10 y encuentre ambos canales ocupados por la coincidencia no genuina es $p_{10}$, luego

$$(2.5) = P_2\gamma\{1 - |(1 - e^{-AT})/AT|\}$$

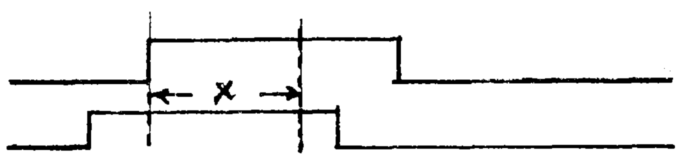



Fig. 10

(3.5).- Es un caso análogo al (2.5), luego

$$(3.5) = P_3\beta\{1 - |(1 - e^{-AT})/AT\}$$

(4.5).- Si la primera desintegración encuentra ambos canales ocupados por una desintegración genuina, una segunda desintegración no puede producir un desfasamiento de los tiem pos ocupados, luego

(4.5) = 0

(5.5).- En este caso la probabilidad de que la primera desintegración encuentre ambos canales bloqueados y desfasados es $P_5$. Se pueden presentar dos casos, a) que G se desocupe antes que B, o b) que B se desocupe antes que G. En ambos casos, por lo menos una desintegración tiene que ocurrir durante el lapso x de la Fig. 12 o de la Fig. 13. Tratemos al caso a); la probabilidad de que G se recupere antes que B es $(T - x)/T$, y la probabilidad de que ocurra por lo menos una desintegración durante el tiempo $x$ es $p_4$, por lo que en promedio

$$\frac{\int_0^T \left(\frac{T - x}{T}\right)\left(1 - e^{-\Lambda x}\right)dx}{\int_0^T dx}$$

$$= (1/2) + \left[(1 - e^{-\Lambda T})/\Lambda^2 T^2\right] - (1/NT)$$

luego, considerando ambos casos, a y b, se tiene

$$(5.5) = P_5\{1 + 2[(1 - e^{-\Lambda T})/\Lambda^2 T^2] - (2/NT)\}$$

## SOLUCION DE LAS ECUACIONES

La suma de las probabilidades de la primera columna de la tabla 1 es igual a $P_1$, ya que se refiere a todos los estados posibles en los cuales el estado r igual a 1 se cumple cuando se presenta la segunda desintegración. De igual modo la suma de las probabilidades de las siguientes columnas totalizan $P_2$, $P_3$, $P_4$ y $P_5$, respectivamente. Aunque solo 4 de las 5 ecuaciones son independientes, la ecuación

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$$

es suficiente para generar las soluciones. Además, $P_1 + P_2$ y $P_1 + P_3$ son las probabilidades de que los detectores $\gamma$ y $\beta$ esten respectivamente activos. Se obtiene de la teoría de las pérdidas por tiempo muerto en un detector, si $\gamma$ y $\beta$ son las eficiencias y T el tiempo muerto, que

$$P_1 + P_2 = 1/(1+\gamma AT)$$

$$P_1 + P_3 = 1/(1+\beta AT)$$

De estas 7 ecuaciones, Bryant deriva el siguiente sistema de soluciones

$$P_1 = (1/D)[2+(\gamma+\beta)AT]$$

$$P_2 = (1/D)\{\beta[2(1-\gamma)+(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT]\}$$

$$P_3 = (1/D)\{\gamma[2(1-\beta)+(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT]\}$$

$$P_4 = (1/D)\{\gamma\beta AT[2+(\gamma+\beta)AT]\}$$

$$P_5 = (1/D)\{\gamma\beta AT[2-(\gamma+\beta)+(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT]\}$$

$$D = (1+\gamma AT)(1+\beta AT)[2+(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT]$$

Este sistema no satisface que

$$P_1+P_2 = 1/(1+\gamma AT)$$

porque, substituyendo

$$P_1+P_2 = \frac{[2+(\gamma+\beta)AT]+\beta[2(1-\gamma)+(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT]}{(1+\gamma AT)(1+\beta AT)[2(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT]}$$

$$= \frac{2[1+\beta(1+\gamma)+(\gamma+\beta+\gamma\beta+\beta^2-2\gamma^2\beta)AT]}{(1+\gamma AT)\{2(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT+2\beta(\gamma+\beta-2\gamma\beta)(AT)^2\}}$$

$$\neq \frac{1}{(1+\gamma AT)}$$

Suponiendo que faltan factores* AT en las soluciones, se deducirán de la ecuación

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$$

y de suponer que el denominador D está correcto.

Para este fin se multiplicaran las soluciones de $P_i$ por $a, \ell, r, b, u$ respectivamente, y se sumaran

$$\sum P_i' = 2a + a(\gamma+\beta)AT + 2\ell\beta(1-\gamma) + \ell\beta(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT + 2r\gamma(1-\beta) + r\gamma(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT + 2b\gamma\beta AT + b\gamma\beta(\beta+\gamma)(AT)^2 + 2u\gamma\beta AT - u\gamma\beta AT(\gamma+\beta) + u\gamma\beta(\gamma+\beta-2\gamma\beta)(AT)^2$$

Agrupando por potencias de (AT), el denominador

$$D = 2 + (3\gamma + 3\beta - 2\gamma\beta)AT + [\gamma^2 + 4\gamma\beta + \beta^2 - 2\gamma\beta(\gamma+\beta)(AT)^2 + (\beta\gamma^2 + \gamma\beta^2 - 2\gamma^2\beta^2)(AT)^3$$

Del término constante se deduce que $a = 1$.

Examínense los términos de $1^{er}$ grado, en la hipótesis inicial de que $\ell = r = AT$ e iguálence al de $1^{er}$

* Bouchard J. LMRI. CEN. SACLAY. FRANCIA. COMUNICACION PRIVADA

grado de D

$$(\gamma+\beta)AT+2l\beta(1-\gamma)+2r\gamma(1-\beta)=(\gamma+\beta+2\beta-2\beta\gamma+2\gamma$$

$$-2\gamma\beta)AT=(3\gamma+3\beta-4\beta\gamma)AT$$

como falta un término $2\gamma\beta$, se puede tentativamente sumar $2b\gamma\beta AT$, suponiendo que $b=1$, con lo que se ajustan los terminos de 1er grado en AT. Los términos de segundo grado en AT son, si se ensaya $u=AT$

$$(AT)^2[\gamma\beta+\beta^2-2\gamma\beta^2+\gamma^2+\gamma\beta-2\gamma^2\beta+\gamma\beta^2+\gamma^2\beta+2\gamma\beta-$$

$$-\gamma^2\beta-\gamma\beta^2]=[\beta^2+\gamma^2+4\gamma\beta-2\gamma\beta^2-2\beta\gamma^2](AT)^2$$

término que corresponde al del denominador D.

Los términos de tercer grado en AT son

$$(\gamma^2\beta+\gamma\beta^2-2\gamma^2\beta^2)(AT)^3$$

que corresponden con los del mismo grado en D.

Luego, el sistema de soluciones corregido, es

$$P_1 = (1/D)[2 + (\gamma+\beta)AT]$$

$$P_2 = (AT/D)\{\beta[2(1-\gamma)+(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT]\}$$

$$P_3 = (AT/D)\{\gamma[2(1-\beta)+(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT]\}$$

$$P_4 = (AT/D)\gamma\beta[2+(\gamma+\beta)AT]$$

$$P_5 = (AT/D)[\gamma\beta(2-\gamma-\beta)AT]+\gamma\beta(\gamma+\beta-2\gamma\beta)(AT)^2$$

$$D = (1+\gamma AT)(1+\beta AT)[2+(\gamma+\beta-2\gamma\beta)AT]$$

VERIFICACION DE LAS SOLUCIONES.

1º Las soluciones deben satisfacer

a) $P_1 + P_2 = \dfrac{1}{1+\gamma AT}$ y

b) $P_1 + P_3 = \dfrac{1}{1+\beta AT}$

que son las correcciones por eficiencia $\gamma$ y $\beta$, y por tiempo muerto $T$

a) $$P_1+P_2 = \frac{2+(\gamma+\beta+2\beta-2\gamma\beta)AT+(\beta\gamma+\beta^2-2\gamma\beta^2)(AT)^2}{(1+\gamma AT)[2+(\gamma+3\beta-2\gamma\beta)AT+(\beta\gamma+\beta^2-2\gamma\beta^2)(AT)^2]}$$

$$\therefore\ P_1+P_2 = \frac{1}{(1+\gamma AT)}$$

b) $P_1+P_3 = \dfrac{2+(\gamma+\beta+2\gamma-2\gamma\beta)AT+(\gamma^2+\gamma\beta+2\gamma^2\beta)(AT)^2}{(1+\beta AT)[2+(\gamma+\beta-2\gamma\beta+2\gamma)AT+(\beta\gamma+\gamma^2+2\gamma^2\beta)(AT)^2}$

$\therefore\ P_1+P_3 = \dfrac{1}{(1+\beta AT)}$

2° Se debe cumplir que

$(r,1)+(r,2)+(r,3)+(r,4)+(r,5) = P_r$
para $r = 1,2,3,4,5$

a) $\sum_1^5 (1,j) =$

$= P_1\{1+[\beta\gamma-\beta-\gamma+\beta-\beta\gamma+\gamma-\gamma\beta+\beta\gamma+0](1-e^{-AT})\}$

$= P_1$

b) $\sum_1^5 (2,j) =$

$= P_2\{\beta e^{-AT}-\beta e^{-AT}+1-\beta+\beta+[1-\beta+\beta-1+\beta-\beta](1/AT)\cdot$
$\cdot(1-e^{-AT})\}$

$= P_2$

c) $\sum_1^5 (3,j) =$

$= P_3\{\beta e^{-AT}-\beta e^{-AT}+1-\beta+\beta+(1-\beta+\beta-1+\beta-\beta)(1/AT)\cdot$
$\cdot(1-e^{-AT})\}$

$\therefore = P_3$

d) $\sum_{1}^{5}(4,j) =$

$$= P_4 [ (1/AT)(1 - e^{-AT}) + 1 - (1/AT)(1 - e^{-AT})$$

$$= P_4$$

e) $\sum_{1}^{5}(5,j) =$

$$= P_5 \{ 2(1 - e^{-AT}) - 2(1 - e^{-AT}) - 2(1 - e^{-AT}) + 2(1 - e^{-AT}) +$$

$$+ 1 - (2/AT)e^{-AT} - (2/AT) + (2/AT) - (2/AT)e^{-AT} \}$$

$$= P_5$$

# A P E N D I C E

## LA DISTRIBUCION DE INTERVALOS[1]

La distribución de intervalos para una distribución de Poisson describe la distribución de la longitud de los intervalos de tiempo entre dos eventos sucesivos en un proceso aleatorio en el que la tasa media tiene un valor constante de "a" eventos por unidad de tiempo.

La expresión poissoniana

$$Px = \frac{(at)^x}{X!} e^{-at}$$

indica la probabilidad de que ocurran X eventos en el tiempo t. Si "a" es el número de eventos constante por unidad de tiempo, se tiene que

$$Po = \frac{(at)^o}{O!} e^{-at} = e^{-at}$$

representa la probabilidad de que no se presente ningún evento en el tiempo t. En una distribución aleatoria del tipo de la de Poisson, la probabilidad $dP_t$ de que la duración de un intervalo particular esté comprendido entre t y t+dt es

$$dP_t = ae^{-at}dt$$

Por lo que, para un número N muy grande de intervalos, el número n de intervalos mayores que $t_1$ y menores que $t_2$ es

$$n = N\int_{t_1}^{t_2} ae^{-at}dt = N(e^{-at_1} - e^{-at_2})$$

Si $t_2 \to \infty$, encontramos que el número de intervalos mayores que una duración t es $Ne^{at}$.

PERDIDA DE CUENTAS POR EL TIEMPO FINITO DE RESOLUCION[1]

En el caso de detectores de partículas nucleares tales que el tiempo de recuperación $\theta$, al tiempo muerto, que transcurre después de detectar una partícula y estén activos de nuevo para detectar la siguiente sea constante, se les llama no paralizables o de tiempo muerto no prolongable. Si el conteo observado es N', el tiempo que se mantienen bloqueados es $N'\theta$ y la fracción de tiempo en que se mantienen activos es $1 - N'\theta$. El número verdadero de eventos es $N = \frac{N'}{1-N'\theta}$

BIBLIOGRAFIA.

(1) Putman J.L. Brit. J. Rad. XXIII, 46 (1950)

(2) Campion P.J. I.J.A.R.I. 4, 232 (1959).

(3) Bryant, J. I.J.A.R.I. 14, 143-151 (1963).

(4) Evans D.R. The Atomic Nucleus. Mc Graw Hill. (1955).