

PRESIDENCE DU CONSEIL

COMMISSARIAT A L'ÉNERGIE ATOMIQUE

PROBLEMES DE STRUCTURE DANS LE CALCUL ANALOGIQUE

P.L. BRAFFORT

Rapport C.E.A. n° 630

1957

Centre d'Études nucléaires de Saclay

Service de Documentation

Boite postale n°2 Cif sur Yvette (S et O)

PROBLEMES DE STRUCTURE DANS LE CALCUL ANALOGIQUE

par P. L. BRAFFORT, Ingénieur au Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, France.

1. *Introduction.* — *The recent mathematical developments showed the importance of elementary structures (algebraic, topological, etc.) in abeyance under the great domains of classical analysis. We are proposed to put in evidence such structures in analog computation domain and to take out indications about the possible development of applied mathematics.*

2. « *Topological* » structures. — *The standard representation of analog schemas (additional triangles, integrators, phase invertors, functions generators, etc.) is equivalent to an order structure existence, including several families of type-elements. We are studying this topology.*

3. « *Chronological* » structures. — *The analog method gives only the function of the variable: time, as results of its computations. But the course of computation, for systems including reactive circuits, introduces order structures which we propose to call « chronological ».*

4. *Structures of approximation methods.* — *Then we can show that the approximation methods of ordinary numerical and digital computation present in fact the same structure as those of analog computation.*

5. *Conclusion.* — *We deduct that structure analysis permits fruitful comparisons between the several domains of applied mathematics and suggests new developments in which, perhaps, those domains will find their synthesis.*

1. — Introduction.

Parmi les conclusions que l'on peut tirer dès maintenant de ces journées, il en est une, que des personnalités plus qualifiées que moi dégageront sans doute, mais dont je me permettrai de faire l'introduction de ce bref exposé ; car vous serez tous d'accord pour reconnaître comme il est difficile de tracer aujourd'hui une frontière entre les mathématiques appliquées et les mathématiques dites « pures ». C'est ainsi que dans le domaine du calcul analogique la résolution de problèmes parfaitement classiques, appartenant aux domaines de l'analyse traditionnelle, tels que les systèmes d'équations différentielles, nous conduit à l'élaboration de « schémas » dont les propriétés et les relations relèvent de l'algèbre et de la topologie modernes.

En mathématiques « pures » les méthodes modernes ont permis comme on le sait, de regrouper des chapitres entiers de l'analyse et de découvrir, sous des théorèmes forts divers, quelques structures tout à fait fondamentales, ce qui entraîne une grande économie d'efforts. Citons, par exemple, le théorème de Jordan-Hölder en algèbre des treillis, le théorème de Cauchy en topologie des espaces uniformes, etc... C'est à une véritable « anatomie » des mathématiques que nous conduit la

théorie des ensembles et des « structures abstraites » suivant la terminologie du célèbre traité de N. Bourbaki.

Il fallait donc s'attendre à ce qu'une analyse de « structure », une analyse algébrique et topologique des méthodes de calcul expérimental permettent une clarification et un progrès et ce Congrès, je pense, l'aura bien montré.

La belle conférence d'introduction de M. Raymond en particulier, a clairement situé la position relative des différentes méthodes de calcul expérimental ; il a fait allusion aux problèmes topologiques à résoudre pour l'élaboration d'un schéma analogique, ainsi qu'aux problèmes de structures liés à l'extension du calcul analogique et à ses rapports avec le calcul arithmétique.

Il me sera donc facile de vous convaincre de l'importance de ces études de structure pour l'extension du domaine d'utilisation du calcul analogique, puisque, persuadés que nous sommes de sa grande souplesse, nous nous efforçons tous de sortir du domaine un peu étroit déjà des systèmes d'équations différentielles d'une seule variable temporelle.

2. — Structures topologiques.

Une méthode graphique qui s'est standardisée en particulier depuis la parution de l'ouvrage de Korn permet de préparer commodément l'affichage des problèmes sur un calculateur analogique électronique. A l'exposition voisine nous pouvons voir plusieurs panneaux d'interconnexions où les triangles correspondant aux amplificateurs fonctionnels sont indiqués. C'est dire que l'aspect topologique de ces schémas saute aux yeux.

Je ne ferai donc qu'indiquer quelques directions de recherches qui seraient peut-être utiles au développement du calcul analogique.

Pour définir une topologie, il faut un ensemble de base E , il sera commode de prendre l'ensemble des couples correspondant à l'entrée et à la sortie des montages fonctionnels (qui comprennent à la fois l'amplificateur et les impédances d'entrée et de contre-réaction). Le choix de cet ensemble de couples est équivalent au choix d'une relation d'ordre exprimant l'orientation du triangle fonctionnel. En fait, il convient de distinguer deux relations d'ordre R_A et R_I , dont les couples sont respectivement les entrées et sorties des montages additionneurs ou intégrateurs.

Ces deux relations nous donnent l'équivalent d'une machine analogique dont le panneau d'interconnexion est encore vierge.

Le strappage, c'est-à-dire la construction d'une analogie déterminée correspondant à la résolution d'un système d'équations différentielles est, en somme, le choix d'une relation binaire, cette fois-ci une relation

d'équivalence R_c , identifiant des couples d'éléments de l'ensemble c'est-à-dire exprimant que la sortie d'un montage fonctionnel est reliée à l'entrée d'un autre.

L'ensemble quotient E/R_c possède une structure d'ensemble ordonné que l'on déduit sans peine de R_A et R_I , d'où des notions de point précédent et suivant un autre point, la notion de boucle ; les boucles sont des parties de E/R_c où chaque élément possède un suivant et un seul, un précédent et un seul qui appartient à cette partie, avec toutes les conséquences que l'on peut en déduire en topologie algébrique.

L'étude des propriétés de l'ensemble muni d'une telle structure permet de retrouver des résultats bien connus, par exemple :

— le schéma analogique d'une équation différentielle comporte au moins une boucle ; le schéma d'un système d'équations en comporte au moins autant que d'équations indépendantes, le nombre exact des boucles étant lié à la matrice des coefficients.

D'autres recherches seraient utiles en particulier pour déterminer le nombre minimum d'amplificateurs correspondant à un problème donné. Notons que l'introduction d'éléments non linéaires (multiplicateurs ou générateurs de fonction) complique la structure de notre ensemble, sans rien retrancher aux propriétés d'ordre, donc à la topologie. Nous voudrions souligner encore une fois le rôle que jouent ici les relations binaires injustement négligées dans l'ouvrage de Bourbaki et pour les propriétés desquelles on peut se reporter à la thèse et aux publications de J. Riguet.

3. — Structures chronologiques.

Les solutions que nous offrent les machines analogiques électroniques sont des tensions électriques que nous mesurons, et qui varient en fonction du temps. Cette particularité nous conduit, à penser qu'une étude chronologique ne serait pas inutile à côté de l'étude algébrique et topologique que nous avons esquissée.

Comme l'a souligné M. Raymond, la méthode analogique est basée sur un principe d'asservissement et celui-ci est nécessairement un processus qui se développe dans le temps. Le temps nécessaire à la réalisation de l'équilibre dans une boucle donnée, équilibre évidemment relatif à un certain niveau de fluctuation qui détermine la précision « naturelle » du calcul, ce temps réalise une valuation de la structure algébrique et topologique définiet précédemment ; la valuation étant entendu comme la mise en correspondance d'un ensemble abstrait avec un ensemble de nombres réels (qui sont ici des durées).

Les considérations chronologiques sont en réalité familières aux constructeurs de machines analogiques pour lesquels elles se présentent sous l'aspect des exigences de bande passante. Ces exigences sont facilement satisfaites dans le cas de boucles ne comportant que des éléments additionneurs ou intégrateurs. Par contre, elles posent, comme on sait, des problèmes pour l'utilisation des multiplicateurs à servomécanismes.

Si ces considérations chronologiques demeurent en général implicites c'est qu'elles ont un aspect purement négatif : il s'agit de construire des analogues dont la

structure chronologique, au sens que nous proposons, puisse être mise entre parenthèses.

Par un curieux retour des choses, l'aspect chronologique des propriétés de structure ne devient un élément de construction des machines — et non pas une limitation — que lorsqu'on s'efforce de sortir du domaine habituel des équations différentielles pour des fonctions d'une variable temporelle.

Nous citerons ici deux exemples :

a) lorsqu'on veut résoudre un problème fonctionnel récurrent, c'est-à-dire de la forme

$$F(y_i, y_{i+1}) = 0$$

on peut utiliser un seul montage analogique qui fournit y_{i+1} pendant un certain intervalle de temps si y_i est donné.

Il suffit de réaliser une commutation qui, au bout de chaque intervalle de résolution, transforme l'enregistrement de y_i en générateur de fonction pour l'étape suivante ;

b) on sait résoudre les systèmes d'équations aux dérivées partielles en remplaçant les dérivées partielles spatiales par des différences finies. Il ne subsiste alors que des équations différentielles temporelles que l'on résoud par la méthode analogique classique. Le nombre des amplificateurs nécessaires peut devenir prohibitif. On est de plus en plus amené à utiliser des méthodes du type « méthode de balayage » ; dans ces méthodes le montage analogique est unique, mais la fonction du temps qu'il délivre correspond successivement aux différents points du réseau. Ceci pose encore des problèmes de commutation, d'enregistrement et d'utilisation des données partielles, etc...

Il en va de même dans cet analogue au sens généralisé qu'est un autocorrélateur où l'on doit réaliser la multiplication $f(t) \cdot f(t + \tau)$. D'une façon générale comme l'a fait remarquer M. Lofgren, dans tout calculateur à opération partagée dans le temps on doit utiliser des mémoires ou plus généralement des prédictors.

Mémoires à tubes cathodiques, comme celle décrite par M. Bergmann, lignes à retard, comme dans les problèmes traités par M. Ensing, générateur de noyaux $K(x, t)$ à balayage optique comme celui décrit par M. Wentzel sont autant d'éléments qui s'ajoutent à l'arsenal de l'analogiste classique, munissant ainsi son schéma d'une structure chronologique caractéristique et qui joue un rôle positif en liaison avec la structure topologique du schéma.

4. — Structure des méthodes d'approximation.

L'introduction de mémoires, de balayages, conduit à des techniques qui se rapprochent de celles des machines à calculer dites arithmétiques. Ceci ne nous étonnera pas si nous observons que dans cette méthode aussi on peut mettre en évidence des structures. De même que les structures apparaissent en calcul analogique lors de l'affichage du problème, elles apparaissent en calcul arithmétique lors de la programmation. Mais dans ce

dernier cas on tient compte dès le début des deux aspects topologique et chronologique: on en trouve un exemple élémentaire dans les sous-programmes d'itérations successives.

Le calcul électronique arithmétique est donc, de ce point de vue, plus avancé que le calcul analogique ordinaire. Cela peut surprendre puisque, au point de vue mathématique, le calcul analogique se situe à un niveau supérieur: il sait intégrer.

En fait la structure chronologique du calcul arithmétique est celle du calcul ordinaire humain. Le calculateur ou le mathématicien travaillent suivant un certain schéma opérationnel qui se développe dans le temps. Mais l'analyse en tant que telle n'en tient pas compte et le calcul analogique ordinaire non plus.

5. — *Conclusions.*

Le développement du calcul analogique semble donc se faire dans la voie d'une intégration des méthodes chronologiques propres au calcul élémentaire. On se dirige sans doute par là vers un enrichissement du domaine des mathématiques appliquées. Peut-être aussi de telles méthodes apporteront-elles des clartés sur le problème toujours en suspens du fondement des mathématiques. En tout cas, sur le plan plus immédiat de la construction des machines, il semble assuré que le remplacement des calculs un peu empiriques auxquels on s'est livré jusqu'ici par une recherche systématique basée sur les études des structures ouvrira à la méthode analogique de nouveaux et importants domaines d'application.