

CNIC-01767

IAPCM-0040

解二维非平衡辐射输运方程的 两种分裂网格数值方法

冯庭桂

(北京应用物理与计算数学研究所,北京,100088)

摘 要

讨论非矩形网格辐射输运方程的数值解法。对任意四边形网格,给出两种分裂网格数值方法:特征线积分和子网格平衡方法。并给出矩形网格和任意四边形网格两种方法的数值计算例子,且与 S_n 菱形格式计算结果进行比较,对方法作出评价。

关键词:辐射输运 非矩形网格 子网格平衡 特征线积分

Two Split Cell Numerical Methods for Solving 2-D Non-equilibrium Radiation Transport Equations

(*In Chinese*)

FENG Tinggui

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, 100088)

ABSTRACT

Two numerically positive methods, the step characteristic integral method and subcell balance method, for solving radiative transfer equations on quadrilateral grids are presented. Numerical examples shows that the schemes presented are feasible on non-rectangle grid computation, and that the computing results by the schemes presented are comparative to that by the discrete ordinate diamond scheme on rectangle grid.

Key words: Radiative transfer, Subcell balance method, Quadrilateral grids, Step characteristic method

引言

在辐射等效温度升高到一定程度时,辐射能量密度、辐射压对于物质能量密度和物质压可比较或大于时,辐射场会影响物质运动,当然,物质运动也会影响辐射输运。这时,辐射输运计算需要与流体力学计算耦合进行,这就是所谓辐射流体力学计算问题。为了适应与二维流体力学耦合计算,要求辐射输运计算在非矩形网格上进行。本文目的就是研究任意四边形网格的二维辐射输运计算方法。输运数值模拟方法大致可归为三类:即差分、有限元和 Monte Carlo 方法。对于光子频率,一般都用分群方法处理。对于光子方向,差分(部分)有限元用离散纵标方法处理。对于空间积分,若网格为矩形时,用菱形(diamond)格式处理十分简单有效,但该格式不能直接用于非矩形网格。本文对非矩形网格给出两种数值方法:特征线积分方法和子网格平衡方法。并给出数值计算结果进行比较。

1 微分方程

辐射输运问题包括辐射传输以及辐射在传输过程中与物质的相互作用,物质状态与辐射场均随时间和空间变化。辐射场有平衡与非平衡之分;物质在变化比较缓慢时,可能处于局部平衡状态。这里假定辐射场为非平衡,物质处于局部热动平衡状态,电子与离子各自达到平衡,则二维柱坐标(R, Z)辐射输运问题可用多群辐射输运方程和电子、离子热传导方程描述:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_g}{\partial t} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial (RI_g)}{\partial R} + \eta \frac{\partial I_g}{\partial Z} - \frac{1}{R} \frac{\partial (\xi I_g)}{\partial \omega} + \sigma_g I_g = \sigma_g B_g(T_e) \quad (1)$$

$$g = 1, 2, \dots, G$$

$$C_e \frac{\partial T_e(R, Z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\rho R \partial R} \left(RK_e \frac{\partial T_e}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\rho \partial z} \left(K_e \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \sum_{g=1}^G \sigma_g \int_{4\pi} I_g d\Omega - \frac{1}{\rho} \sum_{g=1}^G 4\pi \sigma_g B_g + \omega_c (T_i - T_e) \quad (2)$$

$$C_i \frac{\partial T_i(R, Z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\rho R \partial R} \left(RK_i \frac{\partial T_i}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\rho \partial z} \left(K_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) - \omega_c (T_i - T_e) \quad (3)$$

式中: $\mu = \Omega \cdot e_r = (1 - \eta^2)^{1/2} \cos \omega$; $\xi = \Omega \cdot e_\omega = (1 - \eta^2)^{1/2} \sin \omega$; $\eta = \Omega \cdot e_z = \cos \theta$;

$I_g = \int_{\Delta \nu_g} I(R, Z, \theta, \omega, \nu, t) d\nu$; $B_g(T) = \int_{\Delta \nu_g} B(T, \nu) d\nu$; $B(T, \nu) = \frac{2h}{c^2} \nu^3 (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}$, 方程(1)中

已忽略了光子的散射项。这里, $I_g = I_g(R, Z, \theta, \omega, t)$ 为第 g 群的辐射强度; G 为分群数; $T_e(R, Z, t)$ 和 $T_i(R, Z, t)$ 分别为电子、离子温度, C_e 和 C_i 为它们的比热, ω_c 为它们的能量交换系数; $\Omega = (\theta, \omega)$ 为光子方向; c 为光速; ν 为光子频率; $B(T, \nu)$ 为 Planck 函数。

2 算子分裂迭代方法

方程(1)~(3)为非线性微分方程组,即使数值求解也很困难。主要原因是:

(1)量的多种分配(光子与电子、电子与离子之间的分配;光子、电子与离子各自的空间分配;不同频率、方向的光子之间的分配)相互耦合,各种过程时间尺度相差很大。

(2)在典型模型计算过程中,介质的温度和密度变化范围很大:既有高温区又有低温区;既有高密度区又有稀疏区。而辐射吸收系数又是介质密度、电子温度的大尺度变化的非线性

性函数。就是在相同的温度密度条件下,这些参数的不同频率范围的变化也非常大,给计算带来很大困难。

(3)方程(1)与(2)以及方程(2)与(3)是强耦合关系。

由于上述原因,求解方程(1)~(3),一般都用对时间隐式而不用显式差分格式。因为,显式格式要求的时间步长非常小,使计算机 CPU 时间耗费过多而无法接受。求解隐式非线性方程组一般用迭代方法,我们用算子分裂迭代方法把方程(1)~(3)的隐式方程分解为两步求解:第一步,解方程

$$\frac{\mu}{R} \frac{\partial(RI_g^{(\beta+1/2)})}{\partial R} + \eta \frac{\partial I_g^{(\beta+1/2)}}{\partial Z} - \frac{1}{R} \frac{\partial(\xi I_g^{(\beta+1/2)})}{\partial \omega} + \left(\sigma_g^{(\beta)} + \frac{1}{\Delta t}\right) I_g^{(\beta+1/2)} = \sigma_g^{(\beta)} B_g(T_c^{(\beta+1/2)}) + \frac{1}{c} \frac{I_g^n}{\Delta t} \quad (4)$$

和

$$C_e^{(\beta)} \frac{T_c^{(\beta+1/2)}}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} \sum_g \sigma_g^{(\beta)} 4\pi B_g(T_c^{(\beta+1/2)}) = \frac{1}{\rho} \sum_g \sigma_g^{(\beta)} \int_{4\pi} I_g^{(\beta+1/2)} d\Omega + C_e^{(\beta)} \frac{T_c^n}{\Delta t} + f_e^{(\beta)} \quad (5)$$

$$f_e^{(\beta)} = \frac{\partial}{\rho R \partial R} (RK_e)^{(\beta)} \frac{\partial T_c^{(\beta)}}{\partial R} + \frac{\partial}{\rho \partial Z} K_e^{(\beta)} \frac{\partial T_c^{(\beta)}}{\partial Z} - \omega_c(T_c^{(\beta)} - T_i^{(\beta)})$$

第二步解方程

$$C_e^{(\beta)} \frac{T_c^{(\beta+1)}}{\Delta t} = \frac{\partial}{\rho R \partial R} (RK_e)^{(\beta)} \frac{\partial T_c^{(\beta+1)}}{\partial R} + \frac{\partial}{\rho \partial Z} (K_e)^{(\beta)} \frac{\partial T_c^{(\beta+1)}}{\partial Z} - \omega_c^{(\beta)} (T_c^{(\beta+1)} - T_i^{(\beta+1)}) + q_e^{(\beta+1/2)} \quad (6)$$

和

$$C_i^{(\beta)} \frac{T_i^{(\beta+1)}}{\Delta t} = \frac{\partial}{\rho R \partial R} (RK_i)^{(\beta)} \frac{\partial T_i^{(\beta+1)}}{\partial R} + \frac{\partial}{\rho \partial Z} (K_i)^{(\beta)} \frac{\partial T_i^{(\beta+1)}}{\partial Z} - \omega_c^{(\beta)} (T_i^{(\beta+1)} - T_e^{(\beta+1)}) + C_i^{(\beta)} \frac{T_i^n}{\Delta t} \quad (7)$$

$$q_e^{(\beta+1/2)} = \frac{1}{\rho} \sum_{g=1}^G \left[\sigma_g^{(\beta)} \int_{4\pi} d\Omega I_g^{(\beta+1/2)} \right] - \frac{4\pi}{\rho} \sum_{g=1}^G \sigma_g^{(\beta)} B_g(T_c^{(\beta+1/2)}) + C_e^{(\beta)} \frac{T_c^n}{\Delta t}$$

这里, β 是 t^{n+1} 时刻相应量的算子分裂迭代次数,隐含时间上标 $n+1$ 。第二步解电子、离子热传导方程(6)和(7),它们的求解已有很多有效方法,这里不讨论。下面只讨论第一步,而且令方程(5)中的 $f_e^{(\beta)}=0$,不会影响方法的适用性。

方程(4)和(5)包含非线性发射项 $\sigma_g^{(\beta)} B_g(T_c^{(\beta+1)})$,用迭代方法求解。把 Planck 函数 $B_g(T_c^{(\beta+1)})$ 展开为

$$B_g(T_c^{(\beta+1)}) = B_g(T_c^{(\delta)}) + (\partial B_g(T_c^{(\delta)}) / \partial T_c^{(\delta)}) (T_c^{(\beta+1)} - T_c^{(\delta)})$$

这里,再一次略去时间上标 $n+1$, δ 为非线性迭代次数。从方程(5)求出 $T_c^{(\beta+1)} - T_c^{(\delta)}$,

$$T_c^{(\beta+1)} - T_c^{(\delta)} = \left(\frac{C_e^{(\beta)}}{\Delta t} + 4\pi \sum_{g=1}^G \sigma_g^{(\beta)} (\partial B_g(T_c^{(\delta)}) / \partial T_c^{(\delta)}) \right)^{-1} \left\{ \left(\rho C_e^{(\beta)} \frac{T_c^n - T_c^{(\delta)}}{\Delta t} - 4\pi \sum_{g=1}^G \sigma_g^{(\beta)} B_g(T_c^{(\delta)}) \right) + \sum_{g=1}^G \sigma_g^{(\beta)} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} d\omega d\eta I_g^{(\beta+1)} \right\} \quad (8)$$

代入方程(4)的相应项得

$$\frac{\mu}{R} \frac{\partial(RI_g^{(\beta+1)})}{\partial R} + \eta \frac{\partial I_g^{(\beta+1)}}{\partial Z} - \frac{1}{R} \frac{\partial(\xi I_g^{(\beta+1)})}{\partial \omega} + \left(\sigma_g^{(\beta)} + \frac{1}{c\Delta t}\right) I_g^{(\beta+1)}$$

$$= \zeta^{(\beta)} \chi_g^{(\beta)} \sum_{g=1}^G \sigma_g^{(\beta)} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} d\omega d\eta I_g^{(\beta+1)} + q_g^{(\beta)} \quad (9)$$

这样,问题归结为用迭代方法解方程(8)和(9)。这里

$$q_g^{(\delta)} = \zeta^{(\delta)} \chi_g^{(\delta)} \left(\rho C_c^{(\delta)} \frac{T_c^n - T_c^{(\delta)}}{\Delta t} - 4\pi \sum_{g=1}^G \sigma_g^{(\delta)} B_g(T_c^{(\delta)}) \right) + \sigma_g^{(\delta)} B_g(T_c^{(\delta)}) + \frac{1}{c\Delta t} I_g^n$$

$$\zeta^{(\delta)} = \sum_{g=1}^G \sigma_g^{(\delta)} (\partial B_g(T_c^{(\delta)}) / \partial T_c^{(\delta)}) \left(\frac{\rho C_c^{(\delta)}}{\Delta t} + 4\pi \sum_{g=1}^G \sigma_g^{(\delta)} (\partial B_g(T_c^{(\delta)}) / \partial T_c^{(\delta)}) \right)^{-1}$$

$$\chi_g^{(\delta)} = \sigma_g^{(\delta)} \partial B_g(T_c^{(\delta)}) / \partial T_c^{(\delta)} \left(\sum_{g=1}^G \sigma_g^{(\delta)} (\partial B_g(T_c^{(\delta)}) / \partial T_c^{(\delta)}) \right)^{-1}$$

3 离散纵标方程

由于用柱坐标描述,方程(9)存在对方向的微商项。对此项,我们用离散纵标方法^[1]处理,即以若干离散方向 $\Omega_{lm} = (\mu_{lm}, \eta_l)$ 代表 4π 球面所有方向。方程(9)的离散纵标方程为

$$\frac{\mu_{lm}}{R} \frac{\partial (RI_{glm}^{(\delta+1)})}{\partial R} + \eta_l \frac{\partial I_{glm}^{(\delta+1)}}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\alpha_{lm+1/2} I_{glm+1/2}^{(\delta+1)} - \alpha_{lm-1/2} I_{glm-1/2}^{(\delta+1)}}{\omega_{lm}} +$$

$$\left(\sigma_g^{(\delta)} + \frac{1}{c\Delta t} \right) I_{glm}^{(\delta+1)} = \zeta^{(\delta)} \chi_g^{(\delta)} \sum_{g'=1}^G \sigma_{g'}^{(\delta)} \int_{4\pi} I_{g'l'm}^{(\delta+1)} d\Omega + q_{glm}^{(\delta)} \quad (10)$$

$$\alpha_{lm+1/2} = \alpha_{lm-1/2} - \mu_{lm} \omega_{lm}, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, N_l$$

$$\alpha_{l1/2} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N$$

引入辅助关系式

$$I_{lm} = \frac{1}{2} (I_{lm-1/2} + I_{lm+1/2}) \quad (11)$$

则方程(10)写为

$$\frac{\mu_{lm}}{R} \frac{\partial (RI_{glm}^{(\delta+1)})}{\partial R} + \eta_l \frac{\partial I_{glm}^{(\delta+1)}}{\partial Z} + \hat{\sigma}_g^{(\delta+1)} I_{glm}^{(\delta+1)} = \frac{(\alpha_{lm+1/2} + \alpha_{lm-1/2}) I_{glm-1/2}^{(\delta+1)}}{R\omega_{lm}}$$

$$+ \zeta^{(\delta)} \chi_g^{(\delta)} \sum_{g'=1}^G \sigma_{g'}^{(\delta)} \sum_{l'=1}^N \sum_{m'=1}^{N_{l'}} \omega_{l'm'} I_{g'l'm'}^{(\delta+1)} + q_{glm}^{(\delta)} \quad (12)$$

其中

$$\hat{\sigma}_g^{(\delta+1)} = \sigma_g^{(\delta+1)} + \frac{1}{c\Delta t} + \frac{2\alpha_{lm+1/2}}{R\omega_{lm}}$$

按离散方向的顺序解方程(12)得 $I_{glm}^{(\delta+1)}$, 然后由式(11)外推得 $I_{glm+1/2}^{(\delta+1)}$ 作为下一个离散方向的初值。第一个离散方向初值 $I_{gl1/2}^{(\delta+1)}$, 通过解方程

$$-(1 - \eta_l^2)^{1/2} \frac{\partial I_{gl1/2}^{(\delta+1)}}{\partial R} + \eta_l \frac{\partial I_{gl1/2}^{(\delta+1)}}{\partial Z} + \left(\sigma_g^{(\delta)} + \frac{1}{c\Delta t} \right) I_{gl1/2}^{(\delta+1)}$$

$$= \zeta^{(\delta)} \chi_g^{(\delta)} \sum_{g'=1}^G \sigma_{g'}^{(\delta)} \sum_{l'=1}^N \sum_{m'=1}^{N_{l'}} \omega_{l'm'} I_{g'l'm'}^{(\delta+1)} + q_{gl1/2}^{(\delta)} \quad (13)$$

得到。此时相当于 $\omega = \pi$, 利用轴对称条件, 有 $\frac{\partial I}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\pi} = 0$, 从方程(9)得到方程(13)。

4 特征线积分方法^[2]

为了书写简便,把方程(12)简写为

$$\mu_{lm} \frac{\partial I_{glm}}{\partial R} + \eta_l \frac{\partial I_{glm}}{\partial Z} + \hat{\sigma}_{glm} I_{glm} = S_{glm} \quad (14)$$

这里

$$\hat{\sigma}_{glm} = \sigma_g + \frac{1}{c\Delta t} + \frac{\alpha_{lm+1/2} + \alpha_{lm-1/2}}{R\omega_{lm}}$$

$$S_{glm} = \zeta^{(\delta)} \chi_g^{(\delta)} \sum_{g'=1}^G \sigma_{g'}^{(\delta)} \sum_{l'=1}^N \sum_{m'=1}^{N_l} \omega_{l'm'} I_{g'l'm'}^{(\delta+1)} + \frac{(\alpha_{lm+1/2} + \alpha_{lm-1/2})}{R\omega_{lm}} I_{glm-1/2}^{(\delta+1)} + q_{glm}^{(\delta)}$$

沿着光子方向在 $R-Z$ 平面上的投影, 一个任意四边形网格可以划分为一个梯形网格与若干个三角形网格, 它们都只有一条入射边和一条出射边, 其他边是与光子方向的投影平行的, 如图 1 所示。

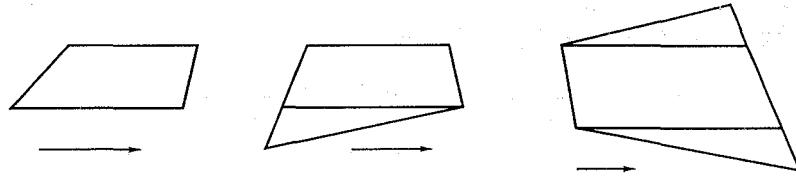


图 1

若把梯形网格分为两个三角形网格, 则方程(14)在一个任意四边形网格上积分, 归结为在若干个这样的三角形网格上积分。

若取三角形网格的平行边为 X 轴, 则方程(14)进一步写为

$$\mu' \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} + \hat{\sigma} I(x, y) = S(x, y) \quad (15)$$

这里已略去下标 glm

$$\mu' = \sqrt{\mu^2 + \eta^2}, \quad \eta' = 0$$

考虑任意三角形 $\triangle OBC$, 如图 2 所示, 其中 OB 边平行于光子方向 Ω_{lm} 在 $R-Z$ 平面的投影, BC 边为出射边, CO 边为入射边。按逆时针方向把坐标系建立在三角形上, 以 O 为原点, 边 OB 为 X 轴。假定 $OB = \Delta x$, $CD = \Delta y$, $OD = \lambda \Delta x$, Δx 的实际自由程为

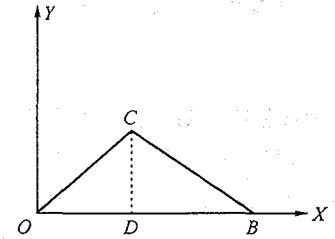


图 2

$$\epsilon = \hat{\sigma} \Delta x / \mu'$$

$\hat{\sigma}$ 在网格内是常数。

由积分方程(15)得

$$I(x, y) = I_{in}(y) \exp[-\hat{\sigma}(x - x_{in}(y))/\mu'] + \int_{x_{in}(y)}^x \frac{dx'}{\mu} s(x', y) \exp[-\hat{\sigma}(x - x')/\mu'] \quad (16)$$

其中: $x_{in}(y) = \lambda \Delta x \frac{y}{\Delta y}$, $x_{out}(y) = \Delta x \left[1 - (1 - \lambda) \frac{y}{\Delta y} \right]$ 。利用方程(16), 对于辐射强度在网格中的特性作不同的假定就得到不同的计算格式。

若简单地假定入射强度沿入射边为常数, 辐射源在网格中为常数: $I_{in}(y) = I_{in}$, $S(x, y) = S_A$, 则辐射强度在网格中的平均值为

$$I_A = \frac{1}{A} \int_0^{\Delta y} dy \int_{x_{in}(y)}^{x_{out}(y)} dx I(x, y) = 2I_{in}M_1(\epsilon) + S_A \frac{\Delta x}{\mu} M_2(\epsilon) \quad (17)$$

出射边的辐射强度平均值为

$$I_{out} = \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} dy I(x_{out}(y), y) = I_{in}M_0(\epsilon) + S_A \frac{\Delta x}{\mu} M_1(\epsilon) \quad (18)$$

这里, A 为三角形面积,

$$M_0(\epsilon) = \frac{1 - \exp(-\epsilon)}{\epsilon}, \quad M_n(\epsilon) = \frac{1 - nM_{n-1}(\epsilon)}{\epsilon}, \quad n > 0$$

由于一个三角形出射边一定是(沿光子方向进入)下一个三角形的人射边,于是,用给定的边界条件,便可沿所有的离散方向,对方程(15)积分。

也可以对梯形网格直接积分而不必分为两个三角形:

$$I_A = 2I_{in} \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \left[1 - \frac{\exp(-\epsilon_1) - \exp(-\epsilon_2)}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \right] + \frac{S_A}{\sigma} \left(1 - \frac{2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \left(1 - \frac{\exp(-\epsilon_1) - \exp(-\epsilon_2)}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \right) \right) \quad (19)$$

$$I_{out} = I_{in} \frac{\exp(-\epsilon_1) - \exp(-\epsilon_2)}{\epsilon_2 - \epsilon_1} + \frac{S_A}{\sigma} \left(1 - \frac{\exp(-\epsilon_1) - \exp(-\epsilon_2)}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \right) \quad (20)$$

这里, ϵ_1 和 ϵ_2 分别为梯形上下底 Δx_1 和 Δx_2 的实际自由程数:

$$\epsilon_1 = \hat{\sigma} \Delta x_1 / \mu', \quad \epsilon_2 = \hat{\sigma} \Delta x_2 / \mu'$$

5 子网格平衡格式^[3]

解方程(12)时,一般都用源迭代方法。对于一次 δ 迭代,方程(12)的源迭代形式为

$$\frac{\mu_{lm}}{R} \frac{\partial (RI_{glm}^{(s+1)})}{\partial R} + \eta_l \frac{\partial I_{glm}^{(s+1)}}{\partial Z} + \hat{\sigma}_g I_{glm}^{(s+1)} = Q_{glm}^{(s)} \quad (21)$$

s 为源迭代次数, $Q_{glm}^{(s)}$ 为式(12)右边项之和。

对于 R - Z 平面上一个任意四边形网格,把四边中点与网格中心点(比如,4个角点坐标平均)连接,划分为4个四边形子网格 j ($j=1, 2, 3, 4$),如图3所示。把方程(21)分别在4个子网格上对体积分,利用 Green 公式,得(为了书写方便,略去群下标 g)

$$\sum_{k=1}^4 I_{jkm} S_{jk} (\mu_{lm} \sin \theta_{jk} + \eta_l \cos \theta_{jk}) + \hat{\sigma} I_{jlm} V_j = Q_{jlm} V_j \quad j = 1, \dots, 4 \quad (22)$$

这里, θ_{jk} 为第 j 个子网格第 k ($k=1, 2, 3, 4$) 边的外法线方向与 Z 轴夹角, I_{jlm} 和 I_{jklm} 分别为第 j 个子网格方向为 Ω_{lm} 的辐射强度和第 j 个子网格第 k 边该方向的辐射强度, V_j 为子网格的旋转体积, S_{jk} 为第 k 边的旋转面积。

对子网格边界量 I_{jklm} ,要附加条件,方程组(22)才是封闭的。我们用如下封闭条件:若第 k 边为网格边界(当然,也是子网格边界),取边界量等于上游子网格的网格量;若第 k 边不是网格边界而只是子网格边界,取边界量等于相邻两个子网格的网格量之平均值。这样,

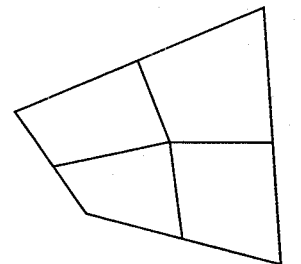


图3

在每个网格上我们就得到一个 4 阶线代数方程组(22)。解之得子网格的辐射强度。

上面计算格式不是全正的:从方程组(22)求解出来的子网格强度可能是负的;另外,由式(11)外推得到的下一个离散方向初值 $I_{g'lm+1/2}^{(\delta+1)}$ 也可能为负值。辐射强度为负值,不是物理解,是不合理的,而且严重时还使计算无法进行下去。这是计算方法所致。我们的补救方法是:当方程组(22)求解出来的子网格强度出现负值时,改变其封闭附加条件,一律取边界量等于上游子网格的网格量,保证方程组(22)的解为正。若由式(11)外推得到的下一个离散方向初值 $I_{g'lm+1/2}^{(\delta+1)}$ 为负时,则用阶梯格式

$$I_{g'lm+1/2}^{(\delta+1)} = I_{g'lm}^{(\delta+1)} \quad (23)$$

代替式(11),这时方程(12)变为

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{lm}}{R} \frac{\partial(RI_{g'lm}^{(\delta+1)})}{\partial R} + \eta_l \frac{\partial I_{g'lm}^{(\delta+1)}}{\partial Z} + \hat{\sigma}_g^{n+1} I_{g'lm}^{(\delta+1)} \\ &= \frac{1}{R} \frac{\alpha_{lm-1/2} I_{g'lm-1/2}^{(\delta+1)}}{\omega_{lm}} + \zeta^{(\delta)} \chi_g^{(\delta)} \sum_{g'=1}^G \sigma_{g'}^{(\delta)} \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^{N_l} \omega_{lm} I_{g'lm}^{(\delta+1)} + q_{g'lm}^{(\delta)} \\ & \hat{\sigma}_g^{n+1} = \sigma_g^{n+1} + \frac{1}{c\Delta t} + \frac{\alpha_{lm+1/2}}{R\omega_{lm}} \end{aligned} \quad (24)$$

(23)和(24)的解 $I_{g'lm}^{(\delta+1)}$ 和 $I_{g'lm+1/2}^{(\delta+1)}$ 为正。

应该指出,这种方法虽然保证解是正的,但解的精度有所降低。

6 数值例子

计算辐射在圆柱体的传输过程。圆柱体为常密度的 Au 介质,半径及高各为 $0.1 \mu\text{m}$ 。在圆柱体下底面 $Z=0$ 处给出辐射等效温度为 $2 \times 10^6 \text{ K}$ 的均匀恒温辐射源。为了论证本文方法的可行性及精度,作下列比较计算:

(1)把圆柱体按线度等分为 32×32 个矩形网格,分别用 Sn 菱形格式和本文两种方法进行计算。

(2)把圆柱体分为 32×32 任意四边形网格,如图 4 所示,用本文两种方法计算。

(3)把网格放大,等分为 4×4 个矩形和非矩形网格,进行如(1)和(2)的同样计算。

计算结果列于表 1 和表 2 及图 5~9。表中列出数值为 $t=0.1 \text{ ns}$ 计算结果(能量单位: $\text{erg}, 1 \text{ erg}=10^{-7} \text{ J}$),其中 E_r 和 E_m 分别为该时刻系统的辐射能和物质内能, F_0^-, F_0^+, F_r^+ 分别为从圆柱体的下底面、上底面和侧面流出去的辐射能。从表中列出的第 1~3 行数值看,对于矩形网格,两种方法的计算结果与 Sn 菱形格式计算的相当吻合。我们知道,Sn 菱形格式是一种精度高、费用低、广泛应用的方法,但不能直接用于非矩形网格。第 4 和第 5 行是本文方法对于非矩形网格的计算结果,与第 2 和第 3 行矩形网格结果比较,略有差别,属于网格形状的影响。若把网格放大,分为 4×4 个网格,计算结果列于表 2,此时,特征线积分方法守恒误差加大,这是由于非守恒型方程(14)所致。

表 1 三个方法两种网格计算结果比较(32×32 网格)

方法	E_r	E_m	F_0^-	F_z^+	F_R	cpu/min
Sn 菱形格式(矩形网格)	0.988E-4	1.54	-8.39	3.80	14.8	37
子网格平衡(矩形网格)	0.986E-4	1.54	-8.33	3.81	14.8	129
特征线积分(矩形网格)	0.987E-4	1.54	-8.29	3.85	14.9	170
子网格平衡(非矩形网格)	0.980E-4	1.54	-8.31	3.74	14.7	153
特征线积分(非矩形网格)	0.971E-4	1.53	-8.21	3.69	14.6	173

表 2 三个方法两种网格计算结果比较(4×4 网格)

方法	E_r	E_m	F_0^-	F_z^+	F_R	守恒误差
Sn 菱形格式(矩形网格)	0.993E-4	1.55	-8.32	3.55	15.1	0.28E-4
子网格平衡(矩形网格)	0.941E-4	1.53	-7.12	4.33	15.3	0.72E-2
子网格平衡(非矩形网格)	0.939E-4	1.53	-7.05	4.26	15.4	0.98E-2
特征线积分(矩形网格)	0.994E-4	1.57	-7.53	4.58	16.0	-0.42E-1
特征线积分(非矩形网格)	0.986E-4	1.57	-7.46	4.51	16.0	-0.35E-1

图 5~7 分别为 Sn 菱形格式矩形、子网格平衡矩形、子网格平衡非矩形计算到 $t=0.1$ ns 时刻的电子温度空间分布图,三图表明,子网格平衡方法计算的细致结果与 Sn 菱形格式也十分一致。图 8 和 9 为特征线矩形、特征线非矩形计算的相应分布图,与菱形格式结果差别略大。

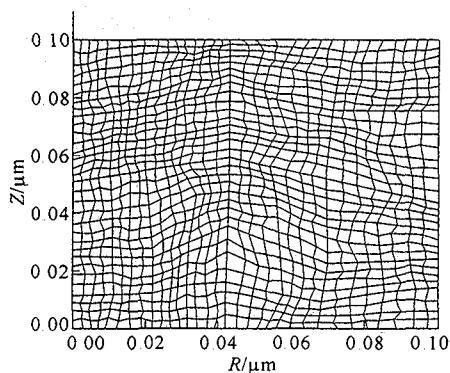


图 4 32×32 非矩形网格

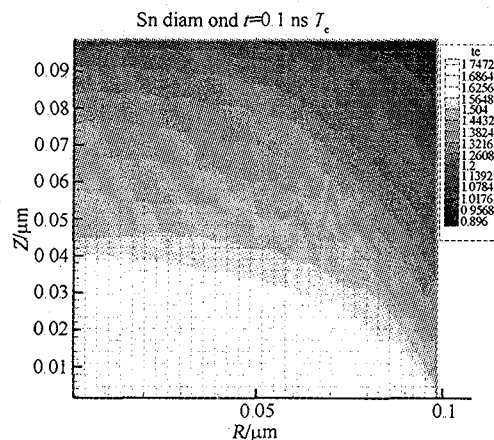


图 5 电子温度空间分布
Sn 菱形格式计算,矩形网格

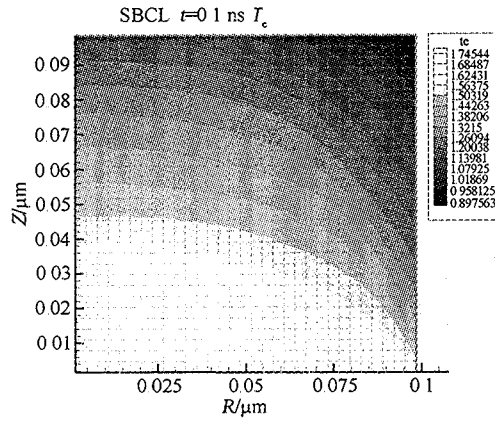


图6 电子温度空间分布
子网格平衡方法,矩形网格

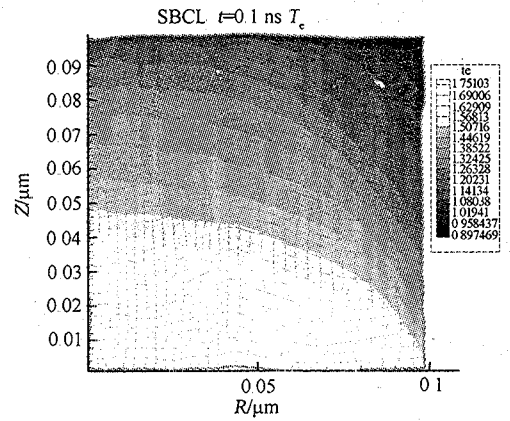


图7 电子温度空间分布
子网格平衡方法,任意四边形网格

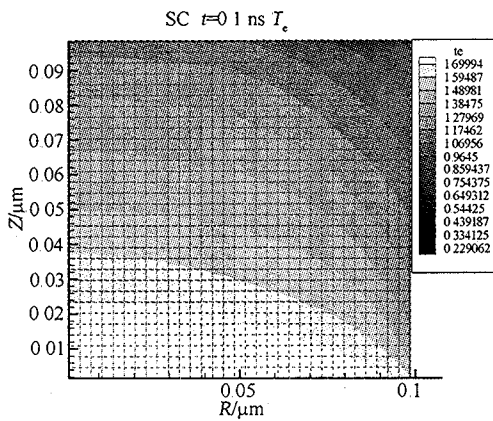


图8 电子温度空间分布
特征线积分方法,矩形网格

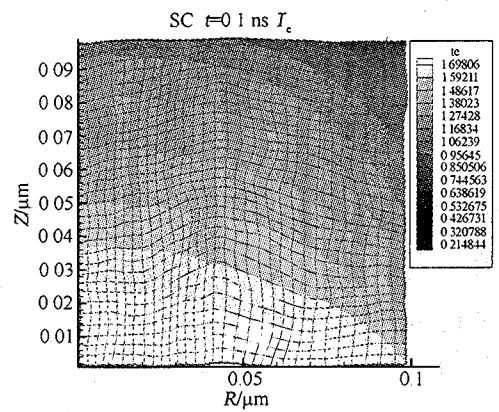


图9 电子温度空间分布
特征线积分方法,任意四边形网格

7 结论

(1)在处理矩形网格时,本文两种方法与广泛应用的 Sn 菱形格式结果一致,说明本文方法是可行的。(2)本文方法能用于任意四边形网格,可以与流体耦合计算。(3)从程序简单、节省机时、计算精度考虑,子网格平衡方法优于步特征线积分方法。

参考文献

- 1 Lewis E, Miller Jr W F. Computational methods of neutron transport. La Grange Park: Amermos Nuclear Societ, Inc. , 1993
- 2 Miller D J, Mathews K A, Brennan C R. Split cell discrete ordinates transport on an unstructured grid of triangular cells. Transport Theory and Stat. Phys. , 1996, 25(7): 833~867
- 3 Adams M L. Subcell balance methods for radiative transfer on arbitrary grids. Transport Theory and Statis. Phys. , 1997, 26: 385~431