

A. Paulin, I. Tičar, T. Zorič, K. Žnidaršič, N. Bezić  
 VTŠ Maribor, VTO Elektrotehnika  
 Smetanova 17, 62000 Maribor

SAOPŠTENJE

POKUŠAJ ANALITSKOG PRISTUPA K RJEŠAVANJU  
 SAMOFOKUSIRAJUĆEG SNOPA ČESTICA

AN ANALYTICAL APPROACH TO THE SOLUTION OF  
 IN-ITSELF STRONG FOCUSING BEAM

**SADRŽINA** - Saopštenje sadrži ocrtavanje problema, kako prikazati snop naelektranih čestica visoke struje i gustoće struje čestica, sa jednostavnim analitičkim izrazima. Spomenute su još principiijelne poteškoće kod rješavanja diferencijalne jednačbe za stacionarnu, aksialnu i radialnu distribuciju naelektranih čestica u snopu visoke struje i gustoće struje čestica. U svim izvodenjima se pretpostavlja, da je postignuta kompenzacija prostornog naboja sa povoljno sastavljenim snopom suprotno naelektranih čestica.

**ABSTRACT** - The aim of this paper is a description of the problem, how to represent the high current, high current density charged particle beam with straightforward analytical expressions. The principal difficulties in the solution of differential equation for a stationary, axial and radial distribution of charged particles in the high current, high current density beam are mentioned. In all the derivations, an accomplished space charge effects compensation with suitable combined beam of oppositely charged particles is assumed.

1. UVOD

Vremena, kad nije koristnik elektronskog ili ionskog snopa obračao pažnju na jačinu struje, odlaze u nepovrat. Kod akceleratora, termonuklearne i ne-termonuklearne fuzije te direktne konverzije kinetične energije naelektranih čestica u električnu energiju, su barem poželjne struje velikog broja čestica, ako te struje već nisu uopšte i uvjet. Problemi još izdaleka nisu riješeni.

Mogli bismo spomenuti, da je te probleme nanizao i nakazao J. D. Lawson /1/ u svojoj knjizi iz godine 1978. Zbog njihovih vanredno teških eksaktnih a takodjer i numeričkih rješavanja, pristupilo se najprije k eksperimentalnom

rješavanju i to naime po već u prvoj polovici našeg stoljeća poznatoj metodi. Kod prvih elektronskih osciloskopa je elektronski snop jurio kroz slabo evakuirano cev k ekranu. Preostali plin je utoliko ionizirao, da su pozitivni ioni neutralizirali prostorni naboj. Na taj način je u snopu ostao samo fokusirajući efekt magnetskog polja samog snopa. Ukoliko su stigle, neutralizirajuće čestice skupile su se tako, da odbojne sile nisu mogle nastupiti. Ta metoda se često upotrebljava kod injekcije u akceleratoru jakih struja čestica. Variranjem, a također i smanjivanjem, vakuuma može se menjati stupanj neutralizacije, a sa time i fokusacije snopa.

Medjutim, da li je slab vakuum uvijek poželjan i uopšte dopušten?! Kod jakih struja čestica i ev. traženih međusobnih nuklearnih reakcija čestica, najčešće ipak ne želimo slab vakuum i sa time u vezi nepotrební gubitak poželjnih čestica, a na račun nepoželjnih čestica. Rješavanje diferencijalne jednačbe distribucije poželjnih čestica u četverodimenzijonalnom prostoru kraja i vremena, a da bi postigli jak, fokusiran i stabilan snop čestica, je sve prije nego li lagano i jednostavno. Prema našim sadašnjim podacima opće rješenje takve diferencijalne jednačbe još ne postoji, ukoliko se ta diferencijalna jednačba uopšte može rješavati u svom pozitivnom smislu. Ako ne uzimamo u obzir eksperimentalno rješavanje /2/, postoje s našeg stanovišta dva pravca u traženju rješenja: analitsko i numeričko rješenje, a razumljivo još kombinacija obiju ili svih tri rješenja.

## 2. PROTUMAČENJE PRISTUPA K RJEŠAVANJU PROBLEMA

Sa ovim saopštenjem nastojimo nakazati problem analitskog rješavanja. Kroz na skroz pretpostavljamo, da su zbog prisustva, u samom snopu, električnih naboja oba predznaka odbojne /coulombske/ sile sasvim neutralizirane. Tako je snop prepušten samo sabirnim magnetskim silama u samoj struji čestica. Pretpostavimo idealiziranu, laminarnu struju cilindričkog oblika i posmatrajmo kretanje samo jedne čestice. Slijedeći korak jest, da uzimamo u obzir, da bi se sve čestice kretale na isti način kao već posmatrana jedna čestica. Nakon toga pogledajmo kakvu novu formu radijalnog presjeka strujne gustoće prouzrokuju takve zamišljene čestice. Ako bi bila njihova ovako određena distribucija jednaka onoj distribuciji, koju smo pretpostavili kod posmatranja jedne same

čestice, onda bi već imali stabilno rješenje ili barem labilno. Vidjeti ćemo, u slijedećim izvodjenjima, da to nije tako jednostavno.

### 3. IZVODJENJE OSNOVNIH IZRAZA

Pogledajmo najjednostavniji slučaj, kad je gustoća struje čestica jednako-  
komjerno porazdeljena preko cijelog presjeka /slika 1/. Radijalna, k središtu  
snopa usmjerena sila na statički neutralizirani snop jest

$$F = e \cdot v \cdot B, \text{ gdje je } e \text{ naboj čestice}$$

i  $v$  njegova brzina aksijalnog kretanja.  $B$  je gustoća magnetskog polja prouzroko-  
vana po struji čestica u snopu. Nakon substitucije  $B$  sa brzinom  $v$  elektrine u  
aksijalnom <sup>kretanju</sup> i sa gustoćom  $\rho$  te elektrine, slijedi za opći slučaj

$$F = e \cdot v^2 \mu_0 \frac{1}{x} \int_0^x \rho(\xi) \xi d\xi$$

gdje je  $x$  udaljenost od osi do posmatranog radiusa, a  $\rho(\xi)$  je gustoća naelektre-  
nih čestica kao funkcija od  $\xi$ ;  $\xi$  je integracijska promenljiva u pravcu radiusa  
snopa. Razumljivo jest, da smo kod ovog izvodjenja pretpostavljali, da se sve  
čestice kreću sa istom aksijalnom brzinom.

Uzimajući sada u obzir sa jedne strane radijalnu komponentu elektro-  
magnetske sile i relaciju iz mehanike o masi i ubrzanju, sa druge strane, a uz  
substituciju promenljivih u derivacijama po kraju i vremenu

$$\ddot{x} = v^2 \frac{d^2 x}{dz^2} = v^2 x'', \text{ dolazimo do jednačbe}$$

$$x'' + k f(x) = 0, \quad k = \frac{e \mu_0}{2 \pi m}, \quad f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \rho(\xi) 2 \pi \xi d\xi$$

Uzmimo sada jednostavni slučaj  $\rho(\xi) = \rho_0 = \text{konstanta}$ . Tada je  $f(x) = \pi \rho_0 x$   
i jednačba ima slijedeći oblik  $x'' + k x = 0$  gdje je

$$k = \frac{e \mu_0 \rho_0}{2 m}$$

Dobivamo poznato rješenje

$$x(z) = C_1 \cos(\sqrt{k} z) + C_2 \sin(\sqrt{k} z), \quad \sqrt{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

kao trajektorju jedne same čestice /slika 2/.

Očito jest dio struje čestica  $\Delta I$  u pravcu osi  $z$  najveći na maksimumu udaljenosti od oši /slika 3/. Rasijecimo sinusoide u jednakim, konačnim razmacima  $\Delta x$ . Onda je  $\Delta z$ , koji pripada određenom  $\Delta x$  različit, veći prema maksimumu i manji prema osi. Na temelju tog izvodjenja zapisati ćemo

$$\frac{\Delta z(x)}{\lambda} = \frac{\Delta I}{I},$$

gdje je  $\Delta I$  očito ona konačna "struja čestica", koja odgovara određenom  $\Delta z$ . Sa uvodjenjem

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \sin(\beta z) = \frac{x}{x_m}, \quad \text{gdje je } x_m \text{ najveća udaljenost trajektorije od osi}$$

$z$  dobivamo

$$\cos(\beta z) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_m}\right)^2}.$$

Odtud sledi izraz

$$\Delta I = \frac{I \Delta x}{2\pi x_m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_m}\right)^2}}.$$

Za gustoću struje čestica

$$i = \frac{\Delta I}{2\pi x \Delta z} \quad \text{imamo izraz} \quad i = \frac{I}{4\pi^2 x_m} \cdot \frac{1}{\frac{x}{x_m} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_m}\right)^2}}.$$

Histogram ovisnosti je nacrtan na slici 4. Očito ima gustoća u radialnoj ovisnosti dvije singularne točke. Te su u središtu snopa, t. j. u osi i na rubu snopa. Postignuto rješenje nije u suglasnosti sa pretpostavljenim rješenjem. Tako postignuto rješenje nije fizikalno rješenje, a niti nije približenje k rješenju za distribuciju gustoće.

Razumljivo jest, da s tim izvodjenjem nismo zaključili naša izlaganja. Postoji još vrlo veliki broj izbora početnog uvjeta k izvodjenju osnovnih relacija i izraza. Aksijalna i radialna distribucija gustoće čestica u snopu ima mnogo

moćućih realizacija, koje moćemo koristiti kao uvjet za  $\rho = \rho(x, z)$

U slućaju, da je  <sup>$\mu$</sup> gustoća struje sa radijalnom distribucijom u obliku parabole /slika 5/, dobivamo rješenje

$$\chi(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{K}(z+C_1)}, \quad K = \frac{e \mu_0 \rho_0}{4 \pi m \chi_m^2} \quad \text{gdje je } C_1 \text{ neka realna pozitivna}$$

integracijska konstanta. Slika 6 pokazuje trajektoriju jedne ćestice u ovisnosti od udaljenosti po osi  $z$ . Rezultat pokazuje, da trajektorija nigdje ne sijeće os  $z$ , a to znaći, da kod velikog broja ćestica, gustoća struje ne raste prema beskonaćnosti. Moćuće je pokazati, da je za ovaj slućaj gustoća struje odredjena izrazom

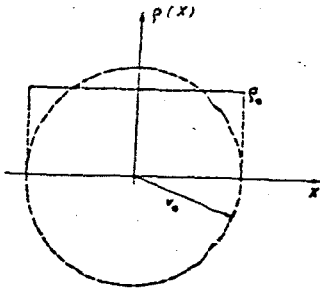
$$\rho(x) = \frac{K \Delta I}{2\pi \Delta z} |(z+C_1)|^3.$$

Potrebno je dakako spomenuti, da u navedenim izvodjenima posmatramo struju ćestica kao jednosmjernu i vremenski nepromenljivu. Medjutim danas u svijetu, na primjer kod Sandia Laboratory, New Mexico i kod Naval Research Laboratory u Sjedinjenim drćavama Amerike, postignute su gustoće struje ćestica od  $4 \text{ kA/mm}^2$ , ali samo u impulsima dućine, reda velićine 20 nanosekundi, na udaljenost do  $1 \frac{1}{2} \text{ m}$  od izvora snopa ćestica.

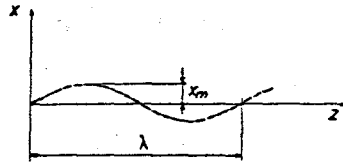
#### 4. ZAKLJUĆAK

Konaćne dimenzije velićina  $\Delta I, \Delta z$  i  $\Delta x$  u izrazima za struju ćestica i gustoću struje u snopu pokazuju radijalnu ovisnost gustoće sa singularnim toćkama u osi i na rubu snopa. Taj zakljućak utvrdjujemo samo na pretpostavkama, koje su navedene i protumaćene u ovom saopćtenju. Limitni slućaj u kojem spomenute tri velićine postaju proizvoljno malene, ne sadrić viće navedene singularne ovisnosti /3/.

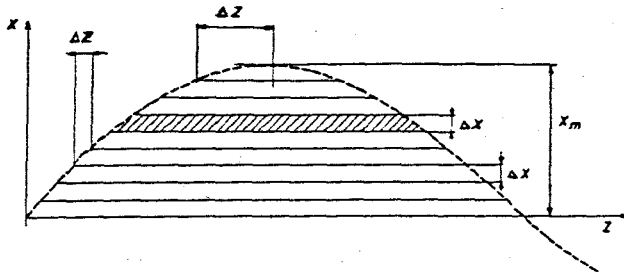
Analitićki smo takodjer pokazali, da postoji aplikativno rješenje problema za paraboliku radijalnu distribuciju gustoće. To rješenje ima kvalitativan znaćaj u svom sadašnjem obliku.



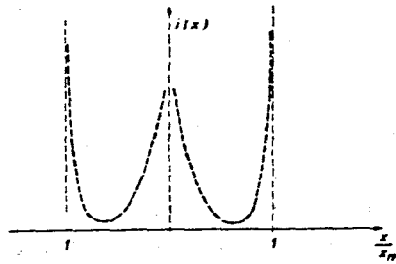
Slika 1



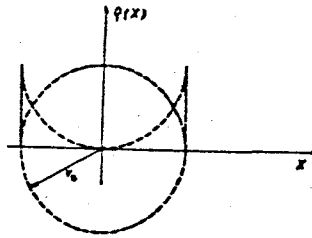
Slika 2



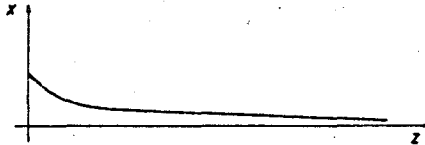
Slika 3



Slika 4



Slika 5



Slika 6

## 5. LITERATURA

- /1/ J. D. Lawson, The Physics of Charged-particle Beams,  
Oxford University Press, 1978.
- /2/ A. J. Toepfer, "Particle Beam Fusion", pp. 1 - 43 v knjigi  
Advances in Electronics and Electron Physics, vol. 53,  
1980, L. Marton, C. Marton, Editors.
- /3/ A. Paulin et al., /pripremljeno za publikaciju/.