

**PREMIER MINISTRE  
COMMISSARIAT A  
L'ÉNERGIE ATOMIQUE**

# **RALENTISSEMENT DE PARTICULES TEST DANS UN PLASMA**

par

**P. BELAYCHE , P. CHAVY , M. DUPOUX  
et J. SALMON**

**Rapport C.E.A. n°2048**

**1961**

CEA 2048 - BELAYCHE P., CHAVY P., DUPOUX M., SALMON J.

**Ralentissement de particules test dans un plasma (1961).**

**Sommaire.** — Résolution numérique de l'équation de Fokker-Planck appliquée au ralentissement de tritons dans un plasma de deutérium.

Après avoir rappelé les équations, les conditions aux limites, l'accent est mis sur les artifices numériques utilisés pour traiter le problème sur une calculatrice à grande vitesse.

Les résultats numériques obtenus sont ensuite analysés et si possible expliqués mathématiquement. En particulier ils peuvent se rattacher à ceux obtenus par application directe de la formule de Spitzer.

---

CEA 2048 - BELAYCHE P., CHAVY P., DUPOUX M., SALMON J.

**Slowing down of test particles in a plasma (1961).**

**Summary.** — Numerical solution of the Fokker-Planck equation applied to the slowing down of tritons in a deuterium plasma.

After the equations and the boundary conditions have been written, some attention is paid to the numerical tricks used to run the problem on a high speed electronic computer.

The numerical results thus obtained are then analyzed and, as far as possible, mathematically explained.

- Rapport C.E.A. n° 2048 -

RALENTISSEMENT DE PARTICULES-TEST DANS UN PLASMA

par

P. BELAYCHE, P. CHAVY, M. DUPOUX et J. SALMON

# Ralentissement de particules test dans un plasma

par P. BELAYCHE, P. CHAVY, M. DUPOUX, J. SALMON,  
C. E. A.

Résolution numérique de l'équation de Fokker-Planck appliquée au ralentissement de tritons dans un plasma de deutérium.

Après rappel des équations et des conditions aux limites, l'accent est mis sur les artifices numériques utilisés pour traiter le problème sur une calculatrice numérique à grande vitesse.

Les résultats numériques obtenus sont analysés et si possible expliqués mathématiquement. Ils peuvent, en particulier, se rattacher à ceux que fournit l'application directe de la formule de Spitzer.

A numerical solution of the Fokker-Planck equation applied to the slowing down of tritons in a deuterium plasma.

After the equations and the boundary conditions have been written, some attention is paid to the numerical tricks used to run the problem on a high speed electronic computer.

The numerical results thus obtained are then analyzed and, as far as possible, mathematically explained. They can be compared to the results given by direct application of the Spitzer formula.

Numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung, angewandt auf die Bremsung von Tritonen in einem Deuteriumplasma.

Nach Vergegenwärtigung der Gleichungen und der Randbedingungen wird das Hauptgewicht auf die Erörterung der numerischen Kniffe gelegt, die angewandt wurden, um die Rechnung auf einer sehr schnellen Rechenanlage durchzuführen.

Die so erhaltenen numerischen Ergebnisse werden analysiert und, soweit möglich, diskutiert. Sie können mit denjenigen in Zusammenhang gebracht werden, die die unmittelbare Anwendung der Spitzerschen Formel liefert.

Численное решение уравнения Фоккер-Планка в случае замедления тритонов в плазме дейтерий.

Авторы напоминают уравнения и предельные условия задачи, настаивая на численные приёмы её решения на быстроходной счетной машине.

Авторы рассматривают полученные результаты и, по мере возможности, их математически объясняют. Можно в частности их отнести к результатам непосредственного применения формулы Спитцера.

**A) Position du problème.**

**A-1. EQUATION DE RALENTISSEMENT.**

On se propose d'étudier le ralentissement d'une particule envoyée à haute énergie dans un plasma. Les particules-tests seront des tritons.

On rendra compte de ce ralentissement par application de l'Opérateur de Fokker-Planck à la fonction de distribution des particules-tests.

On aura donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = O_e(f) + O_i(f)$$

où  $\left\{ \begin{array}{l} c \text{ indice électrons} \\ i \quad \quad \quad \text{ions} \\ O \text{ opérateur de choc.} \end{array} \right\}$  du plasma.

**A-2. NOTATIONS.**

|                   |                                      |                            |
|-------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| $m$ .....         | Masse                                | } des particules $g$ test. |
| $W$ .....         | Vitesse                              |                            |
| $f$ .....         | Fonction de distribution             |                            |
| $E$ .....         | Energie                              |                            |
| $\theta_0$ .....  | Température initiale                 |                            |
| $\theta(t)$ ..... | Température à instant donné          |                            |
| $n_e$ .....       | Nombre d'électrons par $\text{cm}^3$ |                            |
| $m_e$ .....       | Masse des électrons                  |                            |
| $n_{i1}$ .....    | Nombre d'ions par $\text{cm}^3$      |                            |
| $m_{i1}$ .....    | Masse de l'ion                       |                            |
| $T$ .....         | Température du plasma                |                            |
| $t$ .....         | Temps                                |                            |
| $\tau$ .....      | Temps réduit (cf. ci-dessous)        |                            |

$$\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

— On pose

$$W_0 = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

$x = W/W_0$  sera la nouvelle variable appelée « vitesse réduite ».

$g = fW_0^3$  sera la nouvelle fonction appelée « fonction de distribution réduite ».

$$s_e = \sqrt{\frac{m_e}{m}} \quad s_e^2 \text{ et } s_i^2 \text{ ont la signification de « masse réduite ».}$$

$$s_i = \sqrt{\frac{m_i}{m}} \quad \text{L'introduction de ces 2 grandeurs permettra de simplifier l'écriture.}$$

— Enfin, suivant les notations classiques, on pose :

$$\Lambda_p = \frac{3}{2 Z Z_p e^3} \left( \frac{K^3 T^3}{\pi n e} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{1 + s_p^2 \frac{\theta}{T}}{1 + s_p^2} \right)$$

$$\Gamma_p = 4\pi \left( \frac{Z Z_p e^2}{m} \right)^2 \text{ Log } \Lambda_p$$

$$b_p = \frac{n_p \Gamma_p}{W_0^3}$$

$\left\{ \begin{array}{l} Z \text{ nombre de charge particule-test} \\ p \text{ indice désignant la particule cible} \\ K \text{ constante de Boltzman} \\ e \text{ charge de l'électron.} \end{array} \right.$

$$\tau = t.b_e$$

### A-3. NOUVELLE FORME DE L'ÉQUATION DE RALENTISSEMENT.

Avec ces notations l'équation (A1) prend la forme <sup>1</sup> :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = (A_e + A_i) g$$

avec

$$A_e = b_e \left\{ \frac{\varphi(xs_e) - xs_e \varphi'(xs_e)}{2s_e^2 x^3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right.$$

$$+ \left[ \frac{\varphi(xs_e) - xs_e \varphi'(xs_e)}{s_e^2 x^2} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} \right) + \frac{s_e \varphi'(xs_e)}{x} \right] \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\left. + 2s_e \varphi'(xs_e) \right\}$$

<sup>1</sup> BRIN, DELCROIX, SALMON, *Journ. Phys. Rad.*, 20, mai 1959, p. 529-534.

$A_i$  s'obtient simplement en remplaçant partout (y compris dans l'argument des fonctions  $\varphi$  et  $\varphi'$ )  $s_e$  par  $s_i$  et  $b_e$  par  $b_i$ .

*Remarque :*

On peut mettre l'opérateur  $A_p$  sous une forme plus ramassée qui sera utile pour certains calculs littéraux.

$$A_p(g) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{b_p}{s_p^2} \cdot \frac{\varphi(x.s_p) - x.s_p \cdot \varphi'(x.s_p)}{2.x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} + 2.xg \right) \right]$$

Pour simplifier l'écriture on adoptera quelquefois les notations :

$$A_p = b_p \left\{ \alpha_p \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_p \frac{\partial}{\partial x} + 2 \gamma_p \right\}$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \alpha_p = \frac{\varphi(x.s_p) - x.s_p \varphi'(x.s_p)}{2.s_p^2 \cdot x^3} \\ \beta_p = \frac{\varphi - x.s_p \cdot \varphi'}{s_p^2 \cdot x^2} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} \right) + \frac{s_p \cdot \varphi'}{x} \\ \gamma_p = s_p \cdot \varphi' \end{array} \right.$$

#### A-4. CONDITIONS PHYSIQUES D'APPLICATION DE L'ÉQUATION DE RALENTISSEMENT.

*Exemple :*

La particule-test est un triton d'énergie initiale égale à 2,05 Mev dont l'équivalence en température (donnée par  $E_0 = 3/2 K \theta_0$ .) est  $\theta_0 = 1,6 \cdot 10^{10}$  degrés K. Ce triton est ralenti par un plasma de deutérium. Concentration du deutérium :  $4,2 \cdot 10^{22}$ , température du plasma  $10^8$  K.

Les calculs poursuivis en variables réduites sont en fait valables pour toute une gamme de conditions.

#### A-5. OBJET DU CALCUL.

Il s'agit :

1° de trouver les formes successives de la fonction de distribution des vitesses aux différents stades du ralentissement<sup>2</sup>.

2° d'étudier l'évolution de la température des particules-tests.

<sup>2</sup> Cf. calcul analogue, par H. C. KRANZER (Phys. Flu., 4, 2, 1961, p. 214-220).

**B) Résolution numérique.**

**B-1. PROBLÈMES A RÉSOUDRE.**

1° Obtenir la *fonction de distribution*  $g(x)$  à différents instants  $t$  compte tenu des conditions initiales et aux limites indiquées en B2.

2° *Calculer la température.*

$$\text{On a } E = \frac{3}{2} K \Theta = \frac{1}{2} m \langle W^2 \rangle$$

$$\text{d'où } \Theta = \frac{m}{3K} W^2, \langle x^2 \rangle = \frac{2}{3} T \langle x^2 \rangle$$

$$\text{avec } \langle x^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty x^4 \cdot g(x, t) dx}{\int_0^\infty x^2 \cdot g(x, t) dx}$$

le symbole  $\langle \rangle$  signifie valeur moyenne.

Il s'agit donc de former à différents stades du ralentissement les deux intégrales ci-dessus.

*Remarque :*

$$\text{Interprétation de l'intégrale } \int_0^\infty x^2 g(x, t) dx$$

Si on calcule le nombre total de particules-test ayant tous les modules de vitesse avec toutes les orientations possibles on a :

$$S = 4 \pi \int_0^\infty x^2 g dx$$

puisqu'il n'y a pas d'orientation préférentielle des vecteurs vitesse, l'intégration angulaire a pour résultat  $4 \pi$ . Or, ce nombre de particules doit rester constant au cours de l'évolution. On a pris cette constante égale à 1.

On doit donc avoir (et un calcul annexe en D2 montre que cette condition n'est pas une nouvelle condition mais est incluse dans l'équation (A3) :

$$S = 4\pi \int_0^\infty x^2 g(x, t) dx = 1$$



Nous formerons toutefois cette expression à différents instants, ce qui nous fournira un test de l'exactitude des calculs.

*En conclusion* : Il apparaît que le programme doit être formé de 2 parties différentes :

— une partie calculant l'évolution de la fonction  $g(x)$  point par point au cours du temps.

— un sous-programme calculant un certain nombre d'intégrales

attachées à la fonction  $g(x)$ , intégrales qui ont toutes la forme  $\int_0^{\infty} g(x) f(x) dx$

$f(x)$  étant une fonction bien connue qui vaut :

.  $x^2$  pour le test de normation

.  $x^4$  pour le calcul de la température

## B-2. CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES.

— *Conditions initiales.*

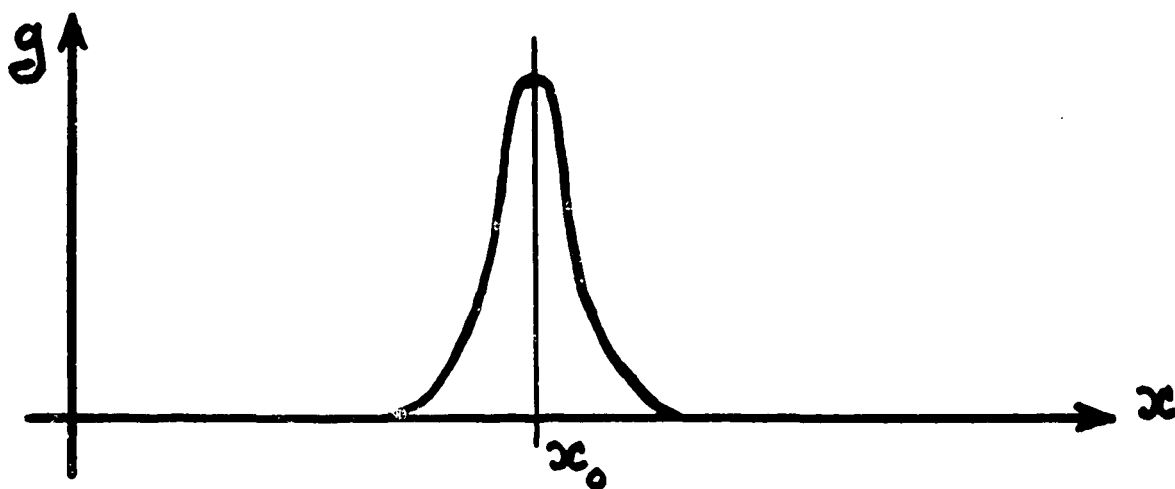
A l'instant initial, toutes les particules-test sont supposées avoir la même énergie. Une fonction de Dirac représente donc la distribution.

En pratique, afin d'éviter d'avoir à l'instant initial des discontinuités difficiles à traiter numériquement, on remplacera la fonction de Dirac par une gaussienne très étroite, dont le maximum correspond à l'énergie initiale. L'écart-type de cette nouvelle répartition est tel que, à 1 % près au plus, la totalité des particules ait une vitesse égale à la vitesse  $x_0$  à 0,5 % près.

— *Les conditions aux limites* imposées sont les suivantes :

1° Le nombre des particules ayant une très grande vitesse est nul, donc  $g$  est nul dès que  $x$  devient grand par rapport à la vitesse moyenne des particules.

2° Il y a symétrie par rapport à l'axe  $x = 0$ . (Ce qui signifie physiquement que seul nous intéresse le module des vitesses, non leur orientation.)



B-3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DE RÉOLUTION.

$$(A3) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = (b_e \alpha_e(x) + b_i \alpha_i(x)) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + (b_e \beta_e(x) + b_i \beta_i(x)) \frac{\partial g}{\partial x} + 2 (b_e \gamma_e(x) + b_i \gamma_i(x)) g$$

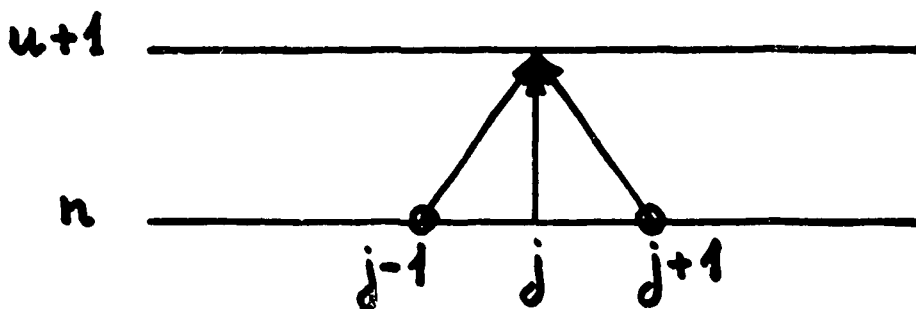
B-3-1. PRINCIPE DE LA MÉTHODE.

En toute rigueur cette équation n'est pas explicite puisque les termes  $b_e$ ,  $b_i$  sont fonction de la température qui, elle-même, prend des valeurs différentes, aux différents instants  $t$  du ralentissement. Toutefois, cette variation est faible relativement à la variation de la fonction de distribution.

Nous chercherons à résoudre cette équation par la méthode aux différences finies en écrivant :

$$\frac{g_j^{u+1} - g_j^u}{\Delta t} = \sum_{e,i} b_e(t) \alpha_e(x) \frac{g_{j+1}^u + g_{j-1}^u - 2g_j^u}{\delta x^2} + b_e(t) \beta_e(x) \frac{g_{j+1}^u - g_{j-1}^u}{2\delta x} + 2 b_e(t) \gamma_e(x) g_j^u$$

Schéma du type « explicite »  $\left\{ \begin{array}{l} \text{L'indice supérieur est indice de} \\ \text{TEMPS.} \\ \text{L'indice inférieur est indice} \\ \text{SPATIAL.} \end{array} \right.$



De plus, tenant compte de la remarque ci-dessus (faibles variations des  $b_e$ ,  $b_i$ ), nous ne calculerons pas les coefficients  $b_e$  et  $b_i$  à chaque accroissement temporel mais seulement aux valeurs du temps, plus espacées, où seront calculées les intégrales de normation et température.

## B-3-2. CHANGEMENT DE FONCTION.

Nous avons déjà vu que pour éviter les discontinuités à l'origine, la distribution initiale en fonction de Dirac avait été remplacée par une gaussienne décalée très étroite. Cette fonction s'écrit :

$$g(x, t = 0) = 5,8 \cdot 10^{-4} \left\{ \exp \left[ -10(x - 15,4)^2 \right] + \exp \left[ -10(x + 15,4)^2 \right] \right\}$$

On peut écrire  $g$  sous la forme :

$$g(x, 0) = g(0, 0) \cdot \exp(-10(x - 15,4)^2) \left[ 1 + \exp(-40 \cdot 15,4 \cdot x) \right]$$

Le premier terme du crochet est de beaucoup le plus important, donc  $g$  est une gaussienne décalée, à une correction près.

On pose  $G = \text{Log } g$ .

On observe qu'avec cette nouvelle fonction il est possible d'obtenir des points représentatifs pour toutes les valeurs de  $x$ . Avec la fonction  $g$  par contre, on remarque que, dès que  $x$  s'écarte du maximum, la fonction  $g$  devient négligeable. Ainsi si  $x = 10$  :

$$g = 5,8 \cdot 10^{-4} \exp(-292) \sim 5,8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-127}.$$

Enfin on peut observer que, par passage aux logarithmes, une gaussienne devient une parabole. Or le schéma aux différences finies adopté est un schéma de type parabolique. Dès lors, le schéma rendra bien compte de la courbe, même si, au cours du temps, la parabole initiale se déforme sensiblement.

Avec le changement de fonction, l'équation (A3) est modifiée et s'écrit :

$$(B3) \quad \dots \frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{e,t} \left\{ b_e \alpha_e \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 \right] + b_e \beta_e \frac{\partial G}{\partial x} + 2b_e \gamma_e \right\}$$

Nous calculerons les dérivées spatiales par la méthode aux différences finies indiquée plus haut.

## B-3-3. Résolution pratique du problème des limites.

1° *Pour les grandes vitesses.* — En toute rigueur il faut écrire la nullité de  $g$  à l'infini, c'est-à-dire écrire que  $G \rightarrow -\infty$  pour  $x \rightarrow +\infty$ .

Or le champ de la variable  $x$  est pris fini : soit  $x_M$  le plus grand  $x$ .

En ce point on écrira que  $G$  (qui se réduit aux instants initial et final à un polynôme de degré 2) se comporte comme un polynôme

de degré  $> 2$ , au point  $x_M$ . Ceci permettra de calculer les dérivées spatiales au point  $x_M$  en fonction des dérivées des points précédents.

2° *Pour l'origine spatiale.* — Dans l'équation A3 le coefficient de  $\frac{\partial g}{\partial x}$  :  $\beta_p$  a un pôle en  $\frac{1}{x}$ .

Mais la condition de symétrie autour de l'axe  $x = 0$  implique que  $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0 = 0$ .

On a donc  $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0 \approx x \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)_0$

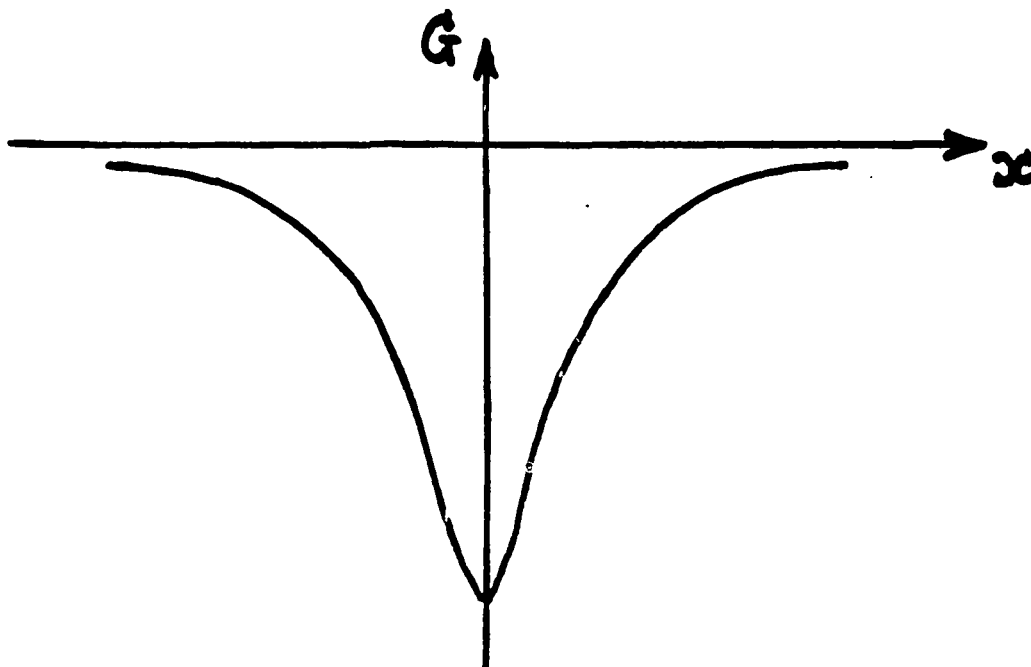
et le produit  $\beta_p \frac{\partial g}{\partial x}$  a une forme parfaitement déterminée.

— Choix des pas.

On a vu plus haut la forme de la fonction  $g$  à l'origine des temps. Avec le changement de fonction effectué on a :

$$G(x,0) = G(0,0) - 10(x - 15,4)^2 + \text{Log} \left[ 1 + \exp(-616 \cdot x) \right]$$

$G(x,0)$  est donc représentée par une parabole, sauf au court voisinage de l'origine, où intervient le terme de correction en Log.



Quelle est la largeur de ce voisinage de l'origine, sensible à l'action du terme en Logarithme ? On voit qu'elle est telle que  $600 \Delta x \sim 1$ .

Il convient donc de prendre un pas spatial très fin au voisinage de l'origine :  $\Delta x \sim 10^{-3}$ .

En dehors de cette zone, le pas sur  $x$  peut prendre des valeurs beaucoup plus grandes.

Nous prenons donc :

- à l'origine, un pas très fin ( $\sim 10^{-3}$ ),
- croissant géométriquement jusqu'à une valeur  $\Delta x_2$  ( $\sim 1/4$ ),
- arithmétique au-delà.

Il y a « effet loupe » à l'origine.

#### B-3-4. Choix du pas temporel.

Le critère de stabilité, dans le cas des schémas explicites, lie le choix du pas temporel à celui du pas spatial.

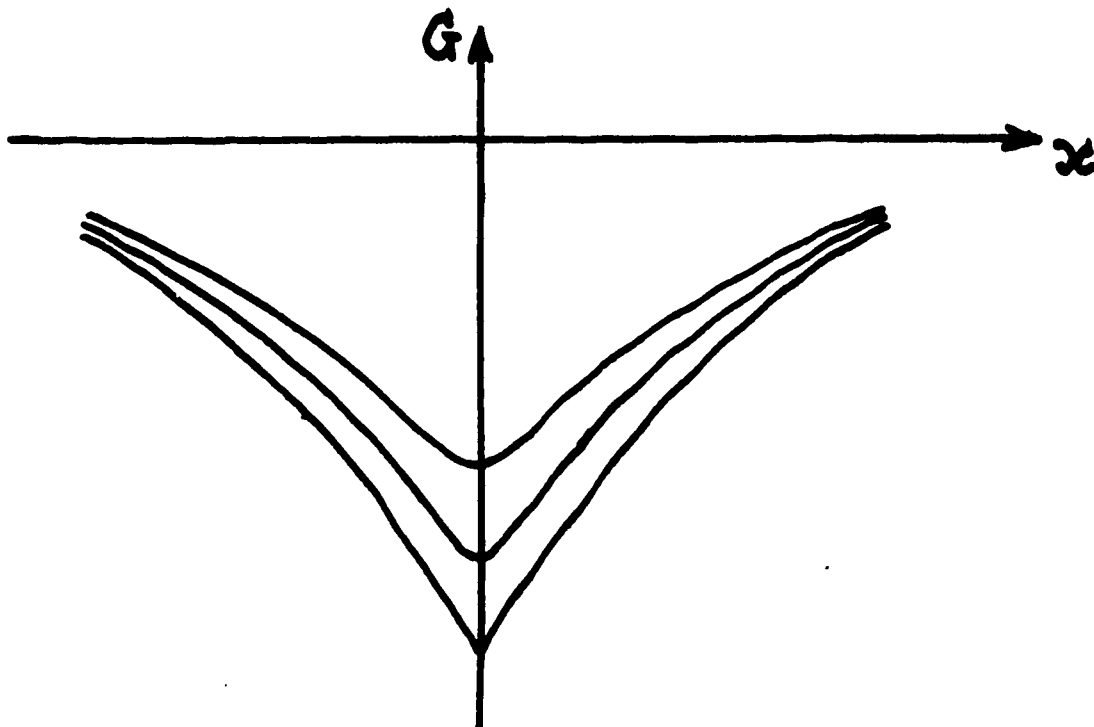
Le pas spatial le plus fin est celui de l'origine. Le coefficient  $\alpha$ , d'autre part, sa valeur maximum à l'origine. C'est donc là que le critère de stabilité sera le plus rigoureux.

Ainsi on a pris :

$$\Delta t = 4 \cdot 10^{-7}$$

Il est évident que le nombre de pas à prendre serait rédhibitoire si l'on devait en rester là.

Toutefois, il apparaît que la zone proche de l'origine croît relativement plus vite que les zones voisines : la zone de courbure inversée s'étend assez vite. Au fur et à mesure qu'elle s'étend, on multiplie le pas spatial origine par un certain facteur. On peut, tout en respectant le critère de stabilité (qui lie  $\Delta t$  à  $\Delta x^2$ ), multiplier  $\Delta t$  par le carré de ce facteur.



Ce changement de pas se fait de façon automatique grâce à un test approprié.

On a pu ainsi, assez rapidement, multiplier le pas temporel initial par 30 000 ce qui l'amène à des valeurs acceptables. Cette multiplication est obtenue après 15 changements de pas origine.

### C) Résultats.

#### C-1. CONTRÔLE DES RÉSULTATS.

On a pu contrôler les résultats.

1° En vérifiant que le test de normation est respecté (on sait que l'intégrale)

$$S = 4 \pi \int_0^{\infty} x^2 g dx$$

doit rester constante et égale à 1). Ce test a permis, efficacement, de déceler certaines erreurs. Toutes rectifications faites, S est restée constante au cours des calculs avec un écart maximum de 3 %.

2° On doit vérifier :

- que la courbe de distribution finale est gaussienne;
- en particulier que la température finale est bien la température du milieu ralentisseur.

Ces résultats ont été obtenus :

Notamment la température finale a été atteinte avec une précision relative de  $5 \cdot 10^{-4}$ .

#### C-2. FORME DES COURBES OBTENUES.

— *Courbes de distribution.*

On a porté en abscisse la « vitesse réduite » :  $x$ . En ordonnée, on a porté  $G$  : logarithme de la fonction, de distribution  $g$ . On sait en effet que cette fonction  $g$  est une gaussienne aux instants initial et final; son logarithme  $G$  est une parabole. Même avec ce changement, la fonction  $G$  varie trop vite pour que toutes les valeurs prises (pour tout  $x$  du domaine de variation considéré) puissent être reproduites sur papier ordinaire. On a donc tracé  $G$  sur papier logarithmique. (Les valeurs indiquées dans la colonne des ordonnées correspondent à  $g$  (nombres encadrés) et à  $G$  (nombres entre parenthèses).)

Pour certaines valeurs choisies du « temps réduit »  $\tau$ , on trace la courbe  $G$  correspondante. On obtient ainsi un réseau de courbes.

Il faut noter que la partie significative de la fonction G ainsi représentée : c'est-à-dire celle pour laquelle le nombre de particules n'est pas ridiculement petit, est uniquement la zone située au voisinage du pic.

On observe que :

Un 2° pic apparaît au centre avant même que le 1° pic n'ait été complètement ralenti.

— *Evolution de la température.*

Le ralentissement par les électrons seuls est donné par la formule de Spitzer<sup>3</sup> :

$$\frac{d\theta}{\theta - T} = - \frac{dt}{teq}$$

on montre (annexe D<sub>3</sub>) que la formule de Spitzer est applicable, quelle que soit la fonction de distribution (sous réserve qu'elle décroisse plus vite que  $\frac{1}{x^2}$  à l'infini), si l'argument des fonctions

$\varphi$  et  $\varphi'$  est petit devant 1, c'est-à-dire si  $xse \ll 1$ . En portant en ordonnée Log ( $\theta - T$ ) et le temps réduit en abscisse, la formule de Spitzer se représente par une droite (droite C<sub>1</sub>). La courbe obtenue par le calcul d'abord confondue avec la droite C<sub>1</sub> puis s'infléchit rapidement dès le ralentissement assez avancé (C<sub>3</sub>).

Ceci s'explique : l'argument des fonctions  $\varphi$  et  $\varphi'$  :  $ksi$  est  $\sim > 1$  : l'approximation faite au paragraphe D<sub>3</sub> cesse d'être valable.

## D) Calculs annexes.

### D-1. VALEUR ASYMPTOTIQUE DE LA FONCTION $g$ .

L'équation (A3), on l'a vu, peut s'écrire :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{e,i} \left( \frac{b_e}{s_e^2} \frac{\varphi - x s_e \varphi'}{2x} \right) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial x} + 2 x g \right) \right\}$$

On voit que si  $g = \mathcal{G} \exp(-x^2)$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + 2 x g = 0$$

donc  $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$ .

<sup>3</sup> L. SPITZER, *Physics of fully ionised gases* (Inter. Sc. Publ., 1956), p. 80.

La gaussienne est donc bien solution asymptotique puisque, une fois atteinte la forme gaussienne, l'accroissement devient nul.

D-2. CONDITION DE NORMATION.

$$\text{Formons } \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} x^2 g dx = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} S$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial S}{\partial t} &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{\rho_e + \rho_i}{2x} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial x} + 2 x g \right) \right\} dx \\ &= \left[ \left( \frac{\rho_e + \rho_i}{2x} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial x} + 2 x g \right) \right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

avec notation

$$Q_p = \frac{b_p}{s_p^2} (\varphi - x s_p \varphi')$$

— Le crochet est nul pour  $x = 0$

$$\text{en effet } \frac{Q_p}{2x} \sim b s_p \frac{x^2}{3} \rightarrow 0.$$

— Pour  $x \rightarrow \infty$   $Q_p/x \rightarrow 0$

en effet  $\varphi \rightarrow \text{constante}$  et  $\varphi/x \rightarrow 0$

$$\varphi' \rightarrow 0$$

$$\text{donc } \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

La grandeur S doit se conserver au cours de l'évolution.

D-3. LOI DES TEMPÉRATURES.

On sait que l'on a (voir B1) :

$$\theta = \frac{2}{3} T \frac{\int_0^{\infty} x^4 g dx}{\int_0^{\infty} x^2 g dx} = \frac{8\pi}{3} T \int_0^{\infty} x^4 g dx$$



— Formons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty x^4 g dx = \left[ x^{\frac{(\rho_e + \rho_i)}{2}} (g' + 2 xg) \right]_0^\infty - \int_0^\infty (\rho_e + \rho_i) (g' + 2 xg) dx$$

Le crochet est nul à condition que  $g' + 2 xg$  décroisse plus vite

que  $\frac{1}{x}$  à l'infini, c'est-à-dire

|                                    |
|------------------------------------|
| $g \sim \frac{1}{x^n} \quad n > 2$ |
|------------------------------------|

Il reste :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty x^4 g dx = - \int_0^\infty (\rho_e + \rho_i) (g' + 2 xg) dx$$

Intégrons par parties l'intégrale partielle :

$$\gamma = \int_0^\infty (\rho_e + \rho_i) g dx$$

On a :

$$\gamma = \left[ (\rho_e + \rho_i) g \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial (\rho_e + \rho_i)}{\partial x} g dx$$

Le crochet est nul.

Il reste :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty x^4 g dx = - \int_0^\infty \sum_{e,i} (2 x \rho_e - \rho'_e) g dx$$

soit :

|  |
|--|
| $\frac{\partial}{\partial t} \int x^4 g dx = - \int_0^\infty \sum_{e,i} \left\{ 2 \frac{x b_e}{s_e^2} \left[ \rho_e - x s_e (1 + s_e^2) \rho'_e \right] \right\} g dx$ |
|--|

Considérons l'action des seuls électrons.

Dans ce cas,  $s_e$  est très petit  $\sim 1,4 \cdot 10^{-2}$ ;  $x \cdot s_e$  prend la valeur 0,4 pour le sommet du pic à l'instant origine.

On peut donc légitimement former un développement limité des fonctions  $\varphi(x s_e)$  et  $\varphi'(x, s_e)$ .

Il vient :

$$2x(\varphi_e - x s_e(1 + s_e^2)\varphi') = \frac{4s_e^3}{\sqrt{\pi}} \left[ -x^2 + x^4 \left( \frac{2}{3} + s_e^2 \right) - x^6 s_e^2 \left( \frac{2}{5} + \frac{s_e^2}{2} \right) + \dots \right]$$

On peut négliger  $s_e^2$  devant  $2/3$  et même  $x^6 s_e^2$  devant  $x^4$  tant que  $x^2 s_e^2$  est petit.

L'erreur la plus grande à l'instant initial sera de l'ordre de 15 %.

Dans ces conditions, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty x^4 g dx = - \int_0^\infty \frac{4 b_e s_e}{\sqrt{\pi}} \left( -x^2 g + \frac{2}{3} x^4 g \right) dx \dots$$

$$- \int_0^\infty \frac{2 x b_i}{s_i^2} \left[ \varphi_i - x s_i (1 + s_i^2) \varphi_i \right] g dx$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{2T}{3} \left\{ \frac{4 b_e s_e}{\sqrt{\pi}} \left[ -1 + \frac{\theta}{T} \right] + 4 \pi \int_0^\infty \frac{2 x b_i}{s_i^2} \left[ \varphi_i - x s_i (1 + s_i^2) \varphi_i' \right] g dx \right.$$

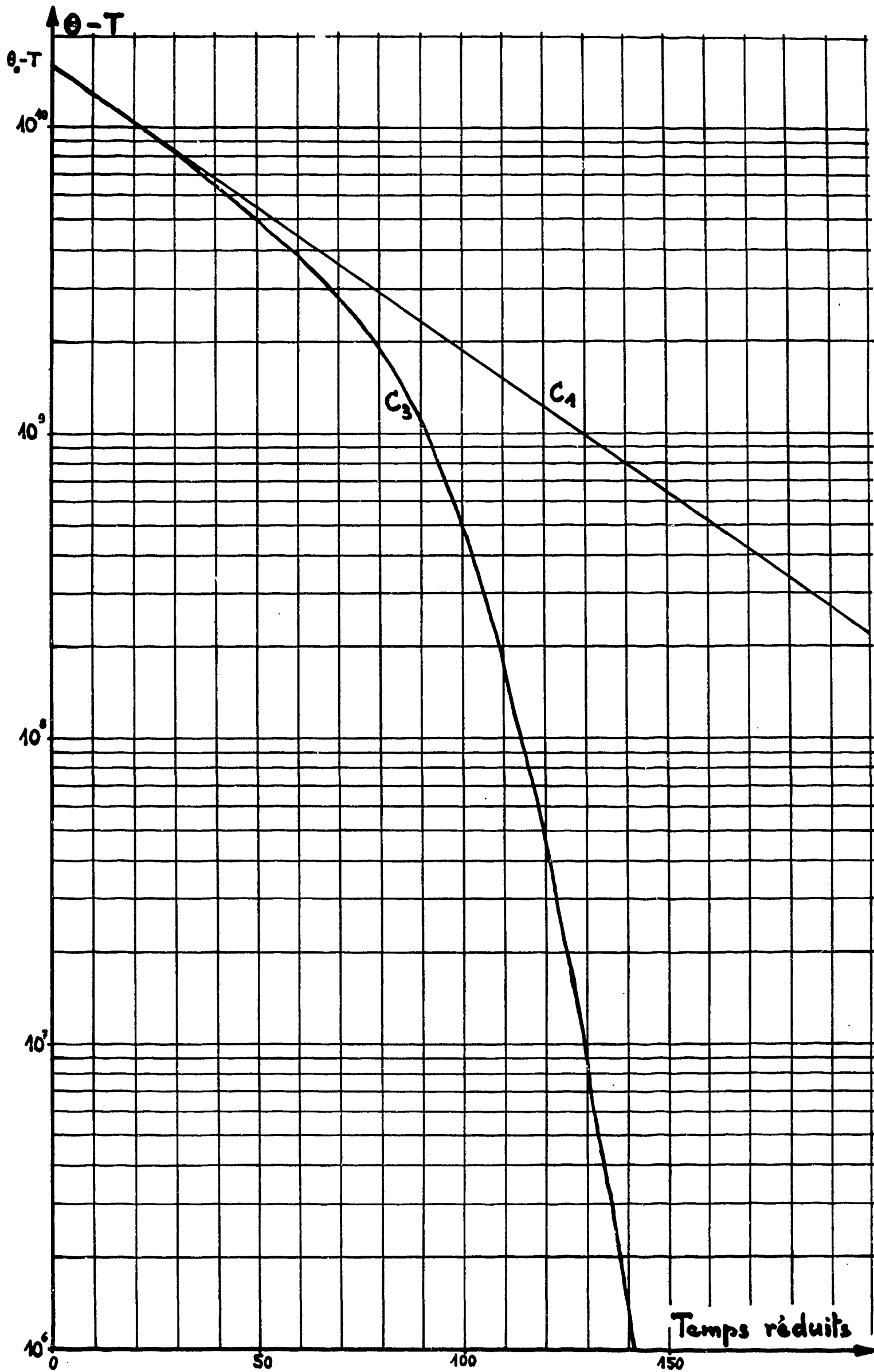
Négligeant l'action des ions, on obtient :

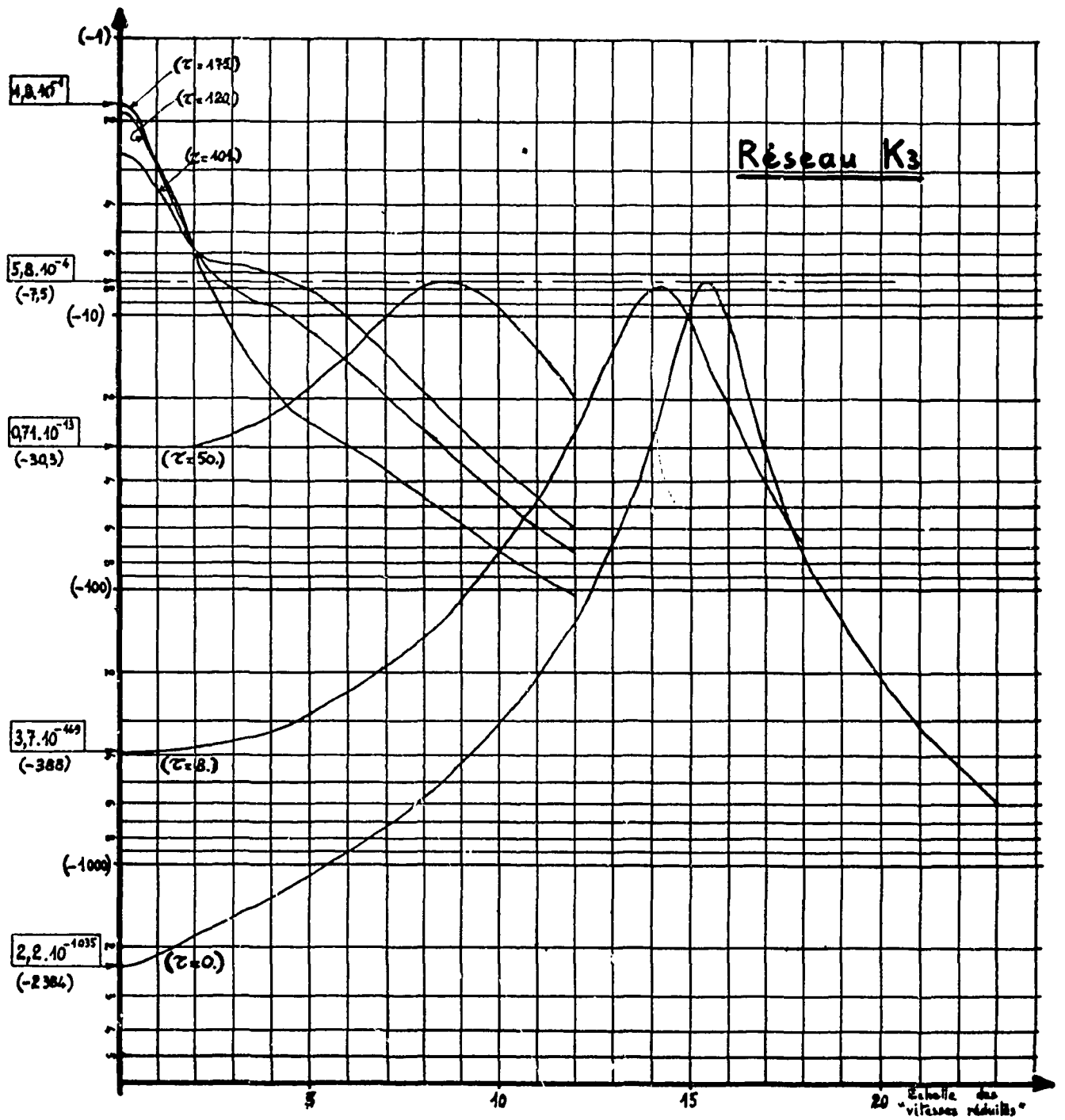
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{8 s_e}{3 \sqrt{\pi}} (\theta - T)$$

On a trouvé la loi de Spitzer pour le ralentissement par les électrons seuls.

On voit que la partie finale de ce calcul ne peut être appliquée au cas des ions. En effet,  $x \cdot s_i$  étant  $> \sim 1$ , le développement limité ne peut plus être effectué et, de toute façon, il ne serait plus possible

de négliger  $\frac{x^6 s_i^2}{x^4}$ .





**FIN**