

R. BEURTEY

Rapport CEA n° 743

Phénomènes magnétiques dans les cyclotrons F. F. A. G.

Resume. — Cette étude regroupe et développe des résultats expérimentaux et théoriques sur les cyclotrons « spirales ». La méthode employée est celle étudiée par C. BLOCH (*) que nous remercions vivement pour sa bienveillance et ses conseils.

Nous avons essayé de donner les résultats essentiels à la fois utilisables et compatibles avec les résultats expérimentaux peu nombreux sur les pièces polaires spirales.

1958

10 pages

R. BEURTEY

Report CEA n° 743

Magnetic phenomena in F. F. A. G. - cyclotrons

Summary. — This study regroups and develops some experimental and theoretical results obtained with spiral tract cyclotrons. The method used has been studied previously by C. BLOCH, whom we thank for his helpful advice.

We have tried to give the main useful results, which are also in accordance with the rather scarce experimental results obtained on spiral pole pieces.

1958

10 pages

PRÉSIDENCE DU CONSEIL
COMMISSARIAT A
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES DANS LES CYCLOTRONS F.F.A.G.

par

R. BEURTEY

Rapport CEA n° **743**

CENTRE D'ÉTUDES
NUCLÉAIRES DE SACLAY
SERVICE DE DOCUMENTATION
Boîte postale n° 2 - Gif-sur-Yvette (S.-et-O.)

Rapport CEA n° 743

**SERVICE DE PHYSIQUE NUCLÉAIRE
SECTION DES RÉACTIONS NUCLÉAIRES
A MOYENNE ÉNERGIE**

**PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES
DANS LES CYCLOTRONS F.F.A.G.**

par

R. BEURTEY

1957

PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES DANS LES CYCLOTRONS F. F. A. G.

I. NOTATIONS

Un cyclotron à $(2N)$ secteurs, spiralés ou non, discontinus, de centre magnétique O , est caractérisé par :

— ses secteurs « forts » (ouverture $2\alpha_2$, indice $n_2 = -\frac{r}{H} \frac{\partial H_2}{\partial r_2} < 0$ rayon de courbure des particules

$R_2 = mv/eH_2$, variation relative du champ $\delta_2(r) = 1 - \frac{H_2(r)}{H_0}$

— ses secteurs « faibles » [$2\alpha_1$, $n_1 > 0$, R_1 , $\delta_1(r)$]

— son champ moyen $H(r) = H_0[1 + \delta_m(r)]$ ($\delta_m = \frac{\delta_1\alpha_1 + \delta_2\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$) (H_0 au centre)

— ses discontinuités de champ totales $\delta_T(r) = \delta_1 + \delta_2$

— sa fréquence de fonctionnement $\omega = \omega_0(1 + \alpha)$ (ω_0 correspondant à H_0 pour une particule non relativiste).

Les quantités intéressantes et les phénomènes étudiés sont limités aux « produits » du champ magnétique :

- forme théorique des orbites,
- focalisations radiale et axiale,
- synchronisme des particules.

Et en outre :

- déplacements d'ensemble de l'orbite dans le plan médian,
- déplacement du centre de l'orbite dû à une mauvaise symétrie axiale,
- influence des déformations du plan médian.

Dans le cas étudié ici de machines à indice faible, on a la possibilité agréable de procéder à des développements limités permettant une étude mathématique complète du problème à la précision que l'on veut.

On doit cependant faire des hypothèses (discontinuités brutales) ou employer des méthodes (linéarisation d'équations) qui rendent illusoire une grande précision dont on n'a heureusement que faire en général.

II. ORBITE FERMÉE (fig. 1)

L'orbite est une succession d'arcs de cercles de rayons R_1 et R_2 de centres O_1 et O_2 . La condition de fermeture (en fait jamais rigoureusement réalisée) exige l'alignement O_1O_2M (M : point de contact de deux arcs successifs sur la discontinuité).

On en déduit géométriquement les diverses quantités :

$$\varphi_1 = \alpha_1 - \beta \quad \varphi_2 = \alpha_2 + \beta \quad \beta \simeq \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \frac{2}{\cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2}$$

On définit un « rayon de courbure moyen » :

$$\bar{R} = \frac{v l}{2\pi} = \frac{R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} \simeq \frac{R_1 \alpha_1 + R_2 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + 2^{\text{e}} \text{ ordre } (R_1 - R_2)$$

Et une nouvelle variable angulaire par rapport au centre O :

$$\psi = \frac{v l}{R} \left(2\pi \frac{l}{\tau} \right)$$

d'où des « ouvertures corrigées » pour les secteurs :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \alpha_1 + \epsilon \left[\epsilon = 2 \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{1}{\cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2} \right) \right] \\ \psi_2 &= \alpha_2 - \epsilon \end{aligned}$$

III. OSCILLATIONS BETATRON

a) Leur étude se fait dans le trièdre de Frenet associé à la trajectoire plane fermée de même énergie (fig. II)

$$\vec{P} = \bar{M} + y \vec{n}(s) + z \vec{b}(s) \quad (1)$$

Les équations du mouvement (où la première est remplacée par celle de la conservation de l'énergie) s'écrivent :

$$\begin{cases} s'^2 \left(1 - \frac{y}{R} \right)^2 + y'^2 + z'^2 = v^2 \\ y'' + \frac{s'^2}{R} \left(1 - \frac{y}{R} \right) = \frac{e}{m} \left[z' H_t - s' \left(1 - \frac{y}{R} \right) H_z \right] \\ z'' = \frac{e}{m} \left[s' \left(1 - \frac{y}{R} \right) H_y - y' H_t \right] \end{cases} \quad (2)$$

où les dérivées sont prises par rapport au temps et le point M loin des discontinuités des secteurs. En linéarisant (3) et développant H au voisinage de M, il vient :

$$\frac{d^2 y}{d\psi^2} + \left[\left(\frac{\bar{R}}{R_i} \right)^2 - \frac{R}{R_i} n_i \right] y = 0 \quad (3) \quad \frac{d^2 z}{d\psi^2} + n_i \frac{\bar{R}}{R_i} z = 0 \quad (4)$$

b) A cela, il faut ajouter l'effet des discontinuités des secteurs au passage d'un secteur au suivant. Les équations (3) (4) étudiées sur deux secteurs consécutifs introduiront l'effet de la discontinuité de H_z . Mais au voisinage du plan médian et près d'une discontinuité, il s'introduit une composante de champ h perpendiculaire au bord du secteur et dirigée vers le secteur fort (pour $z > 0$).

On voit que la composante h_r sur le rayon, composée avec la vitesse, donne une force de rappel supplémentaire, tantôt focalisante, tantôt défocalisante (fig. III, IV)

$$h_r = h \sin \alpha \quad h_t = h \cos \alpha .$$

Si on admet que la perturbation se produit sur un arc très court de trajectoire, on a, en intégrant le long de la perturbation, une discontinuité en $z'(t)$ (fig. V)

$$\Delta z' = \frac{ev}{m} \int_C h_r dt = \frac{e}{m} \text{tg } \alpha \int_C h_t ds$$

En exprimant que le travail du champ le long d'un contour fermé (C) englobant la perturbation est nul, il vient :

$$\int h_t ds = z \Delta H_z$$

et finalement :

$$\Delta \frac{dz}{d\psi} = -z \Delta \left(\frac{\bar{R}}{R_i} \right) \text{tg } \alpha = -z L_i \quad (5)$$

c) En ce qui concerne $dy/d\psi$, si on considère deux trajectoires voisines (1) et (2), rencontrant le bord (S) sous l'angle α , on voit que la particule (1) traverse une petite lentille magnétique supplémentaire QMO' avant de se trouver en M' alignée avec M et O.

$$\text{(fig. VI)} \quad \Delta y' = \frac{\delta s}{R_2} - \frac{\delta s}{R_1} = \gamma \Delta \frac{\bar{R}}{R_i} \text{ (} \theta \alpha = \gamma L_i \text{)} \quad (6)$$

d) L'étude des équations (3) (6) et (4) (5) se fait de proche en proche. Les équations (3) et (4) sont de la forme $Y'' + N(\theta) Y = 0$, donc ont pour solutions des fonctions « pseudo-périodiques » de pseudo-période $2(\alpha_1 + \alpha_2)$. On sait qu'après une période, deux des solutions y (ou z) se retrouvent multipliées par un facteur constant λ_1 ou λ_2 tel que $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Si donc ces facteurs sont réels, il y a instabilité ou défocalisation, y (ou z) croissant indéfiniment. Il faut donc avoir $\lambda_1 = e^{i\sigma}$ et $\lambda_2 = e^{-i\sigma}$.

Le calcul de σ (à rendre réel) se fait de proche en proche en construisant les deux solutions « pseudo-sinus » et « pseudo-cosinus ».

Ceci se fait élégamment en introduisant, par exemple pour z , les « matrices de transfert » d'un secteur au suivant. La matrice produit donne par sa trace la valeur de $2 \cos \sigma$. (fig. VII).

Posant pour l'équation en z :

$$N_i = \frac{\bar{R}}{R_i} |n_i| \quad \psi_i = 2 N_i^{1/2} \theta_i \quad L_i = \left(\Delta \frac{R}{R_i} \right)^2 (\theta \alpha)_i^2$$

les matrices de transfert relatives aux différentes régions (1) (2) (3) (4) multipliées dans l'ordre inverse, donnent la matrice de transfert totale :

$$M = \begin{vmatrix} c h \psi_2 & N_2^{-1/2} s h \psi_2 \\ N_2^{1/2} s h \psi_2 & c h \psi_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -L_2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos \psi_1 & N_1^{-1/2} \sin \psi_1 \\ -N_1^{1/2} \sin \psi_1 & \cos \psi_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -L_1 & 1 \end{vmatrix}$$

[d'après (4)] [d'après (5)] [d'après (4)] [d'après (5)]

$(c h \psi_2 - L_2 N_2^{-1/2} s h \psi_2) (\cos \psi_1 - L_1 N_1^{-1/2} \sin \psi_1) - N_2^{-1/2} s h \psi_2 (N_1^{1/2} \sin \psi_1 + L_1 \cos \psi_1)$ <p style="text-align: center;">T 11</p>	$(N_2^{1/2} s h \psi_2 - L_2 c h \psi_2) N_1^{-1/2} \sin \psi_1 + \cos \psi_1 c h \psi_2$ <p style="text-align: center;">T 22</p>
---	---

d'où :

$$2 \cos \sigma_z = 2 c h \psi_2 \cos \psi_1 + \left[\left(\frac{N_2}{N_1} \right)^{1/2} - \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \right] s h \psi_1 \sin \psi_1 - (L_1 + L_2) \left[\frac{\cos \psi_1 s h \psi_2}{N_2^{1/2}} + \frac{c h \psi_2 \sin \psi_1}{N_1^{1/2}} \right] + \frac{L_1 L_2}{(N_1 N_2)^{1/2}} \sin \psi_1 s h \psi_2$$

et de même pour σ_y :

$$2 \cos \sigma_y = 2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \left[\left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{1/2} + \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{1/2} \right] \sin \psi_1 \sin \psi_2 + (L_1 + L_2) \left[\frac{\cos \psi_1 \sin \psi_2}{N_2^{1/2}} + \frac{\sin \psi_2 \cos \psi_1}{N_1^{1/2}} \right] + \frac{L_1 L_2}{(N_1 N_2)^{1/2}} \sin \psi_1 \sin \psi_2$$

où $M_i = \left[\left(\frac{R}{R_i} \right)^2 - \left(\frac{R}{R_i} \right) n_i \right]$; $\psi_i = 2 M_i^{1/2} \theta_i$.

La focalisation a lieu si (σ_y, σ_z) sont réels, appréciables et ne sont pas en « résonance ».

IV. FOCALISATION AXIALE

Un développement limité de (7) donne au 4^e ordre près (en n_i) :

$$2(\cos \sigma_z - 1) = 2 \left(1 - \frac{\psi_1^2}{2} \right) \left(1 + \frac{\psi_1^2}{2} \right) - 2 + \left[\left(\frac{N_2}{N_1} \right)^{1/2} - \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \right] \psi_1 \psi_2 = (L_1 + L_2) (\theta_1 + \theta_2) + L_1 L_2 \theta_1 \theta_2 \text{ (+ 4^e ordre)}$$

D'où, avec les définitions données plus haut et $\gamma_i = 2 \alpha_i$, $\Phi = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$:

$$\sigma_z^2 \approx \Re \Phi^2 + (L_1 + L_2) \Phi - L_1 L_2 \gamma_1 \gamma_2$$

Préoccupons-nous du cas spiralé : angle (spirale-rayon) = w (= 0 pour des secteurs droits).

$$L_1 + L_2 \approx 2 \beta^2 \delta_r (1 + \gamma^2 w) \quad L_1 L_2 = -\delta_r^2 \gamma^2 w \quad (\delta_r = \delta_1 + \delta_2)$$

$$\left[\frac{\sigma_z}{\Phi} \right]^2 = \mathcal{N} + \delta_T^2 \left[\frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} t g w + \frac{2(1 + t g w)}{(\gamma_1 + \gamma_2) \left(\cotg \frac{\gamma_1}{2} + \cotg \frac{\gamma_2}{2} \right)} \right]$$

Si on suppose γ_1 et γ_2 petits (nombre de secteurs N grand), on retombe sur la formule couramment employée :

$$\left[\frac{\sigma_z}{\Phi} \right]^2 = \mathcal{N} + \left(\frac{\delta_T}{2} \right)^2 (1 + 2 t g^2 w) \quad (9)$$

En fait, on a supposé que le champ avait des discontinuités brutales. Ce n'est que « presque » vrai. Il faudrait en réalité développer azimuthalement en série de Fourier

$$\delta = \sum_n a_n \cos n\theta \quad \text{et remplacer } \left(\frac{\delta_T}{2} \right)^2 \text{ par } \delta^2 = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots)$$

La focalisation axiale maximale s'obtient donc d'après (5) par :

- un indice moyen $\gg 0$,
- des variations aussi grandes que possible du champ,
- une spiralisation solide.

Nous verrons qu'en fait il existe une *spiralisation optimum* mise en évidence expérimentalement et théoriquement par la « réponse » du champ à la forme des shims.

Comme on le verra, le synchronisme approché nécessitant un $\mathcal{N} < 0$, on jouera sur δ_T , en spiralisation optimum, afin d'obtenir encore une solide focalisation (cf. infra).

V. FOCALISATION RADIALE

Un développement limité semblable à celui que nous venons de faire montre que la période $\sigma_y/\Phi \simeq 1$, c'est-à-dire que les oscillations bétatron ont, à peu de chose près, la période des oscillations naturelles de l'orbite fermée autour du cercle moyen.

$$2 \cos \sigma_y = 2 \cos (\psi_1 + \psi_2) - \frac{1}{4} [\delta_T + n_1 - n_2]^2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 + \frac{2 \delta_T^2}{\cotg \frac{\gamma_1}{2} + \cotg \frac{\gamma_2}{2}} (1 + t g^2 w) \sin (\psi_1 + \psi_2) - \delta_T^2 t g^2 w \sin \psi_1 \sin \psi_2$$

Posant alors $\psi_1 + \psi_2 + \varepsilon = \sigma_y$ il vient pour ε une quantité facile à calculer, du 2^e ordre en δ_T , négligeable en δ_T si $\mathcal{N}/2$ ne l'est pas car :

$$\psi_1 + \psi_2 \simeq \Phi (1 - \mathcal{N}/2)$$

d'où en première approximation

$$\sigma_y/\Phi = 1 - \mathcal{N}/2 \quad (10)$$

Suivant le signe de \mathcal{N} , il y aura donc *précession* ou *récession* des orbites autour du centre de la machine si celle-ci est parfaite et les orbites bien centrées. La spiralisation n'a pratiquement pas d'effet sur la focalisation radiale.

VI. ÉTUDE DU SYNCHRONISME

A chaque tour l'énergie de la particule croît de $\Delta E = zeV_0 \cos \Phi$ et elle fait $1/T$ révolutions par seconde d'où $\frac{dE}{dt} = \frac{zeV}{T} \cos \Phi$ (Φ phase de la particule avec la radiofréquence accélératrice). Or la phase varie de

$(\omega T - 2\pi)$ par tour, $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\omega T - 2\pi}{T}$ et par suite $\cos \Phi \frac{d\Phi}{dE} = \frac{\omega T - 2\pi}{zeV}$ de $T = \frac{2\pi \bar{R}}{v}$, on déduit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{E}{W_0} \right) (1 - \delta_m)$$

avec $\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \alpha$, W_0 énergie de masse de repos — d'où en posant $\frac{E}{E_s} = \varepsilon$ (E_s énergie de sortie)

$$\begin{aligned} \sin \Phi - \sin \Phi_0 &= \frac{2\pi E_0}{eV} \int_{E_0 \neq 0}^E -\frac{\alpha dE}{E_0} + \frac{\beta_1^2}{2} \frac{E}{E_0^2} dE - \delta_m \frac{dE}{E_0} & \beta_1^2 &= \frac{\omega^2 R_0^2}{C^2} \\ &= \frac{\pi E_0}{eV} \left[-\alpha \epsilon + \frac{\beta_1^2}{4} \epsilon^2 - \int_0^\epsilon \delta_m d\epsilon \right] \end{aligned} \quad (11)$$

En agissant sur α (par variation de H_0 ou ω_0) on peut, placés au mieux, obtenir le synchronisme sortie-entrée ($\Delta \sin \varphi_0'' = 0$). Si δ_m est petit par rapport à β_1^2 , les courbes $\sin \Phi = G(\epsilon)$ ont toutes un minimum pour $\epsilon \simeq 1/2$ et α est donné par (11) où $\epsilon = 1$; d'où :

$$\sin \Phi - \sin \Phi_0 = \frac{\pi E_0}{eV} \left[\frac{\beta_1^2}{4} \epsilon(\epsilon - 1) - \int_0^\epsilon \delta_m d\epsilon + \epsilon \int_0^1 \delta_m d\epsilon \right] \quad (12)$$

Il faut bien entendu $|\sin \Phi - \sin \Phi_0| \ll 2$. On ne pourrait avoir isochronisme rigoureux que si $\delta_m = \frac{\beta_1^2}{2} \epsilon = \frac{\beta_1^2}{2}$ à chaque instant. Même si on ne peut annuler (12), il est intéressant de la rendre très petite afin d'avoir un intervalle de phase à l'entrée utilisable grand, donc meilleure intensité, et afin surtout d'abaisser le seuil de tension V nécessaire entre dees, ce qui est favorable pour d'autres raisons.

Le Professeur M. S. LIVINGSTON nous a signalé que, d'après un travail de B. COHEN, des vues plus réalistes montrent que :

- 1) l'intervalle de phase utilisable *au départ* est faible (quelques degrés) et situé autour de $\Phi_0 = 0$;
- 2) la tension *réelle* nécessaire pour produire un faisceau correct est de l'ordre de 2 fois la « tension seuil ». Ceci est dû à la focalisation *électrique* (non étudiée ici) qui impose à l'angle de phase de ne pas dépasser (-30°) environ. C'est bien d'ailleurs ce que l'on constate expérimentalement au cyclotron de Saclay.

VII. DÉPLACEMENTS D'ENSEMBLE DE L'ORBITE

On peut se poser trois questions sur ces déplacements relatifs au cas où :

- 1° Une orbite *mal centrée* au départ évolue dans un champ à bonne symétrie azimutale.
- 2° Une orbite *bien centrée* au départ évolue dans un champ à mauvaise symétrie azimutale (défaut local dans les pôles ou non parallélisme des pièces polaires).
- 3° le plan médian est défectueux.

1° *Le premier cas* donne lieu à deux phénomènes :

a) une précession (ou récession) autour du centre magnétique de la machine du centre des orbites de $\mathfrak{N}/2$ tours par tour.

b) un déplacement radial possible étudiable en première approximation, si l'on assimile l'orbite à un fil parcouru par un courant (loi du « flux maximum »). Dans le cas d'un cyclotron classique sans secteurs, l'orbite étant centrée en (C), on voit facilement, en composant les forces diamétralement opposées et symétriques par rapport à OC que l'orbite est soumise à une force dirigée suivant OC ou CO suivant le signe de \mathfrak{N} . Mais le « décentrage » ($\mathfrak{N} > 0$) ou « recentrage » ($\mathfrak{N} < 0$) aboutit à des déplacements tellement faibles tant que $N \ll 1$, que l'on peut dire qu'une orbite mal centrée dans un « bon champ » suit *seulement* une *précession* ou *récession*.

2° *le deuxième cas* (défaut de champ) a été étudié théoriquement par HOUGH [2] et corrigé expérimentalement d'une façon, semble-t-il, sensationnelle. Le principe est le suivant (on considère un champ cylindrique. Le calcul est à très peu près exact pour un cyclotron à secteurs en prenant le champ moyen). Le défaut du champ oblige à écrire :

$$H = H_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2\mathfrak{N}} (1 + h \cos \theta)$$

$h(r)$ variable avec r , les autres termes du développement de Fourier étant, d'après HOUGH, négligeables. Le rayon passant par le centre du défaut est pris pour origine des angles. Un changement d'origine en M sur OD à distance l de O donne pour nouvelle forme de H (fig. VIII) :

$$\begin{aligned} H_1 &\sim H_0 \left(\frac{r_0}{r(1 - l \cos \theta)} \right)^{2\mathfrak{N}} (1 + h \cos \theta) \\ &= H_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2\mathfrak{N}} \left[1 + \cos \theta \left(h - \frac{\mathfrak{N} l}{r} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\sigma_z}{\Phi} \right]^2 = \mathcal{N} + \delta_T^2 \left[\frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} t g w + \frac{2(1 + t g w)}{(\gamma_1 + \gamma_2) \left(\cot g \frac{\gamma_1}{2} + \cot g \frac{\gamma_2}{2} \right)} \right]$$

Si on suppose γ_1 et γ_2 petits (nombre de secteurs N grand), on retombe sur la formule couramment employée :

$$\left[\frac{\sigma_z}{\Phi} \right]^2 = \mathcal{N} + \left(\frac{\delta_T}{2} \right)^2 (1 + 2 t g^2 w) \quad (9)$$

En fait, on a supposé que le champ avait des discontinuités brutales. Ce n'est que « presque » vrai. Il faudrait en réalité développer azimuthalement en série de Fourier

$$\delta = \sum_n a_n \cos n\theta \quad \text{et remplacer } \left(\frac{\delta_T}{2} \right)^2 \text{ par } \delta^2 = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots)$$

La focalisation axiale maximale s'obtient donc d'après (5) par :

- un indice moyen $\gg 0$,
- des variations aussi grandes que possible du champ,
- une spiralisation solide.

Nous verrons qu'en fait il existe une *spiralisation optimum* mise en évidence expérimentalement et théoriquement par la « réponse » du champ à la forme des shims.

Comme on le verra, le synchronisme approché nécessitant un $\mathcal{N} < 0$, on jouera sur δ_T , en spiralisation optimum, afin d'obtenir encore une solide focalisation (cf. infra).

V. FOCALISATION RADIALE

Un développement limité semblable à celui que nous venons de faire montre que la période $\sigma_y/\Phi \simeq 1$, c'est-à-dire que les oscillations bétatron ont, à peu de chose près, la période des oscillations naturelles de l'orbite fermée autour du cercle moyen.

$$2 \cos \sigma_y = 2 \cos (\psi_1 + \psi_2) - \frac{1}{4} [\delta_T + n_1 - n_2]^2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 + \frac{2 \delta_T^2}{\cot g \frac{\gamma_1}{2} + \cot g \frac{\gamma_2}{2}} (1 + t g^2 w) \sin (\psi_1 + \psi_2) - \delta_T^2 t g^2 w \sin \psi_1 \sin \psi_2$$

Posant alors $\psi_1 + \psi_2 + \epsilon = \sigma_y$ il vient pour ϵ une quantité facile à calculer, du 2^e ordre en δ_T , négligeable en δ_T si $\mathcal{N}/2$ ne l'est pas car :

$$\psi_1 + \psi_2 \simeq \Phi (1 - \mathcal{N}/2)$$

d'où en première approximation

$$\sigma_y/\Phi = 1 - \mathcal{N}/2 \quad (10)$$

Suivant le signe de \mathcal{N} , il y aura donc *précession* ou *récession des orbites* autour du centre de la machine si celle-ci est parfaite et les orbites bien centrées. La spiralisation n'a pratiquement pas d'effet sur la focalisation radiale.

VI. ÉTUDE DU SYNCHRONISME

A chaque tour l'énergie de la particule croît de $\Delta E = zeV_0 \cos \Phi$ et elle fait $1/T$ révolutions par seconde d'où $\frac{dE}{dt} = \frac{zeV}{T} \cos \Phi$ (Φ phase de la particule avec la radiofréquence accélératrice). Or la phase varie de

$(\omega T - 2\pi)$ par tour, $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\omega T - 2\pi}{T}$ et par suite $\cos \Phi \frac{d\Phi}{dE} = \frac{\omega T - 2\pi}{2eV}$ de $T = \frac{2\pi \bar{R}}{v}$, on déduit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{E}{W_0} \right) (1 - \delta_m)$$

avec $\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \alpha$, W_0 énergie de masse de repos — d'où en posant $\frac{E}{E_s} = \epsilon$ (E_s énergie de sortie)

$$\begin{aligned} \sin \Phi - \sin \Phi_0 &= \frac{2\pi E_0}{eV} \int_{E_0 \neq 0}^E -\frac{\alpha dE}{E_0} + \frac{\beta_0^2}{2} \frac{E}{E_0^2} dE - \delta_m \frac{dE}{E_0} & \beta_0^2 &= \frac{\omega^2 R_0^2}{C^2} \\ &= \frac{\pi E_0}{eV} \left[-\alpha \epsilon + \frac{\beta_0^2}{4} \epsilon^2 - \int_0^\epsilon \delta_m d\epsilon \right] \end{aligned} \quad (11)$$

En agissant sur α (par variation de H_0 ou ω_0) on peut, placés au mieux, obtenir le synchronisme sortie-entrée ($\Delta \sin \varphi_0^{\text{re}} = 0$). Si δ_m est petit par rapport à β_0^2 , les courbes $\sin \Phi = G(\epsilon)$ ont toutes un minimum pour $\epsilon \approx 1/2$ et α est donné par (11) où $\epsilon = 1$; d'où :

$$\sin \Phi - \sin \Phi_0 = \frac{\pi E_0}{eV} \left[\frac{\beta_0^2}{4} \epsilon(\epsilon - 1) - \int_0^\epsilon \delta_m d\epsilon + \epsilon \int_0^1 \delta_m d\epsilon \right] \quad (12)$$

Il faut bien entendu $|\sin \Phi - \sin \Phi_0| \ll 2$. On ne pourrait avoir isochronisme rigoureux que si $\delta_m = \frac{\beta_0^2}{2} \epsilon = \frac{\beta_0^2}{2}$ à chaque instant. Même si on ne peut annuler (12), il est intéressant de la rendre très petite afin d'avoir un intervalle de phase à l'entrée utilisable grand, donc meilleure intensité, et afin surtout d'abaisser le seuil de tension V nécessaire entre dees, ce qui est favorable pour d'autres raisons.

Le Professeur M. S. LIVINGSTON nous a signalé que, d'après un travail de B. COHEN, des vues plus réalistes montrent que :

- 1) l'intervalle de phase utilisable *au départ* est faible (quelques degrés) et situé autour de $\Phi_0 = 0$;
- 2) la tension *réelle* nécessaire pour produire un faisceau correct est de l'ordre de 2 fois la « tension seuil ». Ceci est dû à la focalisation *électrique* (non étudiée ici) qui impose à l'angle de phase de ne pas dépasser (-30°) environ. C'est bien d'ailleurs ce que l'on constate expérimentalement au cyclotron de Saclay.

VII. DÉPLACEMENTS D'ENSEMBLE DE L'ORBITE

On peut se poser trois questions sur ces déplacements relatifs au cas où :

- 1° Une orbite *mal centrée* au départ évolue dans un champ à bonne symétrie azimutale.
- 2° Une orbite *bien centrée* au départ évolue dans un champ à mauvaise symétrie azimutale (défaut local dans les pôles ou non parallélisme des pièces polaires).

3° le plan médian est défectueux.

1° *Le premier cas* donne lieu à deux phénomènes :

a) une précession (ou récession) autour du centre magnétique de la machine du centre des orbites de $\mathcal{N}/2$ tours par tour.

β) un déplacement radial possible étudiable en première approximation, si l'on assimile l'orbite à un fil parcouru par un courant (loi du « flux maximum »). Dans le cas d'un cyclotron classique sans secteurs, l'orbite étant centrée en (C), on voit facilement, en composant les forces diamétralement opposées et symétriques par rapport à OC que l'orbite est soumise à une force dirigée suivant OC ou CO suivant le signe de \mathcal{N} . Mais le « décentrage » ($\mathcal{N} > 0$) ou « recentrage » ($\mathcal{N} < 0$) aboutit à des déplacements tellement faibles tant que $N \ll 1$, que l'on peut dire qu'une orbite mal centrée dans un « bon champ » suit *seulement une précession* ou récession.

2° *le deuxième cas* (défaut de champ) a été étudié théoriquement par HOUGH [2] et corrigé expérimentalement d'une façon, semble-t-il, sensationnelle. Le principe est le suivant (on considère un champ cylindrique. Le calcul est à très peu près exact pour un cyclotron à secteurs en prenant le champ moyen). Le défaut du champ oblige à écrire :

$$H = H_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\mathcal{N}} (1 + k \cos \psi)$$

$h(r)$ variable avec r , les autres termes du développement de Fourier étant, d'après HOUGH, négligeables. Le rayon passant par le centre du défaut est pris pour origine des angles. Un changement d'origine en M sur OD à distance l de O donne pour nouvelle forme de H (fig. VIII) :

$$\begin{aligned} H_1 &\sim H_0 \left(\frac{r_0}{r(1 - l \cos \psi)} \right)^{\mathcal{N}} (1 + k \cos \psi) \\ &= H_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\mathcal{N}} \left[1 + \cos \psi \left(k - \frac{\mathcal{N} l}{r} \right) \right] \end{aligned}$$

Si on prend, à chaque instant $r = \rho h / \mathcal{N} \sim r_0 h / \mathcal{N}$, M sera appelé « centre magnétique instantané ». On voit qu'à $r_0 = 60$ cm, $\mathcal{N} \sim 2$ pour cent, $h = 1$ pour mille, suffit à amener M à 3 cm de O. La forme de H_1 autour de M étant $H_0(r_0/\rho)^{\mathcal{N}}$, on peut reprendre l'étude des oscillations bêatron autour de ce point et voir que le centre de l'orbite C « précède » de $\mathcal{N}/2$ tours par tour autour de M. On peut alors, point par point, construire le déplacement du centre de l'orbite. Entre $r = r_1$ et $r = r_2$, l'orbite tourne autour de M_1 de : $\Delta\psi_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathcal{N} d\rho$; p : nombre de tours (fig. IX).

Ceci peut d'ailleurs permettre d'agir sur l'orbite en introduisant des « défauts contrôlés » astucieusement placés (par exemple 90° avant le déflecteur pour « lancer » l'orbite vers la fenêtre...).

3° Si le « plan médian » a une forme de soucoupe, on peut encore voir ce qui se passe par analogie avec un circuit électrique, ou traiter complètement le problème en introduisant :

a) une composante $\delta H_z = -z z H_z C_m$ où C_m est la courbure moyenne de la « surface équipotentielle » qui remplace le « plan médian » en m.

b) une composante h_p dans le plan médian (h_p) = $4 r H_z C_m$ pour une surface de révolution d'axe (O) qui peut être importante même pour des C_m presque nuls... et donc donner une focalisation ou défocalisation axiale importante.

VIII. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA FORME DES PIÈCES POLAIRES SUR LE CHAMP

Cette étude, mi-théorique, mi-expérimentale, permet de rechercher la spiralisation optima à donner à un cyclotron. Elle a été faite dans ses grandes lignes par BLUEMEL [3] dont les résultats expérimentaux se montrent en concordance presque sublime avec la théorie. Voici les notations : g = entrefer moyen ; s = épaisseur des shims ; $S = s/g$; $\rho = 2r/g$. On définit la distance entre 2 spirales consécutives par $\lambda/2 = 2\pi r/N \cos \gamma (1 - C_x \cos^2 \gamma)$, où C_x est un facteur correctif que nous négligerons en général. Et

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{g} \frac{P}{N} \cos^2 \gamma (1 - C_x \cos^2 \gamma).$$

On est ramené à un problème de potentiel plan qui, vu l'épaisseur du shim, nous fait passer de (fig. X) à (fig. XI) où $dV = H_s s$.

On peut développer le potentiel suivant $V(x, y) = \sum_k A_k \cos kx \cdot shk y$.

La périodicité en λ donne $R = 2\pi n/\lambda$.

Pour $y = g/2$, $V(x, g/2)$ donne le développement de (fig. XII) en série de Fourier ; on trouve

$$A_k = \frac{(-1)^p}{2p+1} \frac{1}{sh \frac{2p+1}{\lambda}} \quad \text{où } n = 2p+1.$$

D'où

$$V(x, y) = 4 \frac{H_0}{\pi} \sum_p \frac{(-1)^p}{2p+1} \frac{\cos \frac{(2n+1) 2\pi x}{\lambda}}{sh \frac{(2n+1)}{\lambda}} \cdot sh(2n+1) \frac{2\pi y}{\lambda}.$$

D'où pour le champ dans ce plan médian

$$H(x, 0) = \frac{4H_0 s}{\pi \lambda} \sum_p (-1)^p \frac{\cos \{(2n+1) 2\pi x/\lambda\}}{sh (2n+1/\lambda)} \quad (13)$$

Cette formule résout les problèmes des variations azimutales du champ et les variations radiales sont données par :

$$\frac{H_{max}}{H_0} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{4}{\pi \lambda} \left[\frac{1}{sh^2/\lambda} - \frac{1}{sh^2/\lambda} + \dots + (-1)^p \frac{1}{sh \frac{2n+1}{\lambda}} \right] \quad (14)$$

et ce que nous avons appelé δ_{rfz} est plus rigoureusement donné par

$$(\delta_{rfz})^2 \sim \Phi_{(\lambda)}^2 = \frac{\bar{H}^2}{H_0^2} \frac{1}{\sigma^2} = \frac{S}{\pi^2 \lambda^2} \left[\frac{1}{sh^2/\lambda} + \frac{1}{sh^2 3/\lambda} + \dots \right] \quad (\text{contre } \Phi) \quad (15)$$

On peut bien entendu prendre des ouvertures de secteurs forts différentes de celle des secteurs faibles. Il suffit de remplacer dans (13) et (14) $(-1)^n$ par $\sin(n\mu \cdot \frac{\pi}{2})$ où μ est le rapport des ouvertures, et conserver tous les n possibles (1, 2, ... ∞).

La formule (15) est en très bon accord avec les résultats expérimentaux trouvés par STAHELIN pour un nombre imposant de formes de spirales, épaisseurs σ , et valeurs de champ (entre 2 et 5 kilogauss).

IX. RECHERCHE DE LA SPIRALE OPTIMUM

En prenant le coefficient correctif 0,9 pour λ , si l'on étudie le terme de la focalisation dépendant uniquement de la spiralisation et de l'effet de Thomas

$$\sigma_z/\sigma = \Phi(\lambda) \sqrt{1 + 2 \text{tg}^2 \gamma}$$

en fonction de $\text{tg } w = \mu$ et pour différentes valeurs de ρ/N , on trouve les courbes (fig. XIII) présentant un optimum pour des points à peu près alignés avec l'origine. On voit, en reportant ces points dans le diagramme (ρ , $\text{tg } \gamma$) (fig. XIV), que la meilleure approximation est donnée par :

$$\text{tg } \gamma = 1,90 \rho/N \quad (16) \quad \text{et} \quad \sigma_z/\sigma \simeq 0,72 \text{tg } \gamma = 1,37 \frac{\rho}{N} \quad (17)$$

On voit donc d'après (16) qu'aux rayons moyens et grands c'est une spirale d'Archimède qui donne la focalisation maximale. Comme de toute façon on est bien obligé de terminer au centre de cette manière, on prendra donc cette forme de spirale. Pour $N = 3$

$$\text{tg } \gamma_3 = 1,27 r_3/R \quad r_3 = \frac{R}{1,27} \cdot \theta.$$

X. AMÉLIORATION DU SYNCHRONISME

Ayant choisi la spiralisation optimum et une épaisseur de shims convenable et suffisante, on va pouvoir prendre un $\mathfrak{A} < 0$ en conservant une bonne focalisation.

L'idéal serait un champ $H = H_0 [1 + \delta_m(r)]$ où $\delta_m = \beta^2/2$ ($\beta = v/c$) qui permettrait, pour des particules intéressantes, d'être toujours « en phase ». En fait, cela demanderait des épaisseurs de shims croissant avec le rayon et trop élevées. Mais supposons que $\delta_m = k \beta^2/2$ où $k < 1$. Soit $\delta_m = k \beta^2/2 (r/r_0)^2$.

En reportant dans la formule donnant le déphasage maximum, on voit que :

$$\sin \Phi - \sin \Phi_0 = \frac{\pi E_0 \beta_0^2}{4 e V} (1 - k) \epsilon (\epsilon - 1)$$

dont le maximum $\epsilon = 1/2$ est, en valeur absolue

$$(\Delta \sin \Phi)_{\max} = \frac{\pi \cdot E_0 \cdot \beta_0^2}{16 e V} (1 - k).$$

Par exemple pour le cyclotron actuel, avec des α de 40 MeV,

$$\beta_0 = 1/6, \quad \epsilon = 2 (e), \quad V = v \cdot 10^5 \text{ volts, on a}$$

$$\Delta = \frac{3,14 \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot 1 (1 - k)}{16 \times 2 \times v \cdot 10^5 \cdot 36} = \frac{1256 (1 - k)}{1152 v}$$

En admettant que pour « sortir » les α , il faudrait $\Delta < 1,5$, on voit que le seuil de tension est donné par :

$$v > 0,73 (1 - k).$$

Dans le cas actuel où, en moyenne, $k \sim -0,35$, le seuil serait 10^5 volts. Pour $k = +0,2$, on tomberait à 60 kilovolts.

XI. RÉALISATION D'UN CHAMP CROISSANT EN MOYENNE FOCALISATION

Il faut une épaisseur de shimming croissante $\sigma_1 = \sigma = \tau$ (fig. XV) dans les secteurs « forts ». Si

$$\mathfrak{A} = -k \frac{\beta_0^2}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \quad \delta_m = k \frac{\beta_0^2}{4} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2$$

en posant $r/r_s = Z$, on voit qu'en première approximation il faudrait prendre $\tau/2 \delta_m$ soit $\tau = (\mathcal{N}) = h(\beta_s/2) Z^2$. Or le terme de focalisation dû à la spiralisation est, en unité de période $2\pi/N$: $\sigma_z = \sigma_1 \Phi(\lambda) \sqrt{1 + 2fg^2 w}$ et pour la spirale optimum: $\sigma_1 \times 1,37 (\rho/N)$.

Et le σ_z réel, compte tenu de $\mathcal{N} < 0$ est :

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sqrt{\mathcal{N} + \sigma_1^2 \Phi^2(\lambda) (1 + 2fg^2 w)} \quad \text{Pour le cyclotron actuel } g = 30 \text{ cm } N = 3 \\ \sigma_z &= Z \sqrt{-k \frac{\beta_s^2}{2} + (\sigma + \tau)^2 \cdot 3,97} \\ &= Z \sqrt{3,97 \left(\sigma + k \frac{\beta_s^2}{2} Z \right)^2 - k \frac{\beta_s^2}{2}} \end{aligned} \quad (17)$$

Ceci définit, pour qu'il y ait effectivement focalisation, un σ minimum.

$$\sigma_{\min} = \frac{k \beta_s^2}{2 \times 3,97} = \frac{k}{2 \times 26 \times 3,97} = 5,9 \cdot 10^{-3} \sqrt{k}.$$

En prenant $\sigma = 2 \sigma_{\min}$, on assurera une bonne focalisation et on voit que $\sigma_z(Z)$ est représenté par une courbe voisine d'une droite. Prenons par exemple $k = 0,2$ (en supposant pour l'instant le champ de fuite négligeable)

$$\sigma_{\min} = 2,6 \text{ pour cent} \quad \sigma = 5,2 \text{ pour cent} \quad \text{soit } s = 1,6 \text{ cm.}$$

Et on a la courbe (4) pour représenter σ_z . En l'occurrence, le champ de fuite étant ce qu'il est, on aurait bien meilleure focalisation, mais on n'aurait même pas $k > 0$.

XII. COMPENSATION DU CHAMP DE FUITE

a) D'une façon normale, il suffit de prendre pour τ des valeurs plus grandes que celles indiquées par la formule $\tau = k(\beta_s^2/2)Z^2$. On ajoutera à cette valeur celle correspondant au champ de fuite réel, mais puisqu'il s'agit de la correction du champ de fuite que nous n'avions pas supposé exister dans l'établissement de (17) on gardera (17) pour (σ_z) . On placera une succession de shims empilés croissant en épaisseur comme le champ de fuite (fig. XV).

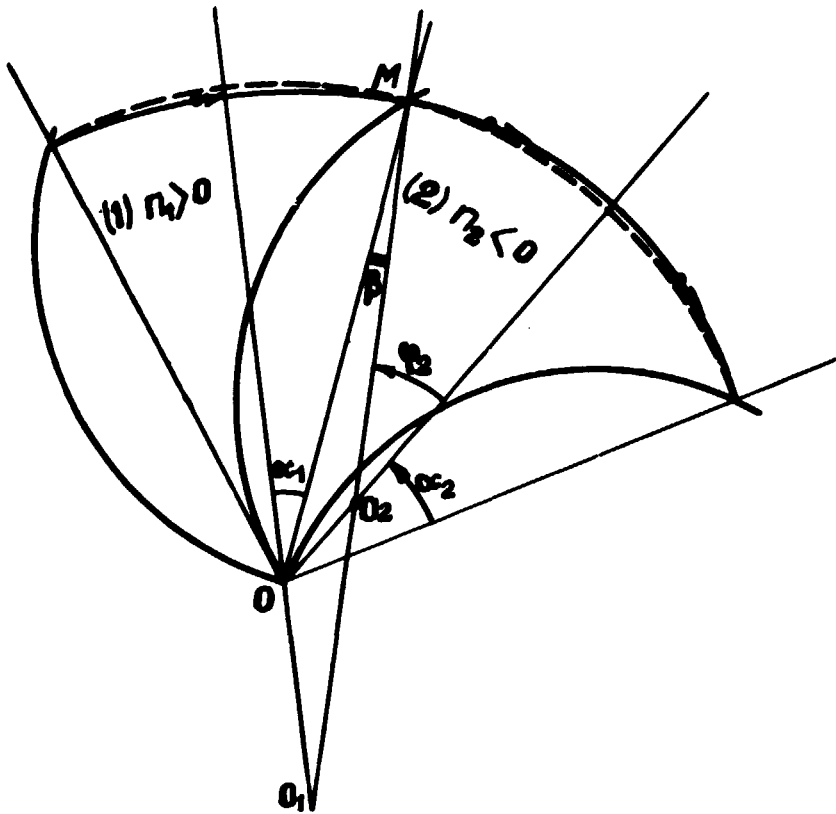
b) On peut aussi placer à l'extérieur une couronne mince d'épaisseur (dy), largeur (dx) dont l'effet est donné par SOLOMON [4]

$$\frac{h(x)}{H_0} = \frac{\pi}{g^2} \frac{dy \cdot dx}{ch^2 \frac{\pi x}{g}} \quad (\text{fig. XVI})$$

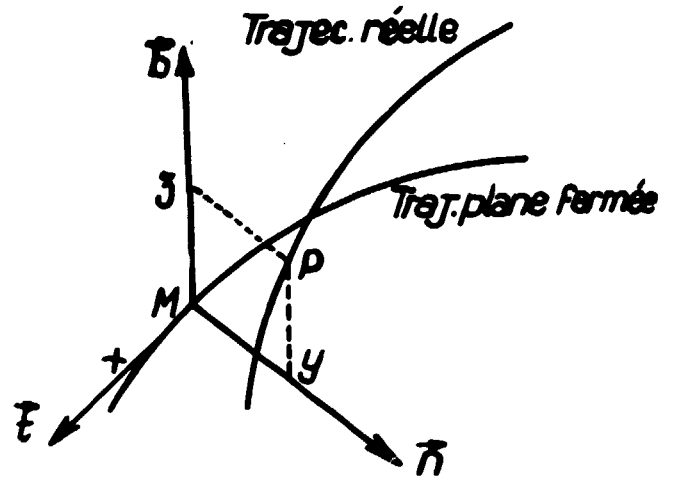
grossièrement valable, au moins à l'intérieur de la couronne. En agissant sur sa position, sa largeur et son épaisseur, on peut compenser le champ de fuite au rayon de sortie, tout en ayant ensuite une décroissance suffisante pour extraire plus facilement les particules. Pour réaliser l'extraction, on peut aussi utiliser « l'effet HOUGH [4] » sous forme de « regenerator » et « peeler » récemment étudiés [5].

BIBLIOGRAPHIE

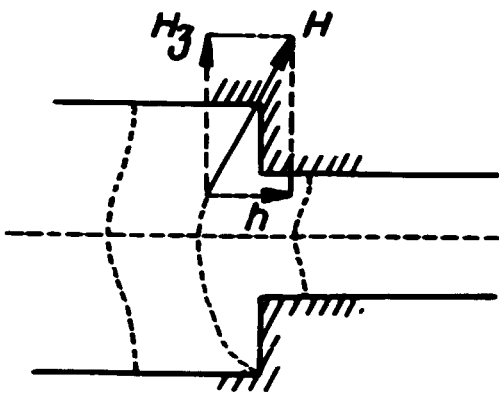
- [1] BLOCH C. — La méthode de focalisation de Thomas dans les cyclotrons (non publié).
- [2] HOUGH. — Rev. Sci. Instr. 1953, 24, 1, 42-48.
- [3] BLUEMEL, CAROLL, STANELIN. — Investigation of the field modulation. Tech. Rep. n° 2. Univ. of Ill. off Nav. Research.
- [4] SOLOMON, Rapport C. E. A. Accél. 15.1.
- [5] Nucl. Instr. p. 31, janvier 1957. (S. Cohen et Crewe).



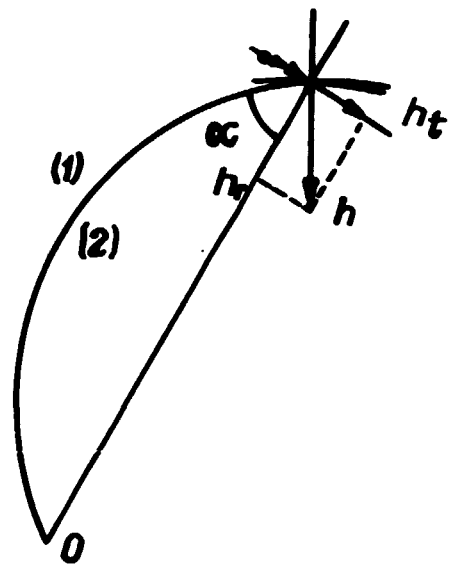
- Fig. 1 -



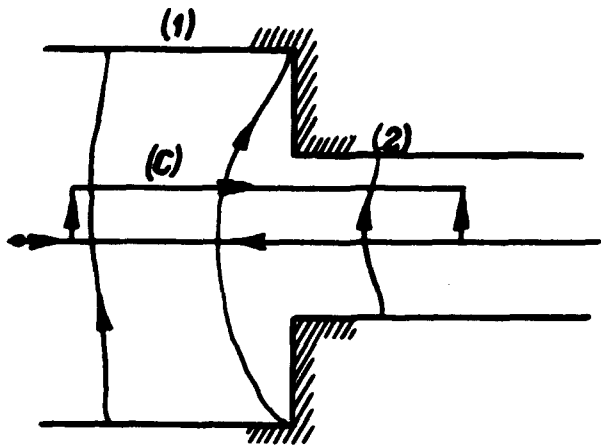
- Fig. 2 -



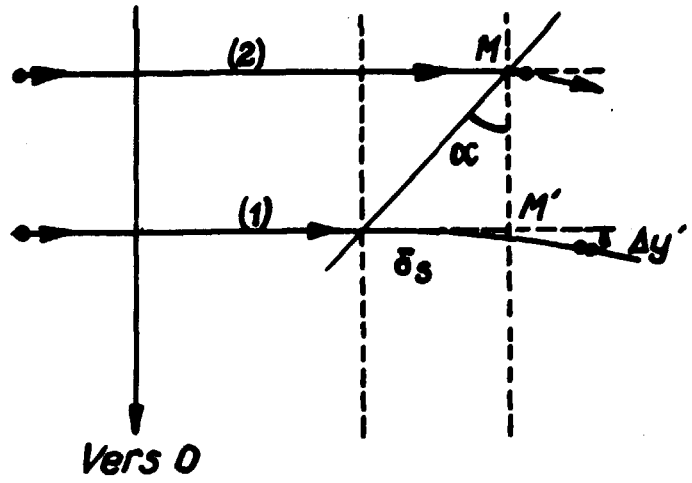
- Fig. 3 -



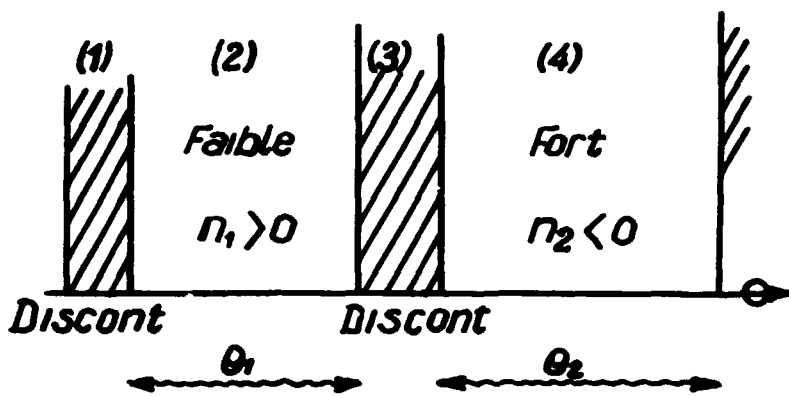
- Fig. 4 -



- Fig. 5 -



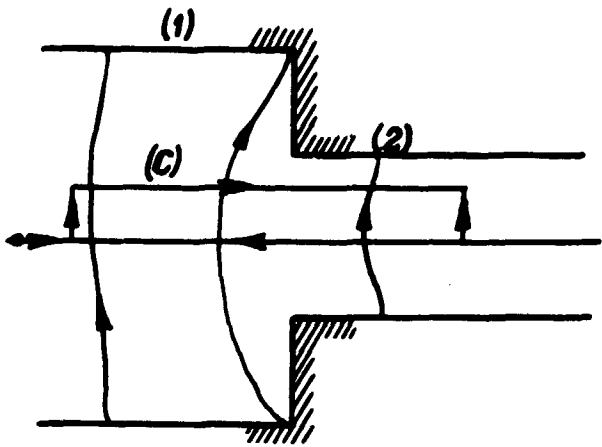
- Fig. 6 -



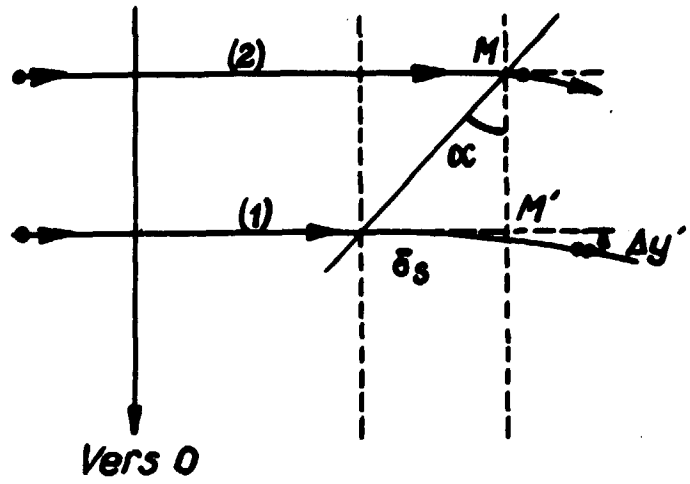
- Fig. 7 -



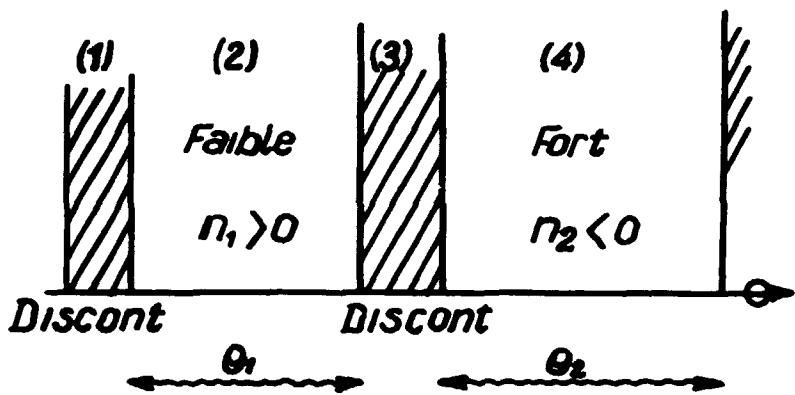
- Fig. 8 -



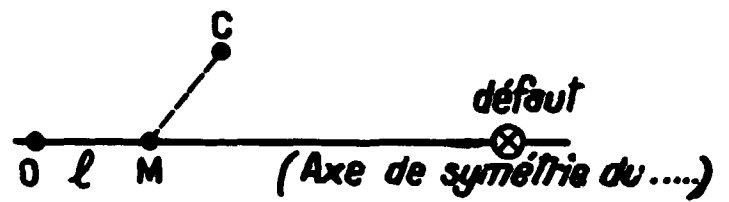
- Fig. 5 -



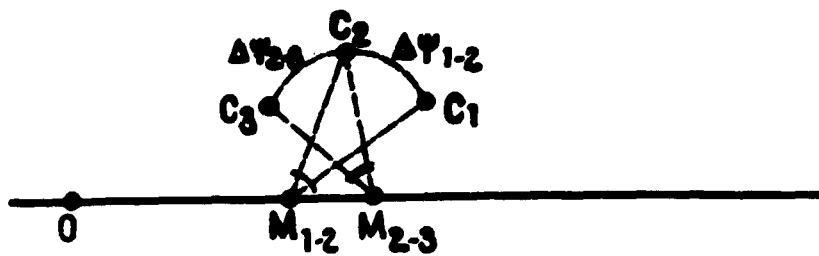
- Fig. 6 -



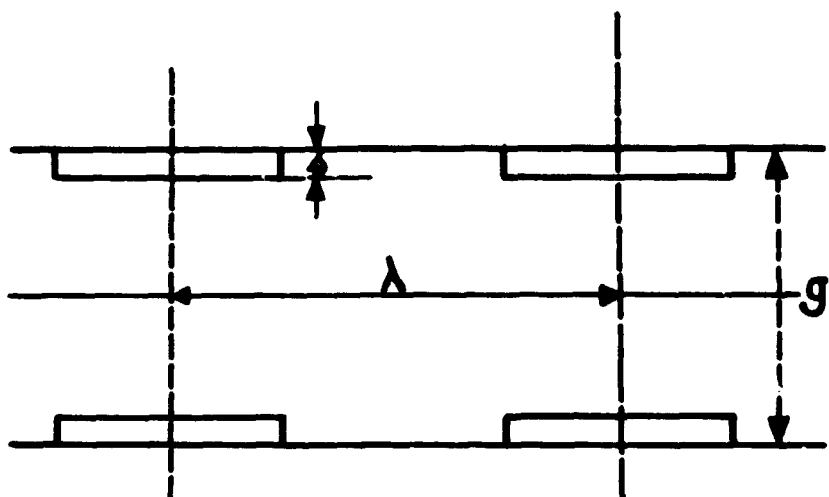
- Fig. 7 -



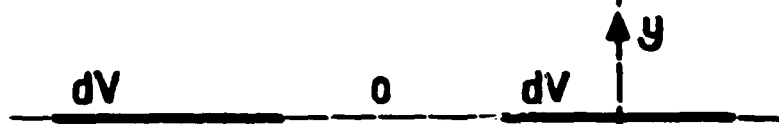
- Fig. 8 -



- Fig. 9 -



- Fig. 10 -



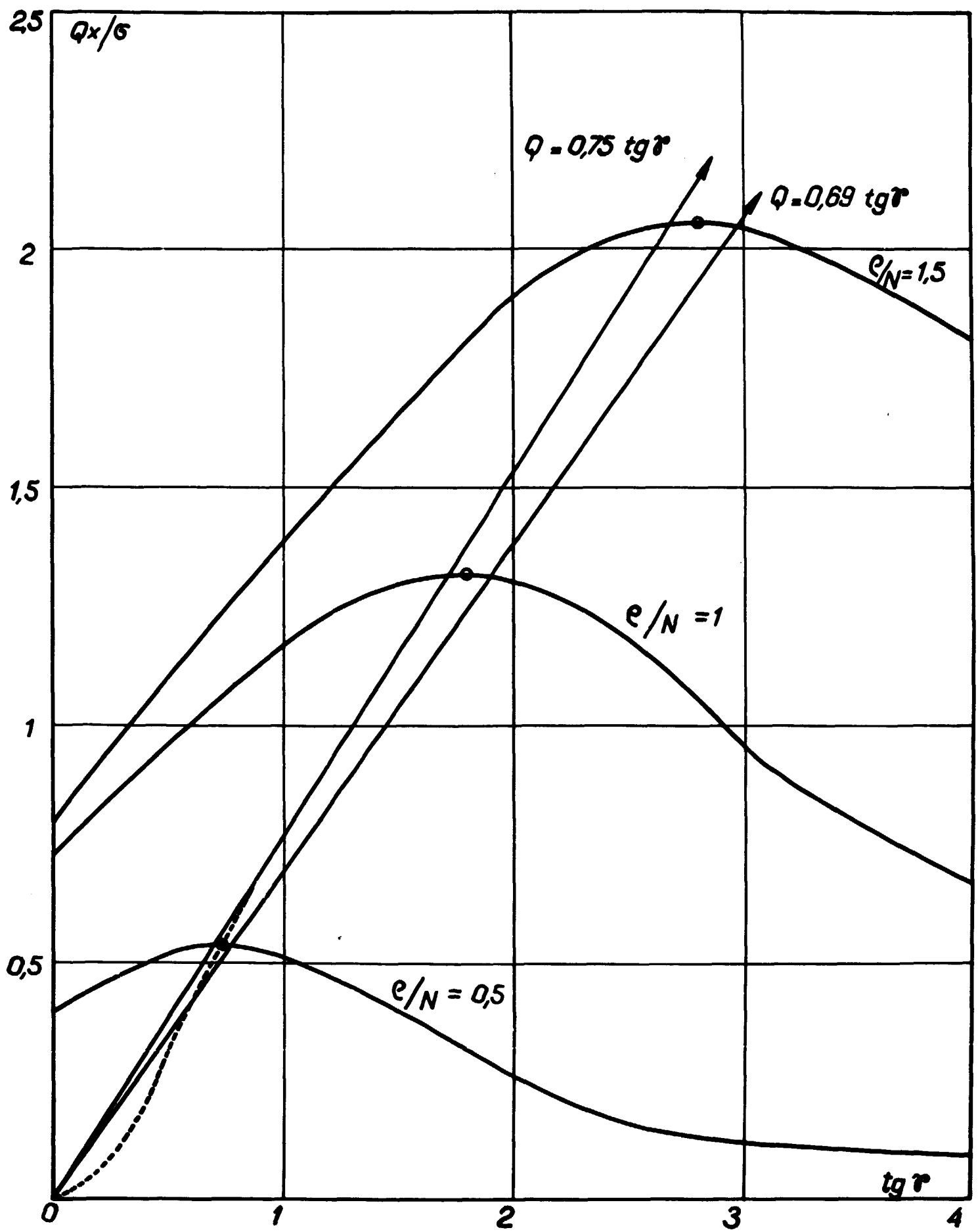
- Fig. 11 -



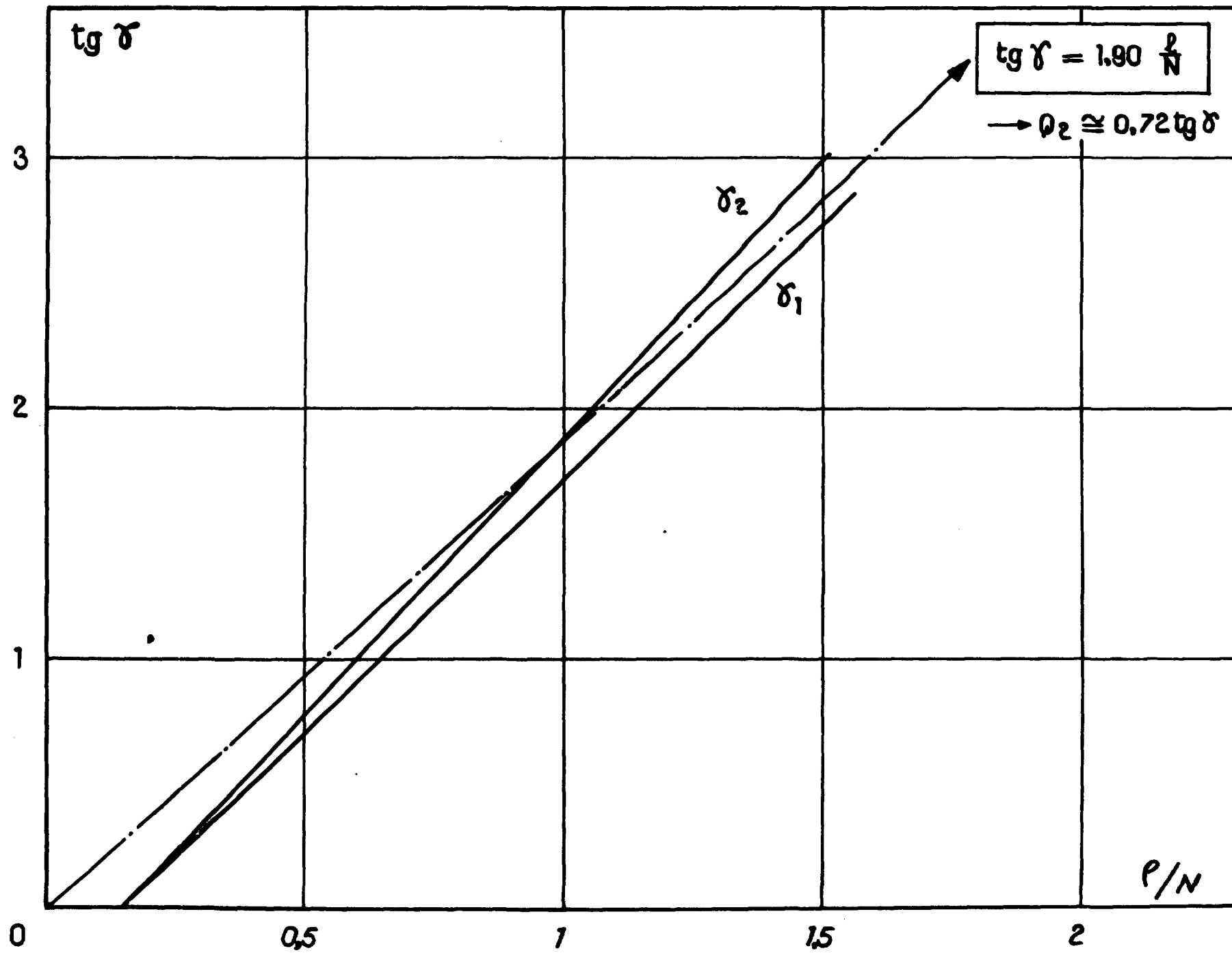
$$V \left(\frac{g}{2 \cdot 1 \infty} \right)$$



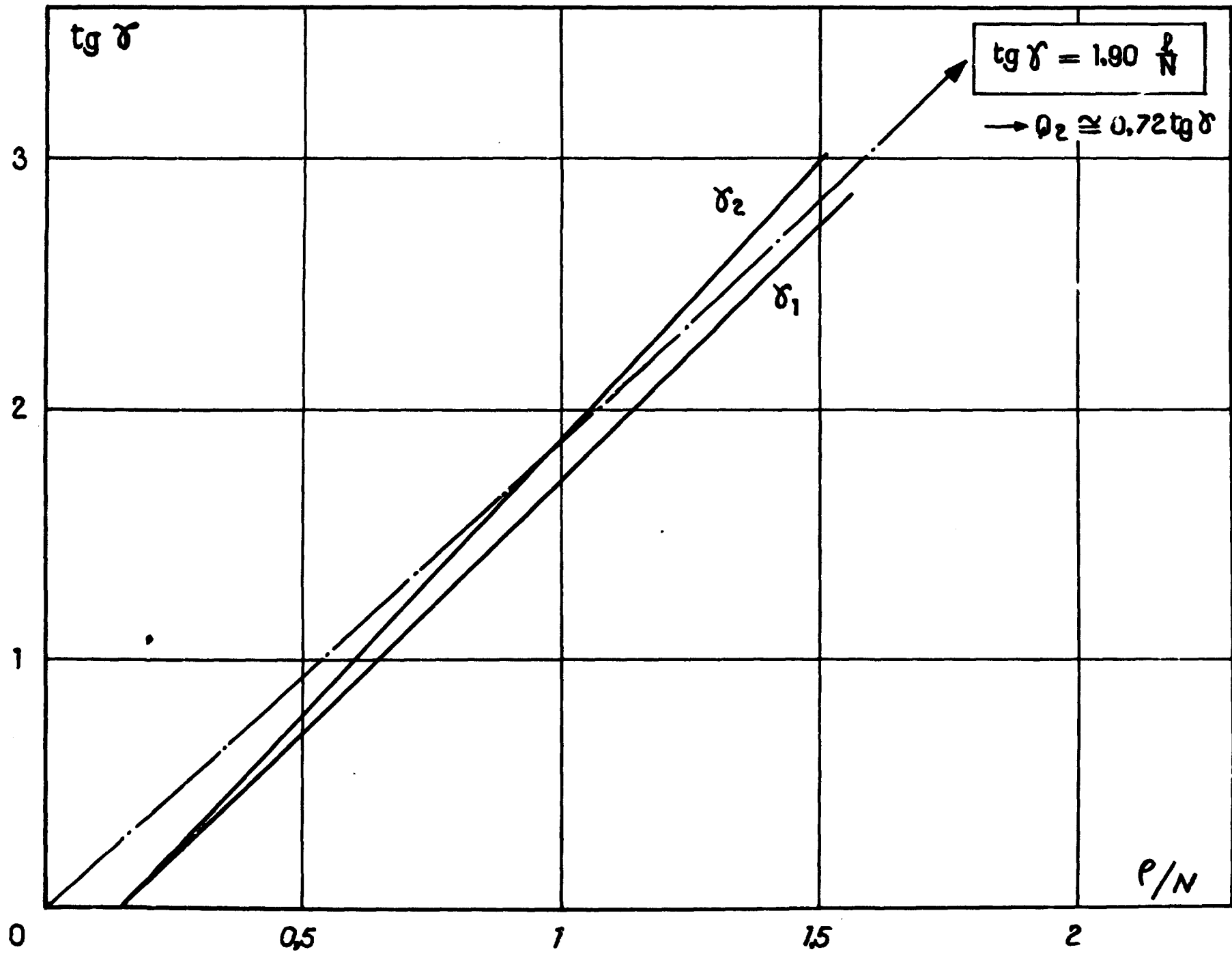
- Fig. 12 -



- Fig. 13 -



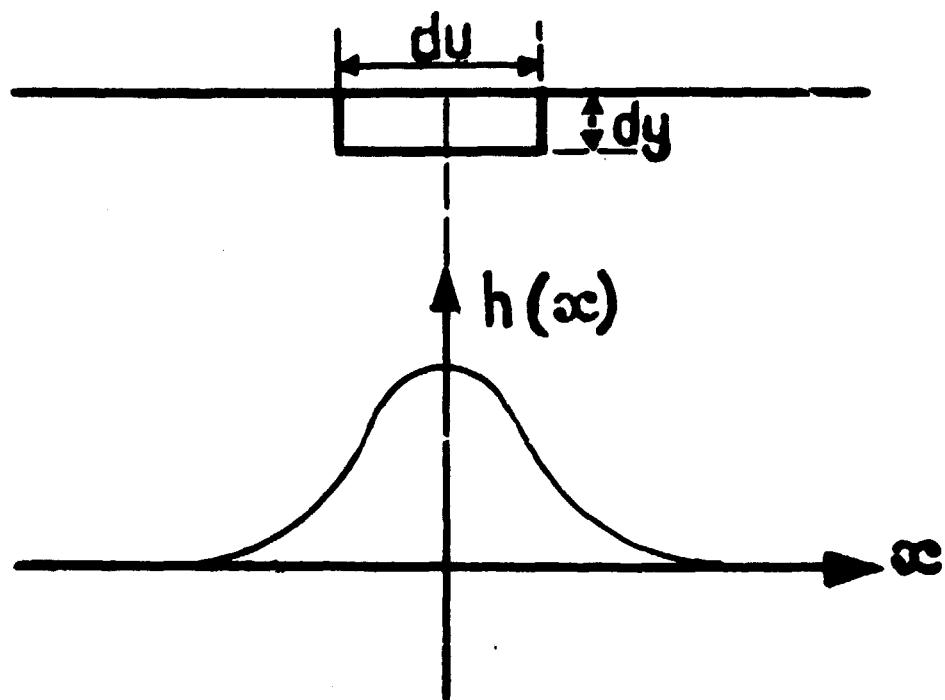
- Fig. 14 -



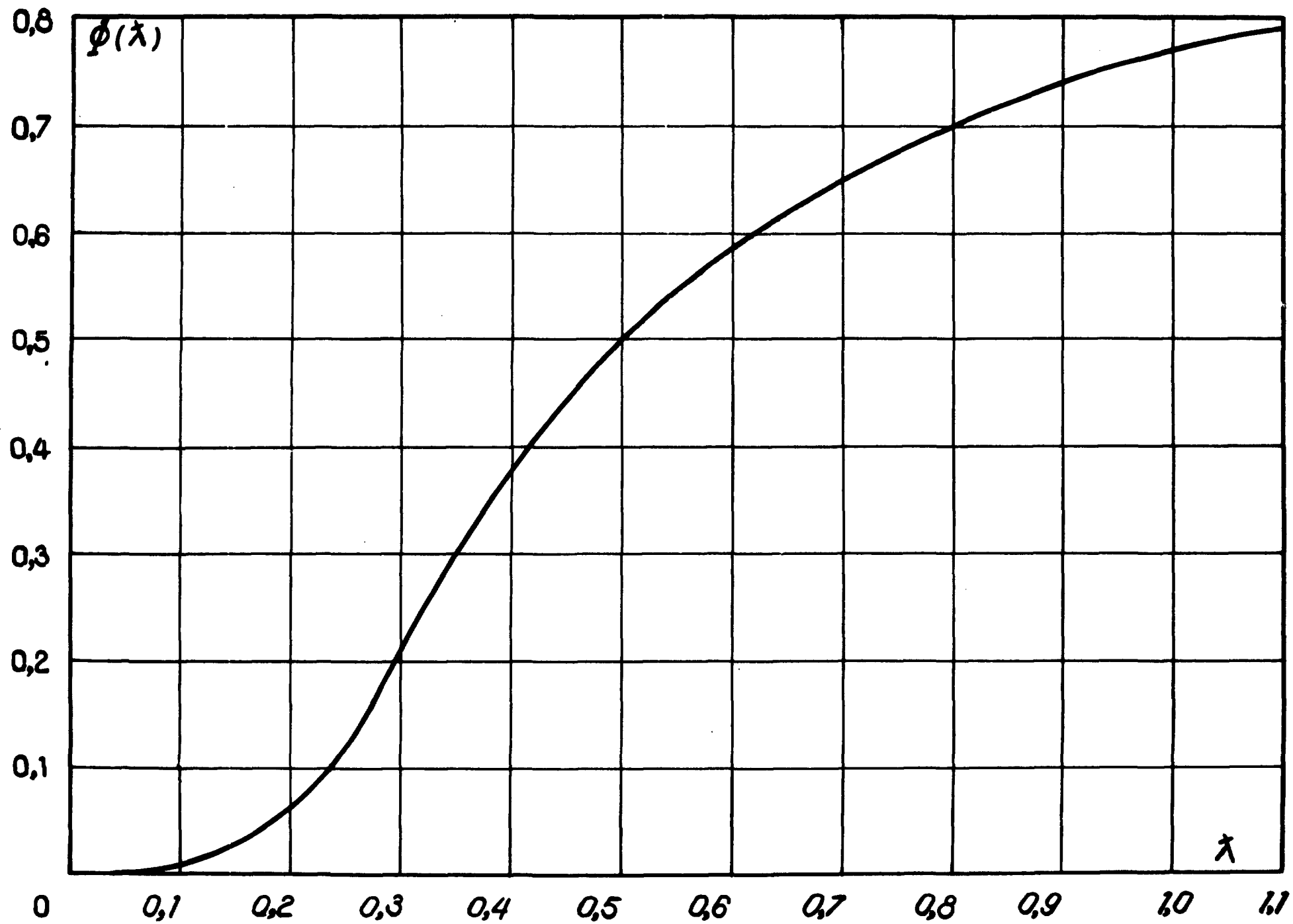
- Fig. 14 -



- Fig. 15 -



- Fig. 16 -



Courbe ϕ

FIN