

CEA 1686 - COSHEN S., PAZY A.

CALCUL DES BARRES DE CONTROLE DANS UN REACTEUR RECTANGULAIRE  
ET APPLICATIONS (1960).

Sommaire - Le but de ce rapport est de trouver une méthode pour estimer l'antiréactivité des barres de contrôle perpendiculaires à l'axe dans une pile cylindrique.

Le rapport se divise en deux parties. Dans la première nous donnons une méthode de calcul des barres de contrôle dans une pile rectangulaire, analogue à la méthode de Nordheim-Scalettar pour les piles cylindriques. A titre d'exemple, nous donnons les formules de théories à un et deux groupes de neutrons, la généralisation pour plusieurs groupes est évidente.

Dans la deuxième partie, nous trouvons, par une méthode de variation, une formule qui permet d'estimer le laplacien d'une pile, qui peut être divisée en parallélépipèdes dont les laplaciens sont donnés. Nous utilisons enfin, cette formule pour calculer l'antiréactivité des barres perpendiculaires à l'axe dans une pile cylindrique.

CEA 1686 - COSHEN S., PAZY A.

CALCULATION OF CONTROL RODS IN RECTANGULAR REACTOR, AND APPLICATIONS  
(1960).

Summary - The aim of this report is to find a method for estimating the antireactivity of control rods perpendicular to the axis in a cylindrical pile.

The paper is divided into two parts. In the first is given a method of calculating control rods in a rectangular pile, similar to the Nordheim-Scalettar method for cylindrical piles. As an example the formulas are given for the theories of one and two neutron groups, the generalisation for several groups being evident.

In the second part we find by a variation method a formula for estimating the laplacien of a pile, which may be divided into parallelepipeds for which the laplaciens are given. Finally, this formula is used to calculate the antireactivity of rods perpendicular to the axis in a cylindrical pile.

PREMIER MINISTRE  
COMMISSARIAT A  
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

**CALCUL DES BARRES DE CONTROLE DANS UN REACTEUR  
RECTANGULAIRE ET APPLICATIONS**

par

**S. GOSHEN et A. PAZY**

**Rapport CEA N° 1686**

**1960**

**CENTRE D'ÉTUDES  
NUCLÉAIRES DE SACLAY  
SERVICE DE DOCUMENTATION  
Boite postale n° 2 - Gif-sur-Yvette (S.-et-O.)**

**- Rapport C. E. A. n° 1686 -**

**Service de Physique Mathématique**

**CALCUL DES BARRES DE CONTROLE DANS UN REACTEUR  
RECTANGULAIRE ET APPLICATIONS**

**par**

**S. GOSHEN et A. PAZY**

**1960**

## CALCUL DES BARRES DE CONTROLE DANS UN REACTEUR RECTANGULAIRE ET APPLICATIONS

### INTRODUCTION

La méthode de Nordheim-Scaletter [1] permet de calculer l'efficacité d'un nombre quelconque de barres de contrôle dans un réacteur cylindrique et d'obtenir la solution analytique du flux, lorsque ces barres sont parallèles à l'axe du réacteur.

Nous avons recherché une solution analogue pour des barres de contrôle perpendiculaires à l'axe; ce cas se présente en effet fréquemment lorsqu'il s'agit d'un réacteur horizontal. Pour cela nous avons été amenés à traiter le problème des barres de contrôle dans un réacteur rectangulaire.

Les trois premières parties de ce rapport sont consacrées à la solution analytique de ce problème; la première utilise la théorie à un groupe de neutrons, la deuxième la théorie à deux groupes; la troisième partie comporte quelques exemples numériques.

Dans la quatrième partie nous proposons une méthode approchée qui permet, en utilisant les calculs précédents ou plus généralement les résultats de méthodes numériques en géométrie rectangulaire, de calculer l'antiréactivité d'un système de barres de contrôle perpendiculaires à l'axe d'un réacteur cylindrique.

## 1ère PARTIE

### 1 - Les équations et la solution formelle

Soit R un réacteur rectangulaire défini par les relations  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ . Admettons qu'il y ait n barres de contrôle aux points  $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$   $i = 1, 2, \dots, n$ , et que chaque barre puisse être représentée par une singularité logarithmique.

Le flux  $\phi$  sera une solution de l'équation :

$$(1) \quad \Delta \phi + \lambda \phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta(\zeta_i)$$

avec des conditions aux limites sur la frontière de R, que nous écrivons sous la forme :

$$(2) \quad \Lambda(\phi) = 0$$

Le  $\lambda$  est une valeur propre, donnant le "buckling" et  $\alpha_i$  est l'intensité de la barre i .

Développant  $\phi$  en fonctions propres, nous arrivons à l'expression :

$$\phi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m(x, y)}{\lambda - \lambda_m} \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_m(\zeta_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m(x, y) \psi_m(\zeta_i, \eta_i)}{\lambda - \lambda_m}$$

$$(3) \quad \phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x, y)$$

$\phi$  est donc une superposition de flux de la forme :

$$(4) \quad \Phi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m(x, y) \psi_m(\xi, \eta)}{\lambda - \lambda_m}$$

Le flux  $\Phi(x, y)$  est la solution de l'équation (1) avec une seule barre d'intensité  $\alpha = 1$  ; il suffit donc de considérer un réacteur avec une seule barre de contrôle.

La série (4) est convergente pour tous les points du rectangle R, sauf le point  $(\xi, \eta)$  où elle a une singularité logarithmique. Cette convergence est très lente au voisinage du point  $(\xi, \eta)$  et nous allons essayer de l'améliorer. Pour cela, nous écrivons le flux sous la forme :

$$(5) \quad \phi(x, y) = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m(x, y) \psi_m(\xi, \eta)}{\lambda_m} + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m(x, y) \psi_m(\xi, \eta)}{\lambda_m (\lambda - \lambda_m)}$$

Le premier membre est la fonction de Green du système, le deuxième est régulier et converge assez bien pour tous les points de R.

Ecrivons :

$$(5') \quad \phi(x, y) = - G(x, y, \xi, \eta) + \phi_0(x, y, \xi, \eta, \lambda)$$

La fonction  $\phi_0$  étant continue dans le rectangle R, ne varie pas beaucoup au voisinage de  $(\xi, \eta)$ . Dans ce voisinage  $G(x, y)$  a une symétrie cylindrique autour de  $(\xi, \eta)$  et par conséquent le flux  $\phi(x, y)$  a aussi cette symétrie autour de la barre. Nous utiliserons ce fait plus tard.

## 2 - Les conditions critiques

On peut montrer que la condition critique sur une barre de contrôle peut être écrite comme une condition d'annulation de flux sur une barre de rayon fictif  $\rho$ ,

$$(6) \quad \rho = r e^{-\mu/r}$$

où  $r$  est le rayon de la barre et  $\mu = \mu(r)$  la longueur d'extrapolation. Nous avons vu que le flux a une symétrie cylindrique autour de la barre; la condition critique s'écrit par conséquent :

$$(7) \quad \phi(\rho) = 0 \quad (*)$$

ou

$$(7') \quad G(\rho) = \phi_0(\xi, \eta, \zeta, \gamma, \lambda)$$

qui est une équation transcendante pour la valeur critique  $\lambda$ .

Dans le cas de plusieurs barres, le flux est donné par la formule :

$$(8) \quad \phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i [-G(x, y, \xi_i, \eta_i) + \phi_0(x, y, \xi_i, \eta_i, \lambda)]$$

et la condition critique est :

$$(9) \quad \phi(\rho_j) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

---

(\*) On ne peut écrire la condition sous cette forme que lorsque  $\rho \ll a$ ,  $\rho \ll b$ .

Les équations (9) sont un système de  $n$  équations linéaires homogènes à  $n$  inconnues  $\alpha_i$ . La valeur critique  $\lambda$  est trouvée par annulation du déterminant du système.

### 3 - Représentation de la fonction de Green et du flux

Comme la série

$$G(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m(x, y) \psi_m(\xi, \eta)}{\lambda_m}$$

représentant la fonction de Green, converge très mal au voisinage du point  $(\xi, \eta)$ , il est presque impossible de calculer la valeur critique  $\lambda$  et le flux  $\phi$  au moyen de cette formule. On doit donc trouver une autre représentation pour  $G$  qui sera plus pratique pour le calcul. Nous allons donner une représentation de  $G$  pour deux réacteurs rectangulaires avec différentes conditions aux limites.

#### I) Rideau infini de barres de contrôle

Pour réaliser un rideau infini des barres, on admet qu'on a une seule barre au point  $(\xi, \frac{b}{2})$  et on a en plus les conditions aux limites suivantes :

$$(I) \quad \begin{aligned} \phi(0, y) &= \phi(a, y) = 0 & 0 \leq y \leq b \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 & 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

Dans ce cas les fonctions propres sont :

$$(10) \quad \psi_{mk}(x, y) = \frac{2 \varepsilon_k}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m \pi}{a} x \cos \frac{k \pi}{b} y \quad \begin{aligned} \varepsilon_k &= 1 \quad k > 0 \\ \varepsilon_k &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad k = 0 \end{aligned}$$

et les valeurs propres correspondantes sont :

$$(11) \quad \lambda_{mk} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)$$



La partie régulière du flux sera donc :

$$(12) \quad \phi_0(x, y, z, \eta, \lambda) = \frac{4\lambda}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_a^2 \sin m \frac{\pi}{a} z \sin m \frac{\pi}{a} x \cos k \frac{\pi}{b} y \cos k \frac{\pi}{b} y}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right) \left(\frac{\lambda}{\pi^2} - \frac{m^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}\right)}$$

La partie irrégulière  $G$  est la solution de l'équation de Laplace avec une singularité logarithmique au point  $(z, \frac{b}{2})$  et remplissant les conditions aux limites :

$$(I') \quad \begin{aligned} G(0, y) &= G(a, y) = 0 & 0 \leq y \leq b \\ \frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 & 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

Pour trouver cette fonction, nous utilisons la méthode des images et nous cherchons une fonction  $G(x, y)$  doublement périodique dans le plan ayant des singularités logarithmiques positives aux points :

$$Z_{nm} = -\zeta + 2ma + (nb + \eta)i \quad \eta = \frac{b}{2}$$

et des singularités logarithmiques négatives aux points :

$$Z_{-n} = \zeta + 2ma + (nb + \eta)i \quad \eta = \frac{b}{2}$$

Nous regardons la fonction analytique associée à  $G$

$$W = G + iH$$

et pour nous débarrasser des singularités logarithmiques, nous étudions la fonction

$$f(z) = \exp [2\pi W]$$

la fonction  $f(z)$  est doublement périodique, elle possède des zéros (simples) aux points :

$$Z_{nm} = -\zeta + 2ma + \left(n + \frac{1}{2}\right) bi$$

et des pôles (simples) aux points :

$$z_{nm} = \zeta + \vartheta ma + \left(n + \frac{1}{2}\right) bi$$

et elle est analytique ailleurs

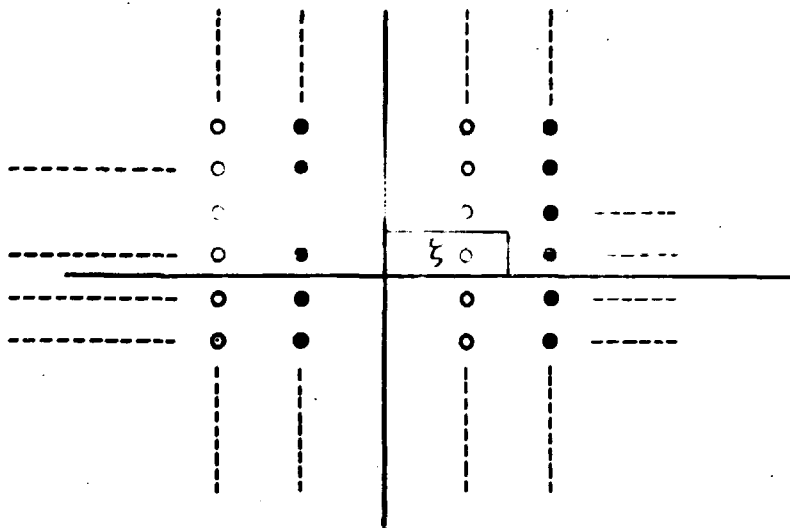


Fig. 1

On voit que la fonction

$$f(z) = \frac{\vartheta_1\left(\pi \frac{z+\bar{\zeta}}{\vartheta a} | \tau\right)}{\vartheta_1\left(\pi \frac{z-\zeta}{\vartheta a} | \tau\right)} \quad \tau = i \frac{b}{\vartheta a}$$

$$\zeta = \xi + i\eta = \xi + i \frac{b}{2}$$

$$z = x + iy$$

$$\bar{\zeta} = \xi - i\eta = \xi - i \frac{b}{2}$$

et

$$\vartheta_1(z) = \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin(\vartheta n+1) z \quad q = e^{\pi i \tau}$$

$\vartheta_1(z)$  est une des fonctions  $\vartheta$  qui sont utilisées dans la théorie des fonctions elliptiques [2], remplit les conditions imposées à  $f(z)$  et par conséquent :

$$(13) \quad G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{\vartheta_1\left(\pi \frac{z+\bar{\zeta}}{\vartheta a} | \tau\right)}{\vartheta_1\left(\pi \frac{z-\zeta}{\vartheta a} | \tau\right)}$$

En annexe 1, nous montrerons que la fonction G ci-dessus vérifie les conditions aux limites (I').

Le flux dans ce cas est donné par la formule :

$$(14) \quad \phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{\nu_1 \left( \frac{\pi(z+\xi)}{2a} | \tau \right)}{\nu_1 \left( \frac{\pi(z-\xi)}{2a} | \tau \right)} + \frac{4\lambda}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_k^2 \sin m \frac{\pi}{a} x \sin m \frac{\pi}{a} \xi \cos k \frac{\pi}{b} y \cos k \frac{\pi}{b} \frac{y}{b}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \left( \frac{1}{\pi^2} - \frac{m^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} \right)}$$

En utilisant le développement en série par rapport à  $z-\xi$  de la fonction  $\nu_1 \left( \frac{\pi(z-\xi)}{2a} | \tau \right)$  et en prenant un seul terme, nous trouvons :

$$(15) \quad \nu_1 \left( \frac{\pi(z-\xi)}{2a} | \tau \right) = \frac{\pi}{2a} (z-\xi) \nu_1'(0 | \tau)$$

La condition critique s'écrit donc :

$$(16) \quad \ln \left| \frac{\nu_1 \left( \frac{\pi \xi}{2a} | \tau \right)}{\frac{\pi}{2a} \rho \nu_1'(0 | \tau)} \right| = \frac{8\lambda}{\pi^3 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_k^2 \sin^2 m \frac{\pi}{a} \xi \cos^2 k \frac{\pi}{b}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \left( \frac{1}{\pi^2} - \frac{m^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} \right)}$$

## II) Cas d'une seule barre dans une pile finie

Dans le cas d'une seule barre de contrôle dans une pile rectangulaire, les conditions aux limites sont :

$$(II) \quad \phi(0, y) = \phi(a, y) = \phi(x, 0) = \phi(x, b) = 0$$

les fonctions propres sont :

$$(17) \quad \psi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin m \frac{\pi}{a} x \sin k \frac{\pi}{b} y$$

et les valeurs propres correspondantes :

$$(18) \quad \lambda_{mn} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)$$

La partie régulière du flux sera analogue à la partie régulière du cas précédent.

Utilisant à nouveau la méthode des images pour trouver la fonction G, nous sommes conduits à rechercher une fonction

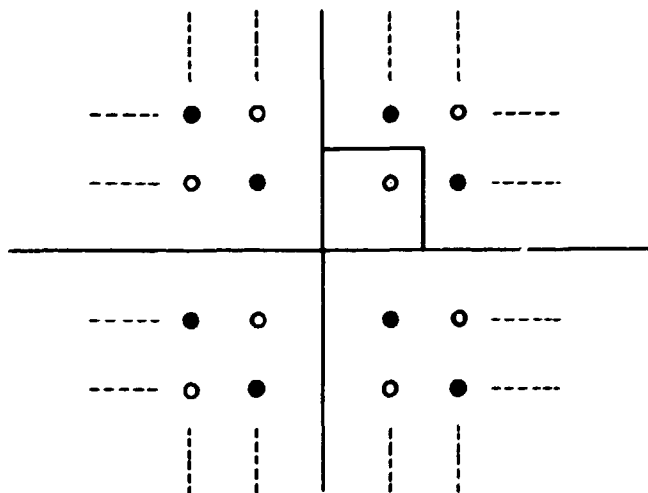


Fig. 2

qui a des zéros (simples) aux points noirs de la fig. 2 et des pôles (simples) aux points blancs.

Il n'est pas difficile de voir que la fonction :

$$(19) \quad f(z) = \left\{ \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi(z+\xi)}{2a} | \tau\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi(z-\bar{\xi})}{2a} | \tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi(z+\xi)}{2a} | \tau\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi(z-\xi)}{2a} | \tau\right)} \right\} \quad \tau = i \frac{b}{a}$$

remplit les conditions posées à  $f(z)$  et par conséquent :

$$(20) \quad G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \left\{ \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi(z+\bar{\xi})}{2a} | \tau\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi(z-\bar{\xi})}{2a} | \tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi(z+\xi)}{2a} | \tau\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi(z-\xi)}{2a} | \tau\right)} \right\}$$

La démonstration que  $G(x, y)$  vérifie les conditions aux limites

$$G(0, y) = G(a, y) = G(x, 0) = G(x, b) = 0$$

est analogue à la démonstration du théorème 1 annexe 1.

## 2ème PARTIE

### INTRODUCTION

La différence entre le calcul des barres de contrôle avec un ou deux groupes de neutrons est assez importante. Il est donc presque indispensable de pouvoir calculer l'efficacité des barres de contrôle avec une méthode à deux groupes.

Nous verrons dans cette partie que le calcul à deux groupes est une généralisation assez simple de la méthode donnée dans la première partie. Il n'est pas difficile de voir dans ce cas, comme dans le cas d'un seul groupe de neutrons, que la distribution du flux en présence de  $n$  barres de contrôle est une superposition de distributions du flux provenant d'une seule barre.

Nous allons donc traiter spécialement le cas d'une seule barre.

### 1 - Les équations et leurs solutions

Admettons que les barres se comportent comme un corps noir pour les neutrons thermiques et transparent pour les neutrons rapides.

Admettons, ensuite, comme dans la théorie à un groupe, que la barre puisse être représentée par une singularité logarithmique de flux thermique. Les flux seront donc les solutions des équations :

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta \phi_1 + a_{11} \phi_1 + a_{12} \phi_2 &= 0 \\ \Delta \phi_2 + a_{22} \phi_2 + a_{21} \phi_1 &= \int (\vec{x} - \vec{\xi}) \end{aligned}$$

Avec les définitions suivantes :

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{11} &= -\frac{\Sigma_1}{D_1} = -\frac{1}{L_1^2} & a_{12} &= k \frac{\Sigma_2}{D_1} \\ a_{22} &= -\frac{\Sigma_2}{D_2} = -\frac{1}{L_2^2} & a_{21} &= \frac{\Sigma_1}{D_2} \end{aligned}$$

et avec les conditions aux limites sur la frontière du rectangle, que nous écrivons sous la forme (\*)

$$(3) \quad \Lambda(\phi_1) = 0 \quad \Lambda(\phi_2) = 0$$

$k$  est une valeur propre; c'est la valeur qu'il faut donner au facteur multiplicatif de la pile, pour qu'en présence de la barre la pile soit juste critique. L'antiréactivité de la barre est définie par la relation :

$$\beta k = k - k_0$$

---

(\*) Nous admettons les mêmes conditions aux limites (sur la frontière de la pile) pour les flux rapides et thermique.

où  $k_0$  est le  $k$  effectif de la pile en l'absence de la barre.  
Les autres paramètres sont :

$D_1$  coefficient de diffusion pour le groupe rapide  
 $D_2$  coefficient de diffusion pour le groupe thermique  
 $\Sigma_1$  section efficace macroscopique de ralentissement  
 $\Sigma_2$  section efficace macroscopique d'absorption thermique.

Développant les flux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  en fonctions propres, nous trouvons les expressions suivantes :

$$(4) \quad \phi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{12} \psi_n(x, y) \psi_n(\xi, \eta)}{a_{11} a_{21} - (\lambda_n - a_{11})(\lambda_n - a_{22})}$$

$$(5) \quad \phi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n - a_{11}) \psi_n(x, y) \psi_n(\xi, \eta)}{a_{12} a_{21} - (\lambda_n - a_{11})(\lambda_n - a_{22})}$$

Le flux  $\phi_1$  est régulier et converge assez bien pour tous les points du rectangle  $R$ . Le flux thermique  $\phi_2$  converge pour tous les points de  $R$  sauf au point  $(\xi, \eta)$  où il a une singularité logarithmique.

La convergence de  $\phi_2$  au voisinage du point  $(\xi, \eta)$  est très lente et pour l'améliorer nous l'écrivons sous la forme :

$$(6) \quad \phi_2(x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\xi, \eta) \psi_n(x, y)}{\lambda_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\xi, \eta) \psi_n(x, y) [a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} - \lambda_n a_{22}]}{\lambda_n [(\lambda_n - a_{11})(\lambda_n - a_{22}) - a_{12} a_{21}]}$$

Le deuxième membre de cette série est régulier, et le premier est identique au flux irrégulier que nous avons obtenu dans la théorie à un groupe.

La différence entre le calcul à un ou deux groupes s'exprime donc seulement dans la partie régulière du flux.

2 - Cas d'une seule barre dans une pile finie

Dans le cas d'une seule barre de contrôle dans une pile rectangulaire, définie par les relations  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  ; les conditions aux limites sont :

$$\phi_i(0, y) = \phi_i(a, y) = \phi_i(x, 0) = \phi_i(x, b) = 0 \quad i = 1, 2$$

Les fonctions propres et les valeurs propres correspondantes sont les mêmes que dans le calcul à un groupe, et par conséquent le flux thermique est donné par la formule :

$$(7) \quad \phi_2(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \left\{ \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi(z+\bar{\xi})}{2a}|\tau\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi(z-\bar{\xi})}{2a}|\tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi(z+\xi)}{2a}|\tau\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi(z-\xi)}{2a}|\tau\right)} \right\} +$$

$$+ \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin m \frac{\pi}{a} x \cdot \sin m \frac{\pi}{a} \xi \cdot \sin k \frac{\pi}{b} y \cdot \sin k \frac{\pi}{b} \eta \left[ (k-1) - \lambda_{mk} L_3^2 \right]}{\lambda_{mk} \left[ k-1 - \lambda_{mk} (L^2 + L_3^2) - \lambda_{mk}^2 L^2 L_3^2 \right]}$$

où  $\tau = i \frac{b}{a}$

le flux rapide

$$(8) \quad \phi_2(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_2 \sin m \frac{\pi}{a} x \cdot \sin m \frac{\pi}{a} \xi \cdot \sin k \frac{\pi}{b} y \cdot \sin k \frac{\pi}{b} \eta}{\lambda_{mk} \left[ k-1 - \lambda_{mk} (L^2 + L_3^2) - \lambda_{mk}^2 L^2 L_3^2 \right]}$$

où  $\lambda_{mk} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)$

La condition critique s'écrit sous la forme :

$$(9) \quad \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi \xi}{2a}|\tau\right) \vartheta_1\left(\frac{i\pi \eta}{2a}|\tau\right) 2a}{\vartheta_1\left(\frac{\pi \xi}{2a}|\tau\right) \vartheta_1(0|\tau) \pi \rho} \right| = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 m \frac{\pi}{a} \xi \cdot \sin^2 k \frac{\pi}{b} \eta \left[ k-1 - \lambda_{mk} L_3^2 \right]}{\lambda_{mk} \left[ k-1 - \lambda_{mk} (L^2 + L_3^2) - \lambda_{mk}^2 L^2 L_3^2 \right]}$$

où  $\rho = r e^{-\mu h}$  est le rayon fictif de la barre,  $r$  est le rayon de la barre et  $\mu = \mu(\nu)$  la longueur d'extrapolation.



L'équation (9) est une équation transcendante pour la valeur critique  $k$ . Dans l'annexe 2 nous donnons une méthode d'itération pour résoudre cette équation.

3 - Antiréactivité d'une barre centrale dans une pile carrée.

Pour le cas d'une barre centrale dans une pile carrée l'équation (9) s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{3\pi} \ln \left| \frac{\mathcal{J}_1\left(\frac{\pi}{2}|i\right) \mathcal{J}_1\left(\frac{i\pi}{2}|i\right) 2a}{\mathcal{J}_1\left(\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}|i\right) \mathcal{J}_1\left(0|i\right) \pi \rho} \right| = \frac{4}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 m \frac{\pi}{2} \sin^2 k \frac{\pi}{2} [k-1 - \lambda_{mk} L_3^2]}{\lambda_{mk} [k-1 - \lambda_{mk} (L^2 + L_3^2) - \lambda_{mk} L^2 L_3^2]}$$

Après quelques transformations, et en prenant une première approximation pour la série, nous trouvons la formule suivante :

$$k = 1 + \frac{\frac{2\pi^2}{a^2} \left[ (L^2 + L_3^2) + \frac{2\pi^2}{a^2} L^2 L_3^2 \right] \left\{ \ln \frac{a}{\rho} + \ln \left| \frac{2}{\pi} \mathcal{J}_1^{-2}(0|i) \right| \right\} - \frac{4}{\pi} L_3^2}{\ln \frac{a}{\rho} + \ln \left| \frac{2}{\pi} \mathcal{J}_1^{-2}(0|i) \right| - \frac{4}{\pi}}$$

rappelons maintenant que

$$k_0 = 1 + \frac{2\pi^2}{a^2} \left[ (L^2 + L_3^2) + \frac{2\pi^2}{a^2} L^2 L_3^2 \right]$$

et par conséquent

$$(10) \quad \delta k = \frac{1,273 \left( 1 + \frac{2\pi^2}{a^2} L_3^2 \right)}{\left( 1 + \frac{L_3^2}{L^2} + \frac{2\pi^2}{a^2} L_3^2 \right) \left( \ln \frac{a}{\rho} - 1,891 \right)}$$

cette formule donne une petite sous-estimation de  $\delta k$ .

4 - Quatre barres symétriques par rapport au centre de la pile

Soit R la pile donnée dans la figure 3.

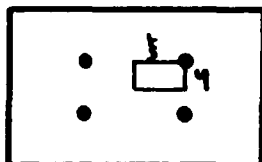


Fig. 3

Les coordonnées des barres sont :

$$\zeta_1 = \left(\frac{a}{2} + \xi, \frac{b}{2} + \eta\right); \zeta_2 = \left(\frac{a}{2} - \xi, \frac{b}{2} + \eta\right); \zeta_3 = \left(\frac{a}{2} + \xi, \frac{b}{2} - \eta\right); \zeta_4 = \left(\frac{a}{2} - \xi, \frac{b}{2} - \eta\right)$$

Par raisons de symétrie les intensités  $\alpha$  des 4 barres sont égales :

Définissons :

$$\theta_i(x, y) = \frac{\vartheta_1\left(\pi \frac{z + \bar{\zeta}_i}{2a} / \tau\right) \vartheta_1\left(\pi \frac{z - \bar{\zeta}_i}{2a} / \tau\right)}{\vartheta_1\left(\pi \frac{z + \zeta_i}{2a} / \tau\right) \vartheta_1\left(\pi \frac{z - \zeta_i}{2a} / \tau\right)} \quad \tau = i \frac{b}{a}$$

$$\beta_{2m+1, 2k+1} = \frac{(2m+1)b^2 + (2k+1)a^2}{b^2 + a^2} ; L_s^{2+} = \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right) L_s^2$$

$$L^{2+} = \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right) L^2 ; k^* = k-1 ; z = x + iy$$

avec ces définitions les flux s'écrivent de la façon suivante :

$$(11) \quad \phi_1(x, y) = \frac{16kbD_2}{ab \sum} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k} \cos(2m+1)\frac{\pi}{a}\xi \cos(2k+1)\frac{\pi}{b}\eta \sin(2m+1)\frac{\pi}{a}x \sin(2k+1)\frac{\pi}{b}y}{k^* - (L_s^{2+} + L^{2+}) \beta_{2m+1, 2k+1} - L_s^{2+} L^{2+} \beta_{2m+1, 2k+1}^2}$$

$$(12) \quad \phi_2(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4| +$$

$$+ \frac{16ab}{\pi^2(a^2+b^2)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k} [k^* - \beta_{2m+1, 2k+1} L_s^{2+}] \cos(2m+1)\frac{\pi}{a}\xi \cos(2k+1)\frac{\pi}{b}\eta \sin(2m+1)\frac{\pi}{a}x \sin(2k+1)\frac{\pi}{b}y}{\beta_{2m+1, 2k+1} [k^* - (L_s^{2+} + L^{2+}) \beta_{2m+1, 2k+1} - L_s^{2+} L^{2+} \beta_{2m+1, 2k+1}^2]}$$

La condition critique peut être écrit sous la forme :

$$(13) \quad \phi_2(\zeta_1) = \phi_2\left(\frac{a}{2} + \xi, \frac{b}{2} + \eta\right) = 0$$

où au lieu de  $\theta$  dans la formule (12), nous écrivons :

$$\theta'_i = \frac{\vartheta_1\left(\pi \frac{\zeta_1 + \bar{\zeta}_i}{2a} / \tau\right) \vartheta_1\left(\pi \frac{\zeta_1 - \bar{\zeta}_i}{2a} / \tau\right) 2a}{\vartheta_1\left(\pi \frac{\zeta_1}{a} / \tau\right) \vartheta_1'(0/\tau) \pi \beta}$$

### 3ème PARTIE

#### 1 - Comparaison entre la théorie à un et deux groupes

En première approximation l'efficacité de l'absorption des neutrons thermiques est proportionnelle à leur contribution dans les fuites. Lorsqu'on passe d'un calcul à un groupe à un calcul à deux groupes, l'efficacité de la barre est multipliée par un facteur d'environ  $\frac{L^2}{L^2 + L_1^2}$

Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de ces différences nous avons fait un calcul pour une pile carrée dont le  $L^2/L_1^2$  et  $\frac{L^2 + L_1^2}{\alpha} : 0,6$ , et nous avons obtenu les résultats donnés dans la figure 4.

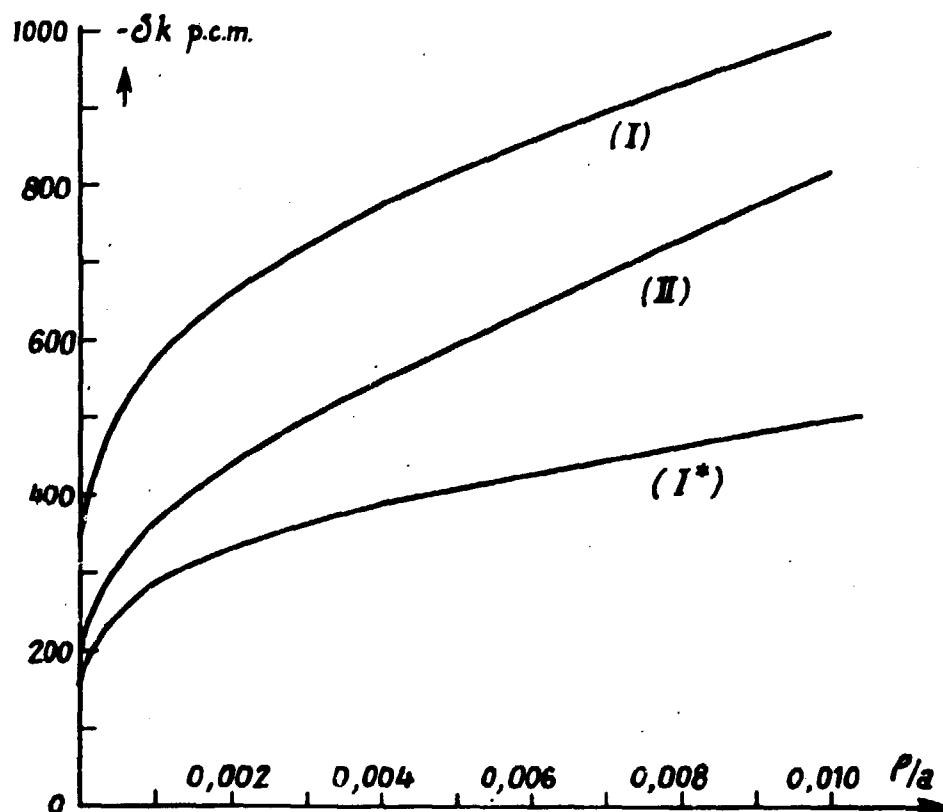


Fig. 4

La courbe I donne les résultats de la théorie à un groupe; la courbe II les résultats de la théorie à deux groupes et la courbe I\* les résultats de la théorie à un groupe corrigés par un facteur de  $\frac{L^2}{L^2 + L_2^2}$ . On voit donc que la théorie à un groupe donne toujours une surestimation de l'antiréactivité d'une barre, et le calcul à un groupe corrigé par un facteur de  $L^2/\eta^2$  donne une sous-estimation de cette antiréactivité.

Il est intéressant de comparer les flux thermiques résultants d'un calcul à un et deux groupes. Nous avons calculé le flux thermique de la pile donnée au paragraphe 3 de cette partie, par les deux théories. Les résultats de ce calcul sont représentés dans les figures 6 et 10. On y aperçoit tout de suite que les barres sont beaucoup plus efficaces dans le calcul à un groupe. Cela se voit par les gradients du flux qui sont plus élevés au voisinage de la barre et à la frontière du réacteur, dans le calcul à un groupe que dans le calcul à deux groupes.

2 - La loi de pondération par le carré du flux

Dans la théorie de perturbation on trouve, pour une barre pas trop absorbante, que l'antiréactivité de la barre varie comme le carré du flux non perturbé. Cette loi n'est plus vraie pour des barres de contrôle qui sont très absorbantes. Pour avoir une idée sur l'ordre de grandeur de la déviation de cette loi de pondération par le carré du flux, nous avons calculé l'antiréactivité d'une barre de contrôle  $\rho = 2$  cm (correspond à une barre de  $r = 3,6$  cm pour une pile à eau lourde) dans une pile rectangulaire  $a = 500$  cm, dont le  $L^2, L^2_j = 150$  cm Les résultats sont les suivants :

Coordonnée de la barre	$\frac{\delta k}{k}$ p.c.m.(exact)	$\frac{\delta k}{k}$ p.c.m.(loi du carré)	déviatiion %
250,250	538,8	538,8	0
250,200	470,0	478,3	3,7
250,150	319,1	352,6	10,5
250,100	165,3	186,2	12,6
250,50	50,0	51,5	3,0
200,200	412,9	440,8	6,8
150,150	200,0	230,8	15,4
100,100	57,0	64,0	12,3
50,50	5,1	5,0	-2,0

On aperçoit que la loi de pondération par le carré du flux donne une surestimation de l'antiréactivité de la barre.

3 - Quelques remarques sur la comparaison entre la méthode proposée et les méthodes numériques

Nous avons calculé le cas d'une pile rectangulaire  $a = 490$  cm,  $b = 460$  cm,  $L^2 = 162$  cm<sup>2</sup>,  $L^2_j = 156$  cm<sup>2</sup> avec 4 barres de contrôle de rayon  $r = 4$  cm placées comme dans la figure 5.

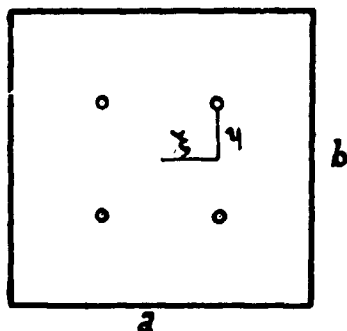


Fig. 5

avec  $\xi = \eta = 40$  cm, par la méthode proposée dans ce rapport et par le code PDQ. Par les deux méthodes nous avons trouvé exactement la même perte de réactivité, soit une perte de 2300 p.c.m. Les flux déterminés par les deux méthodes sont presque identiques. Ces flux sont représentés dans les figures 6, 7 et 8.

Nous avons comparé aussi un calcul à un groupe par la méthode proposée dans ce rapport avec le code CURE et les résultats ont été également très satisfaisants. Quelques courbes de flux de ce cas,  $a = 860$ ,  $b = 560$ ,  $\rho = 0,53$ , avec la barre placée au point (330, 280) sont données dans les figures 11, 12 et 13.

Il est intéressant d'ajouter qu'avec la méthode proposée dans ce rapport il est possible de calculer le  $k$  effectif d'une pile sans calculer le flux, ce qui n'est pas le cas dans les méthodes numériques. Le temps de calcul d'une valeur de  $k$  effectif dans un cas moyen est de l'ordre de deux minutes, ce qui est donc très avantageux si on n'a pas besoin de déterminer le flux. Un calcul de ce genre est donné dans la quatrième partie de ce rapport. Le calcul du flux est un peu plus long, on doit compter environ cinq secondes par point, sur une machine de l'ordre du type FERRANTI-MERCURY.

#### 4ème PARTIE

##### INTRODUCTION

Le calcul d'une pile cylindrique comportant des barres de contrôle perpendiculaires à l'axe est un problème à trois dimensions dont la solution exacte est très difficile.

On peut essayer de trouver une estimation de l'anti-réactivité d'un réseau de barres par des méthodes homogènes [3]. Ces méthodes donnent des résultats relativement satisfaisants pour des réseaux réguliers et par conséquent pour un grand nombre de barres; mais lorsque ce nombre est petit on ne peut guère les utiliser.

Dans cette partie nous proposons une méthode approchée qui permet de calculer l'antiréactivité d'un nombre quelconque de barres. On utilise pour cela les résultats des première et deuxième parties.

1 - Formules

Soit R un réacteur cylindrique.

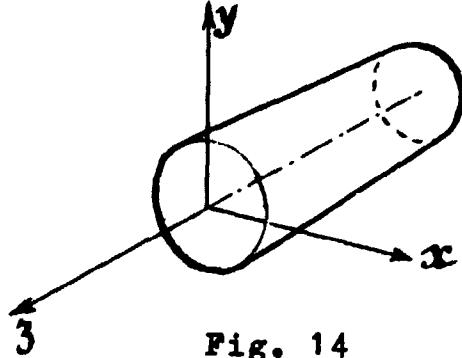


Fig. 14

Le flux  $\phi$  sera une solution de l'équation

$$(1) \quad \Delta \phi + \beta^2 \phi = 0$$

avec des conditions aux limites sur la frontière S de R que nous écrivons sous la forme :

$$(2) \quad \phi(S) = 0$$

$\beta^2$  est la valeur propre, donnant le laplacien du réacteur. Il est bien connu que :

$$(3) \quad \beta^2 = \underset{\psi}{\text{Min}} \frac{\iiint_R \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz}{\iiint_R \psi^2 dx dy dz}$$

en considérant toutes les fonctions  $\psi$  ayant des dérivées partielles, du 1<sup>er</sup> ordre, continues et remplissant les conditions aux limites

$$(4) \quad \psi(S) = 0$$

Coupons maintenant le cylindre par un plan parallèle au plan  $xz$ , et soit  $F(y)$  le rectangle obtenu.



soit  $f$  la solution de l'équation

$$(5) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + B^2 y f = 0$$

dans  $F(y)$ ,  $f$  s'annule sur la frontière de  $F(y)$ . Admettons ensuite que  $f$  remplisse la condition de normalisation.

$$(6) \quad \iint_{F(y)} f^2 dx dz = \iint_{F(y)} \phi^2 dx dz$$

On a aussi

$$(7) \quad B^2 y = \text{Min}_q \frac{\iint_{F(y)} \left[ \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz}{\iint_{F(y)} q^2 dx dz}$$

Si

$$(8) \quad C_y^2 = \frac{\iint_{F(y)} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz}{\iint_{F(y)} \phi^2 dx dz}$$

alors il est certain que

$$(9) \quad C_y^2 \geq B^2 y$$

et que

$$(10) \quad B^2 = \frac{\iiint_R C_y^2 \phi^2 dx dy dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} + \frac{\iiint_R \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 dx dy dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz}$$

Nous choisissons maintenant  $f$  comme fonction d'essai pour trouver une valeur approximative de  $B^2$ .

$$(11) \quad B_{\text{ap}}^2 = \frac{\int_y B_y^2 \iint_{F(y)} f^2 dx dz}{\iint_y f^2 dx dy dz} + \frac{\iiint_R \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 dx dy dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz}$$

$$= \frac{\int_y B_y^2 dy \iint_{F(y)} \phi^2 dx dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} + \frac{\iiint_R \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 dx dy dz}{\iiint_R f^2 dx dy dz}$$

De l'équation (9) on déduit :

$$(12) \quad \frac{\int_y B_y^2 dy \iint_{F(y)} \phi^2 dx dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} \leq \frac{\int_y C_y^2 dy \iint_{F(y)} \phi^2 dx dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz}$$

et par conséquent

$$\frac{\int_y B^2 y dy \iint_{F(y)} \phi^2 dx dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} + \frac{\iiint_R \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 dx dy dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} \leq B^2 \leq \frac{\int_y B^2 y dy \iint_{F(y)} \phi^2 dx dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} + \frac{\iiint_R \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 dx dy dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz}$$

Si  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  n'est pas très différent de  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  on peut prendre

$$(13) \quad B_{ap}^2 = \frac{\int_y B^2 y dy \iint_{F(y)} \phi^2 dx dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} + \frac{\iiint_R \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 dx dy dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz}$$

comme une approximation de  $B^2$ , dans ce cas on aura toujours

$$(14) \quad B_{ap}^2 \leq B^2$$

Dans le cas d'une pile cylindrique sans barre

$$(15) \quad \frac{\iiint_R \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 dx dy dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} = \frac{j_0^2}{2R_c^2}$$

où  $j_0$  est le premier zéro de la fonction Bessel  $J_0(x)$  et  $R_c$  est le rayon extrapolé du réacteur.

De (15) on déduit :

$$(16) \quad B_{ap}^2 = \frac{\int_y B^2 y dy \iint_{F(y)} \phi^2 dx dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} + \frac{j_0^2}{2R_c^2}$$

L'approximation (13) est toujours une sous-estimation de  $B^2$ , mais dans la plupart des cas pratiques elle donne des résultats très satisfaisants.

Dans le cas d'une pile cylindrique ayant des barres parallèles à  $y$  on peut faire le même calcul et on obtient :

$$B_{ap}^2 = \frac{\int_y B^2 y dy \iint_{F(y)} \phi^2 dx dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} + \frac{\iiint_R \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 dx dy dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz}$$

comme la barre est dans la direction de  $y$  l'approximation :

$$(17) \quad \frac{\iint_{F(y)} \phi^2 dx dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} \doteq \frac{\iint_{F(y)} \Phi^2 dx dz}{\iiint_R \Phi^2 dx dy dz}$$

où  $\Phi$  est le flux dans la pile sans barre, est admissible. En plus on peut aussi admettre que  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  n'a pas beaucoup changé et que l'approximation

$$(18) \quad \frac{\iiint_R \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 dx dy dz}{\iiint_R \phi^2 dx dy dz} \doteq \frac{J_0^2}{2R_0^2}$$

reste valable.

Avec ces approximations on obtient pour  $B^2$  la formule suivante :

$$(19) \quad B_{\text{ap}}^2 = \frac{\int_y B_y^2 dy \iint_{F(y)} \Phi^2 dx dz}{\iiint_R \Phi^2 dx dy dz} + \frac{J_0^2}{2R_0^2}$$

En prenant une formule discrète pour l'intégrale sur  $y$  on arrive à la formule :

$$(19') \quad B_{\text{ap}}^2 = \sum_{i=1}^n a_i B_{y_i}^2 + \frac{J_0^2}{2R_0^2}$$

où

$$a_i = \frac{\int_{y_{i-1}}^{y_i} dy \iint_{F(y)} \Phi^2 dx dz}{\iiint_R \Phi^2 dx dy dz}$$

## 2 - Exemple numérique

Comme exemple nous avons choisi la pile suivante :

Longueur de la pile 460 cm

Rayon 245 cm

$L^2 = 162 \text{ cm}^2$

$L^2_S = 156 \text{ cm}^2$

Le rayon des barres de contrôle est 4 cm.

Nous avons calculé les coefficients  $a_i$  pour une approximation de la pile par 20 parallélépipèdes. A cause de la symétrie il y a seulement 10 valeurs différentes de  $a_i$  qui sont données dans le tableau suivant :

$i$	$h_i$	$l_i$	$a_i$
$\pm 1$	$\pm 12,5$	489	0,11284
$\pm 2$	$\pm 37,5$	484	0,10532
$\pm 3$	$\pm 62,5$	474	0,09142
$\pm 4$	$\pm 87,5$	458	0,07324
$\pm 5$	$\pm 112,5$	435	0,05339
$\pm 6$	$\pm 137,5$	406	0,03457
$\pm 7$	$\pm 162,5$	367	0,01899
$\pm 8$	$\pm 187,5$	315	0,00805
$\pm 9$	$\pm 212,5$	244	0,00206
$\pm 10$	$\pm 235,0$	133	0,00012

où  $h_i$  est la hauteur du plan médian du parallélépipède  $i$  par rapport au plan médian de la pile et  $l_i$  est la largeur de ce parallélépipède.

Pour cette pile nous avons calculé l'efficacité d'un groupe de quatre barres symétriques par rapport au centre de la pile, en fonction de la distance  $A$  entre elles. Les valeurs des laplaciens partiels sont données dans le tableau suivant\*.

---

\* les valeurs de ce tableau doivent être multipliées par  $10^{-4}$

i	$\Delta = 60$	$\Delta = 80$	$\Delta = 100$	$\Delta = 120$	$\Delta = 140$
1	1.5538	1.6090	1.6269	1.6014	1.5355
2	1.5716	1.6272	1.6446	1.6174	1.5493
3	1.6084	1.6650	1.6810	1.6504	1.5775
4	1.6711	1.7289	1.7425	1.7059	1.6246
5	1.7706	1.8296	1.8389	1.7915	1.6971
6	1.9140	1.9741	1.9748	1.9194	1.7980
7	2.1475	2.2053	2.1898	2.0981	1.9594
8	2.5599	2.6058	2.5544	2.4110	2.2194
9	3.4573	3.4556	3.3112	3.0581	2.7840
10	7.8876	6.3364	6.3364	6.3364	6.3364
$\sum a_i B_i^2$	1.6809	1.7369	1.7486	1.7098	1.6278

$$M^2 = 318 \text{ cm}^2 ; \quad \frac{f^2}{2R_c^2} = 0.4815 \times 10^{-4}$$

$$\text{et} \quad k - 1 = \left( \sum_{i=10}^{+10} a_i B_i^2 + \frac{f^2}{2R_c^2} \right) M^2$$

avec la dernière formule nous avons calculé les valeurs de  $\frac{k-1}{k}$  qui sont représentées sur la figure 15.

### Remerciements

Nous tenons à remercier M. HOROWITZ et M. BALLY du BOIS pour les diverses discussions que nous avons eues avec eux pendant toute la durée de ce travail.

ANNEXE I

Théorème 1

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(z+\bar{z})}{2a} \middle| \tau \right)}{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(z-\bar{z})}{2a} \middle| \tau \right)} \Rightarrow G(0, iy) = G(a, iy) = 0$$

Démonstration

Il suffit de démontrer pour les points  $z = iy$ , pour les points  $z = a + iy$  le résultat est évident en raison de la périodicité des zéros des fonctions  $\vartheta_1$ .

$$\frac{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(iy+\bar{z})}{2a} \middle| \tau \right)}{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(iy-\bar{z})}{2a} \middle| \tau \right)} = - \frac{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(\bar{z}-iy)}{2a} \middle| \tau \right)}{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(\bar{z}+iy)}{2a} \middle| \tau \right)} = - \frac{\overline{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(\bar{z}-iy)}{2a} \middle| \tau \right)}}{\overline{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(\bar{z}+iy)}{2a} \middle| \tau \right)}} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(iy+\bar{z})}{2a} \middle| \tau \right)}{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(iy-\bar{z})}{2a} \middle| \tau \right)} \right| = 1 \Leftrightarrow G(0, iy) = 0$$

Théorème 2

Soit  $G(x, y)$  la fonction définie au théorème 1, alors pour  $z = x$ ,  $z = x + ib$ , on a  $\frac{\partial G}{\partial y} = 0$

Démonstration

Il suffit de démontrer que  $\frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(z+\bar{z})}{2a} \middle| \tau \right)}{\vartheta_1 \left( \frac{\pi(z-\bar{z})}{2a} \middle| \tau \right)} \right|_{y=ib} = 0$

Pour les points  $y=0$  ; on obtient de résultat en raison de la périodicité de la fonction

$$\frac{\mathcal{D}_i \left( \frac{\pi(\bar{z} + \xi)}{2a} \middle| \tau \right)}{\mathcal{D}_i \left( \frac{\pi(\bar{z} - \xi)}{2a} \middle| \tau \right)}$$

considérée comme fonction de  $y$ .

Rappelons maintenant que  $\eta = \frac{1}{2} \sigma$  et  $\tau = \frac{b}{2\sigma} i$ , et écrivons :

$$\begin{aligned} f(y+ib) &= \frac{\mathcal{D}_i \left( \frac{\pi}{2a}(x+\xi) + \frac{\pi}{2a} y i + \frac{\pi}{4} \frac{b}{a} i \right)}{\mathcal{D}_i \left( \frac{\pi}{2a}(x-\xi) + \frac{\pi}{2a} y i + \frac{\pi}{4} \frac{b}{a} i \right)} \left| \exp \left[ -\frac{\pi}{2a}(x+\xi) i + \frac{\pi}{2a} y \right] \mathcal{D}_i \left( \frac{\pi}{2a}(x+\xi) + \frac{\pi}{2a} y i \right) \right. \\ &= \frac{\mathcal{D}_i \left( \frac{\pi}{2a}(x+\xi) + \frac{\pi}{2a} y i \right)}{\mathcal{D}_i \left( \frac{\pi}{2a}(x-\xi) + \frac{\pi}{2a} y i \right)} \end{aligned}$$

mais  $\mathcal{D}_i(\bar{z}) = \overline{\mathcal{D}_i(z)}$  et par conséquent :

$$f(y+ib) = f(-y+ib) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=bi} = 0$$

ANNEXE 2

La condition critique, formule (9) 2ème partie, peut être écrite sous la forme :

$$(1) \quad T_0 = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{4ab} \ln \left| \frac{\eta_1 \left( \frac{\pi}{2} \middle| \tau \right) \eta_1 \left( i \frac{\pi}{2} \middle| \tau \right) 2a}{\eta_1 \left( \frac{\pi}{2} \middle| \tau \right) \eta_1'(0/\tau) \pi f} \right| =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^* - \beta_{mk} L_s^{*2}) S_{mk}}{\beta_{mk} [k^* - \beta_{mk} (L^{*2} + L_s^{*2}) - \beta_{mk}^2 L^{*2} L_s^{*2}]}$$

où  $\beta_{mk} = \frac{m^2 b^2 + k^2 a^2}{b^2 + a^2}$   $S_{mk} = \sin^2 m \frac{\pi}{2} \xi \sin^2 k \frac{\pi}{b} \eta$

$$L^{*2} = \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) L^2 \quad L_s^{*2} = \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) L_s^2$$

$$k^* = k - 1.$$

Il n'est pas difficile de démontrer que, quand  $a \geq b$  la racine la plus petite de l'équation (1) se trouve entre  $k_1 = k_0 - 1 - L^{*2} + L_s^{*2} + L^{*2} L_s^{*2}$ , où  $k_0$  est le  $k$  effectif de la pile sans barre, et  $k_2 = \beta_{01} (L^{*2} + L_s^{*2}) \beta_{11} L^{*2} L_s^{*2}$  qui donne la deuxième valeur propre de la pile sans barre.

On aperçoit que les deux premiers termes de la série sont les plus importants, c'est pourquoi il est naturel d'utiliser la méthode d'itération suivante :



$$(I) \quad k_n^{*2} \left[ T_n - S_1 - \frac{S_{11}}{\beta_{21}} \right] + k_n^* \left[ L_i^{*2} (S_{11} + S_{21}) + S_{11} k_2 + \frac{S_{11}}{\beta_{21}} k_1 - T_n (k_1 + k_2) \right] + k_1 k_2 T_n - L_i^{*2} (S_{11} k_2 + S_{21} k_1) = 0$$

$$(II) \quad k_1 \leq k_n^* < k_2$$

$$(III) \quad T_{n+1} - T_n = T_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(k_n^* - \beta_{m\kappa} L_i^{*2}) S_{m\kappa}}{\beta_{m\kappa} [k_n^* - \beta_{m\kappa} (L_i^{*2} + L_j^{*2}) - \beta_{m\kappa}^2 L_i^{*2} L_j^{*2}]}$$

Cette méthode donne des résultats satisfaisants. Dans la plupart des cas 4 itérations suffisent pour avoir des résultats avec 5 chiffres significatifs.

Manuscrit reçu le 11 août 1960.

BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] L.W. NORDHEIM and R. SCALETTER, Theory of Pile Controls  
MDDC - 42 (1946); aussi Phys. Rev., 70, 115 (1946)
  
- [ 2 ] E.T. WITTAKER and G.N. WATSON, A course of modern analysis  
chapter XXI
  
- [ 3 ] R. DELAYRE, les barres de contrôle - Rapport S.P.M. N° 542  
(1959)

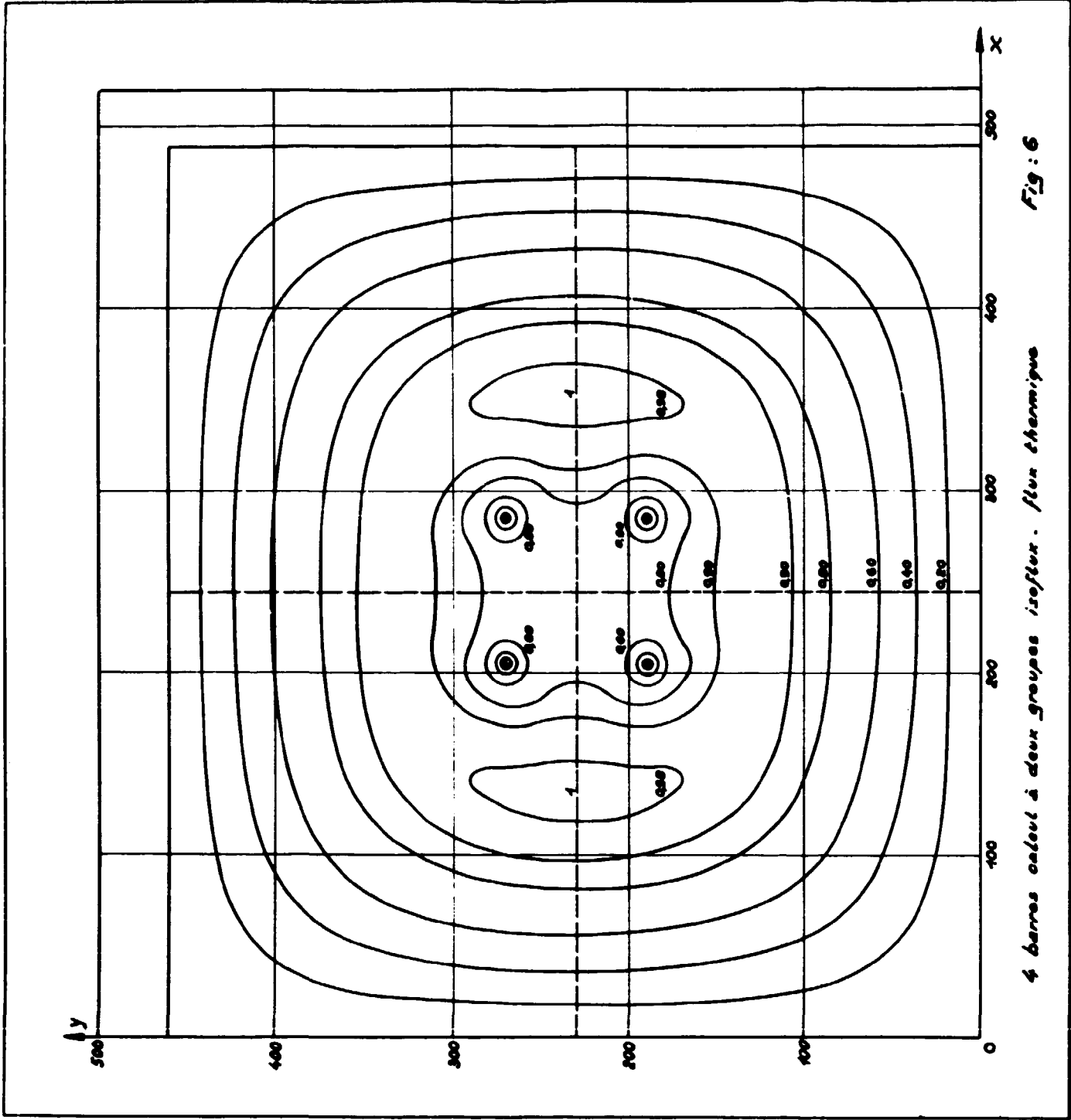


Fig: 6

4 barras calef. à deux groupes isoflux. flux thermique

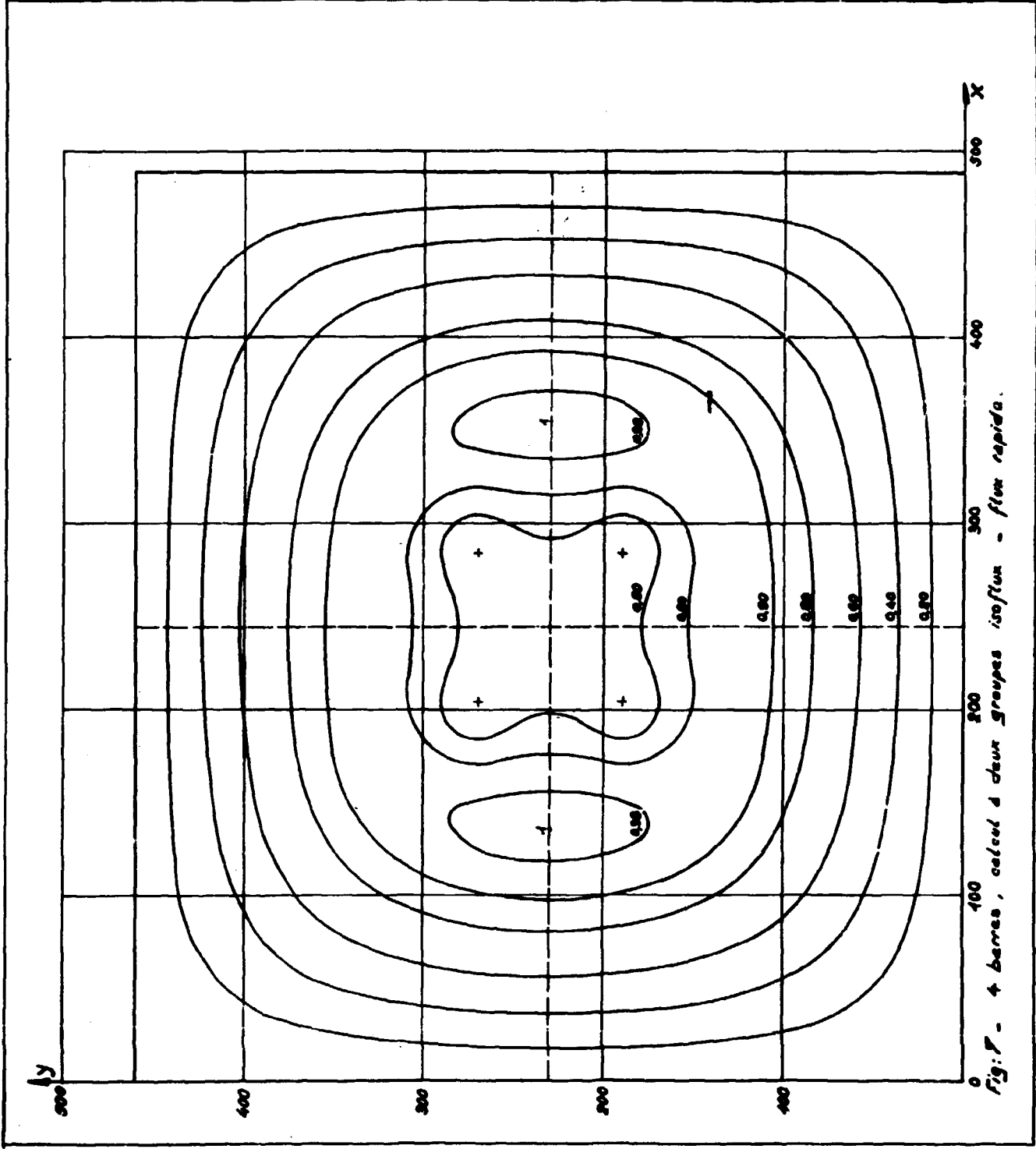
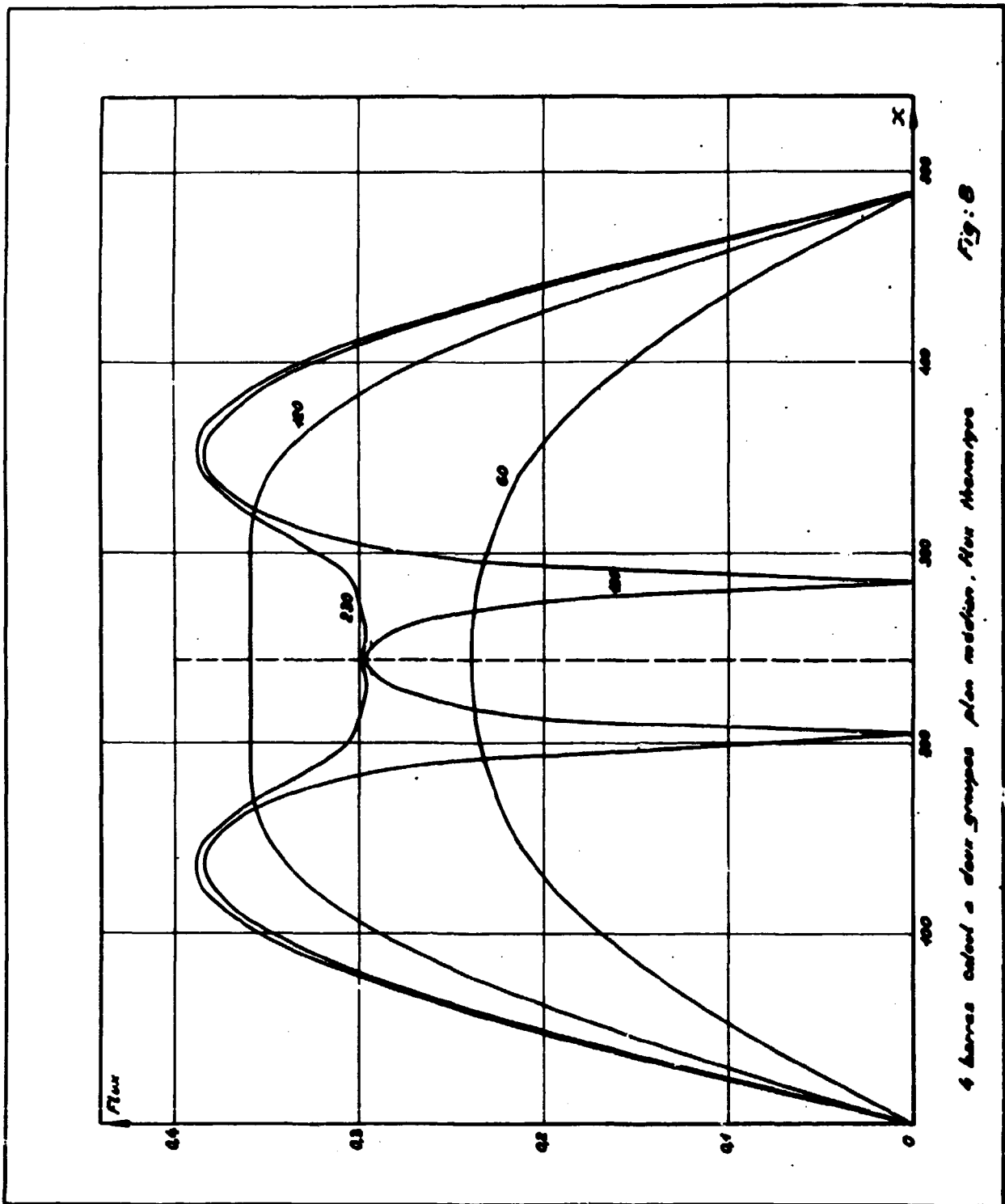


Fig: 7 - + barres, calcul d deux groupes iso flux - flux rapida.



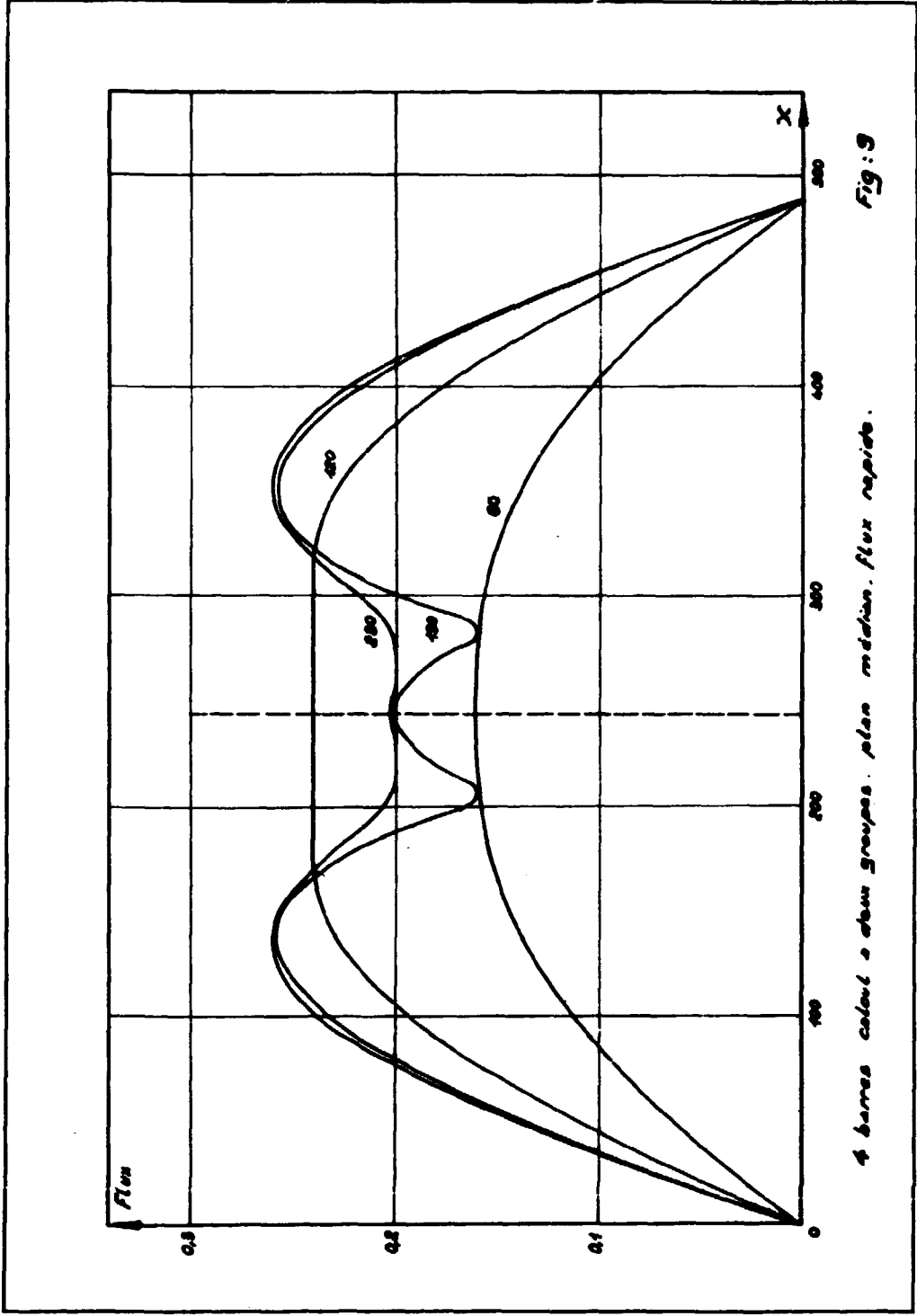


Fig: 9

4 barres calcul e deux groupes. plan median. flux rapide.

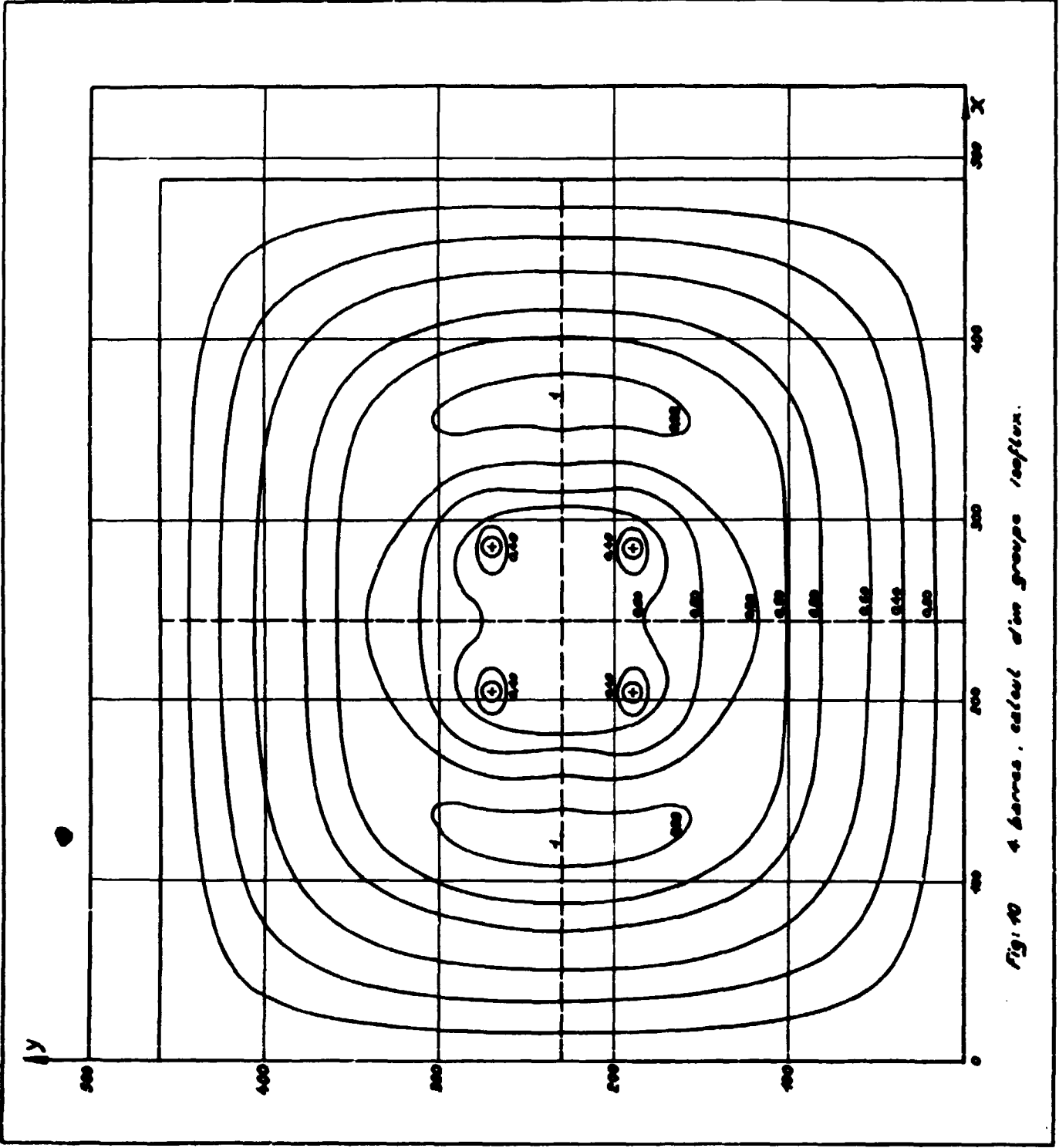


Fig: 10 4 barres, calcul d'un groupe isoflux.

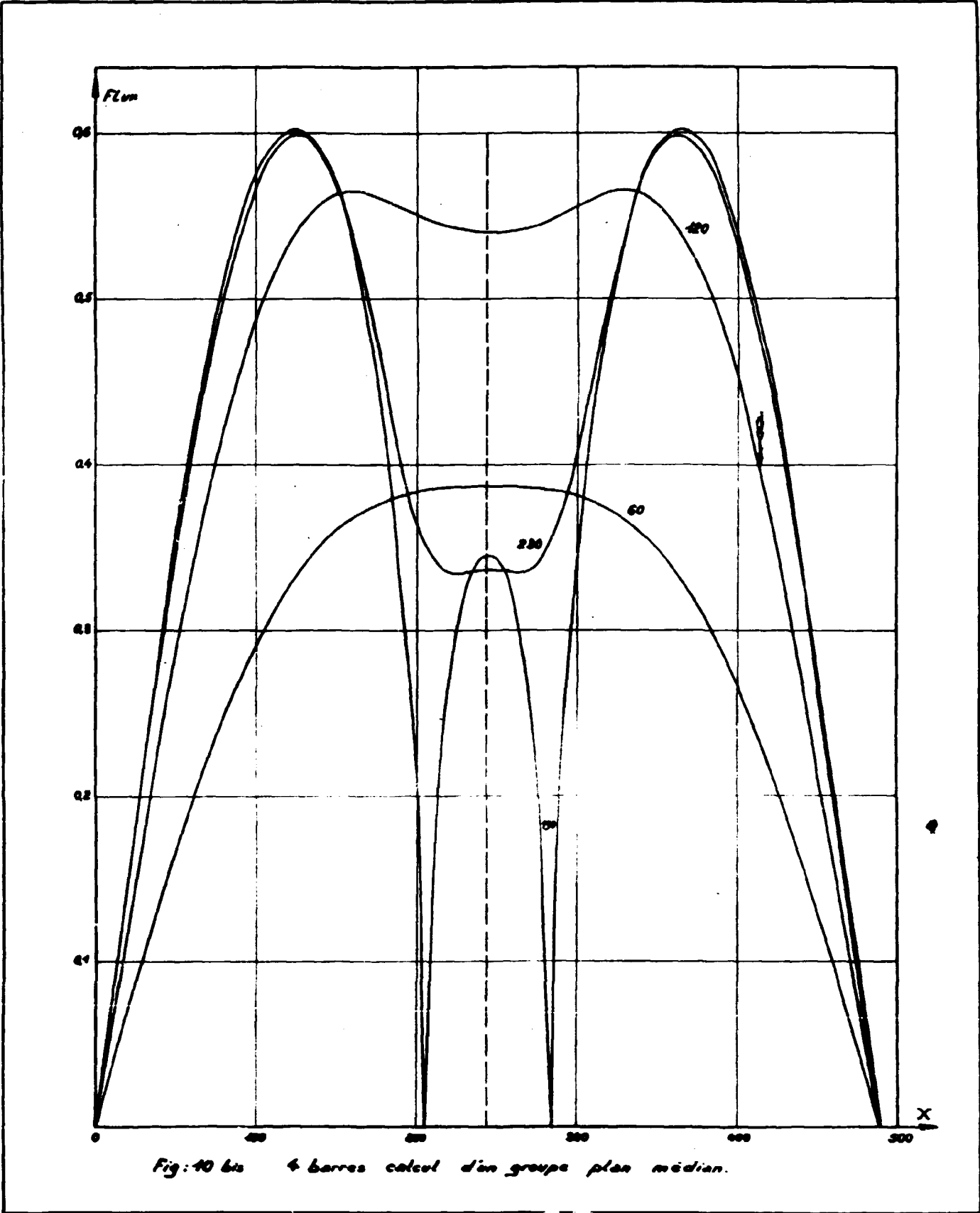


Fig: 40 bis 4 barres calcul d'un groupe plan médian.



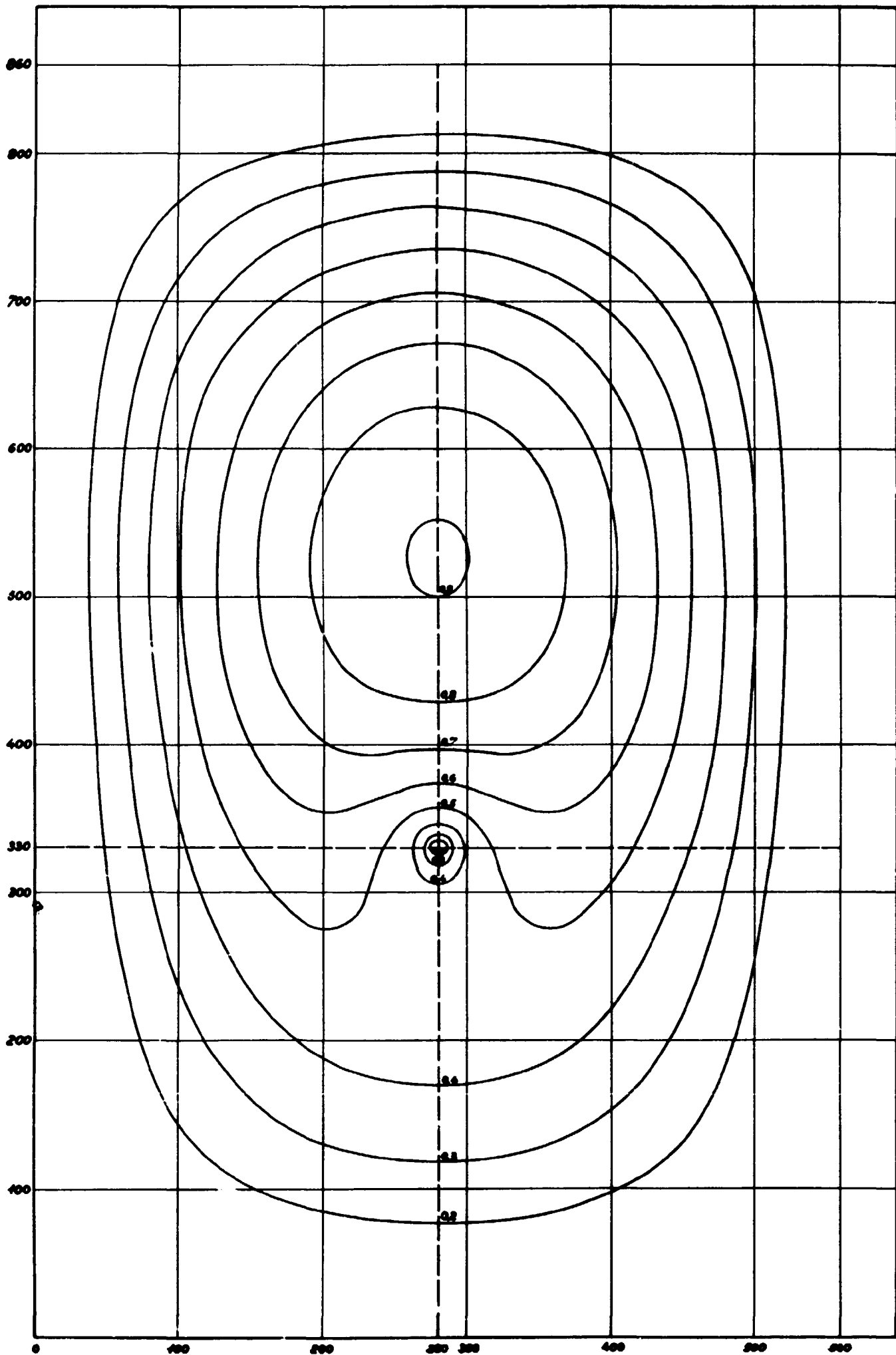


Fig:41 Une barre calcul e un groupe isoflux.

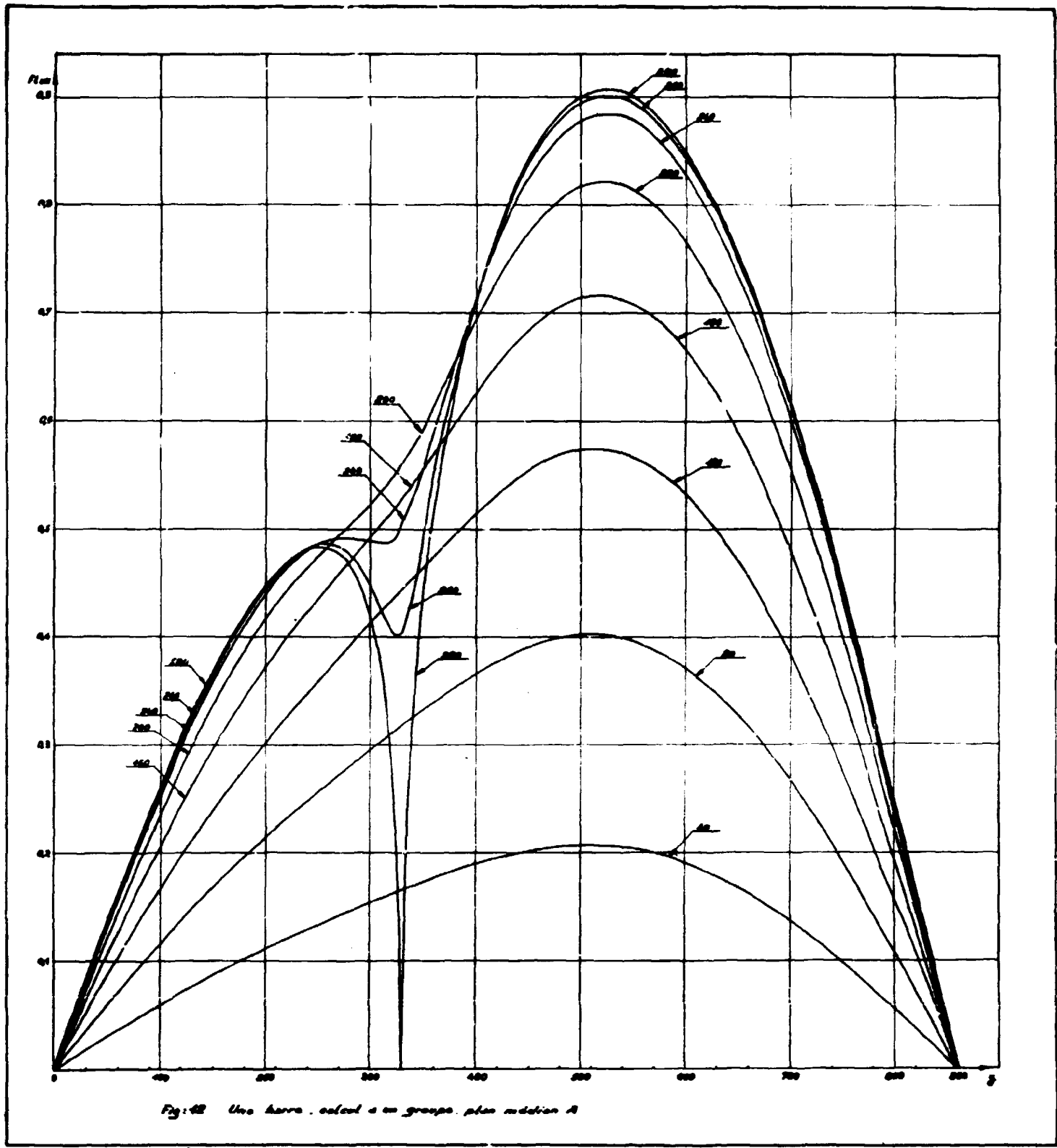


Fig: 42 Una barra calcolata in gruppo, plan median A

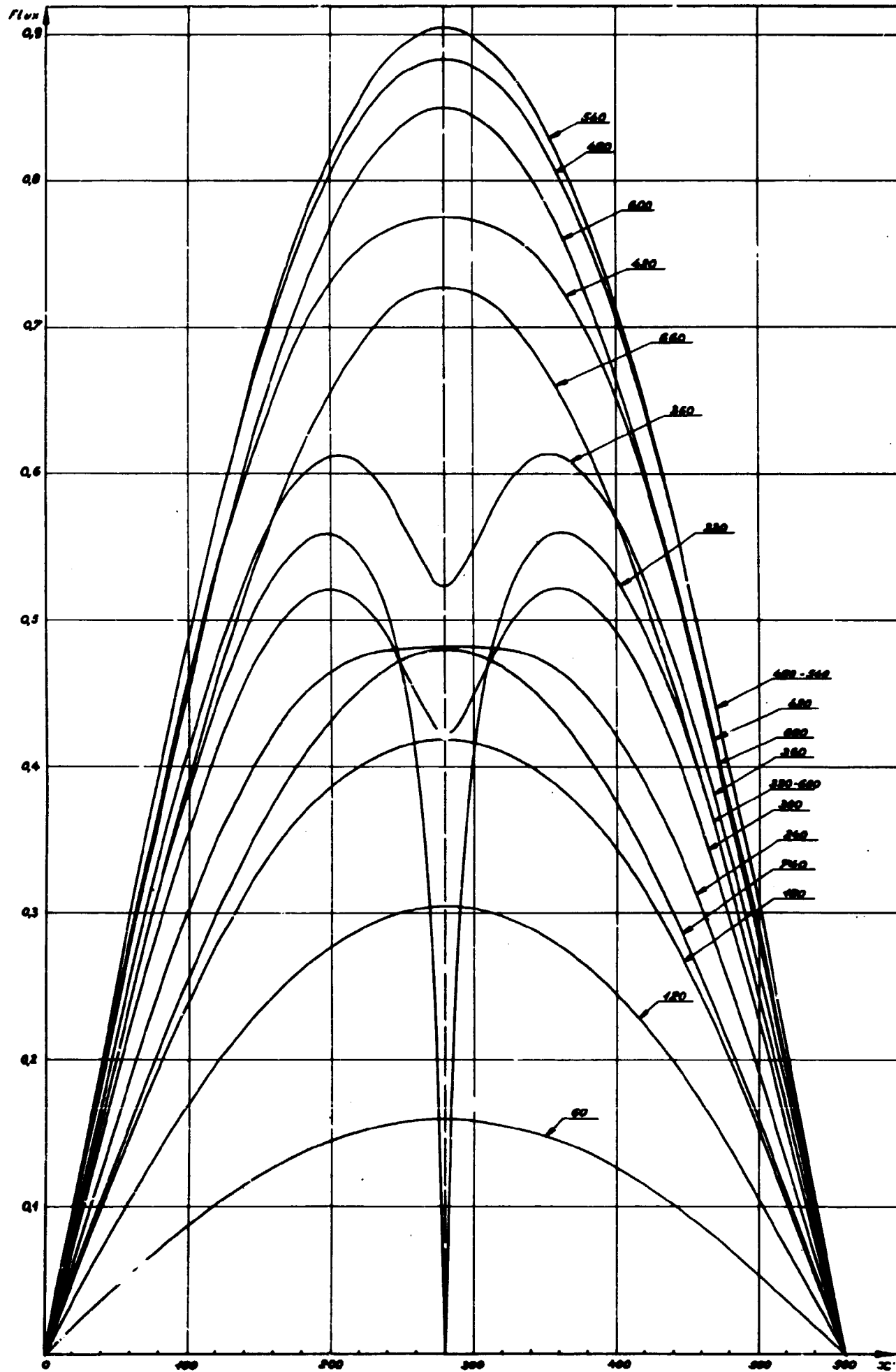
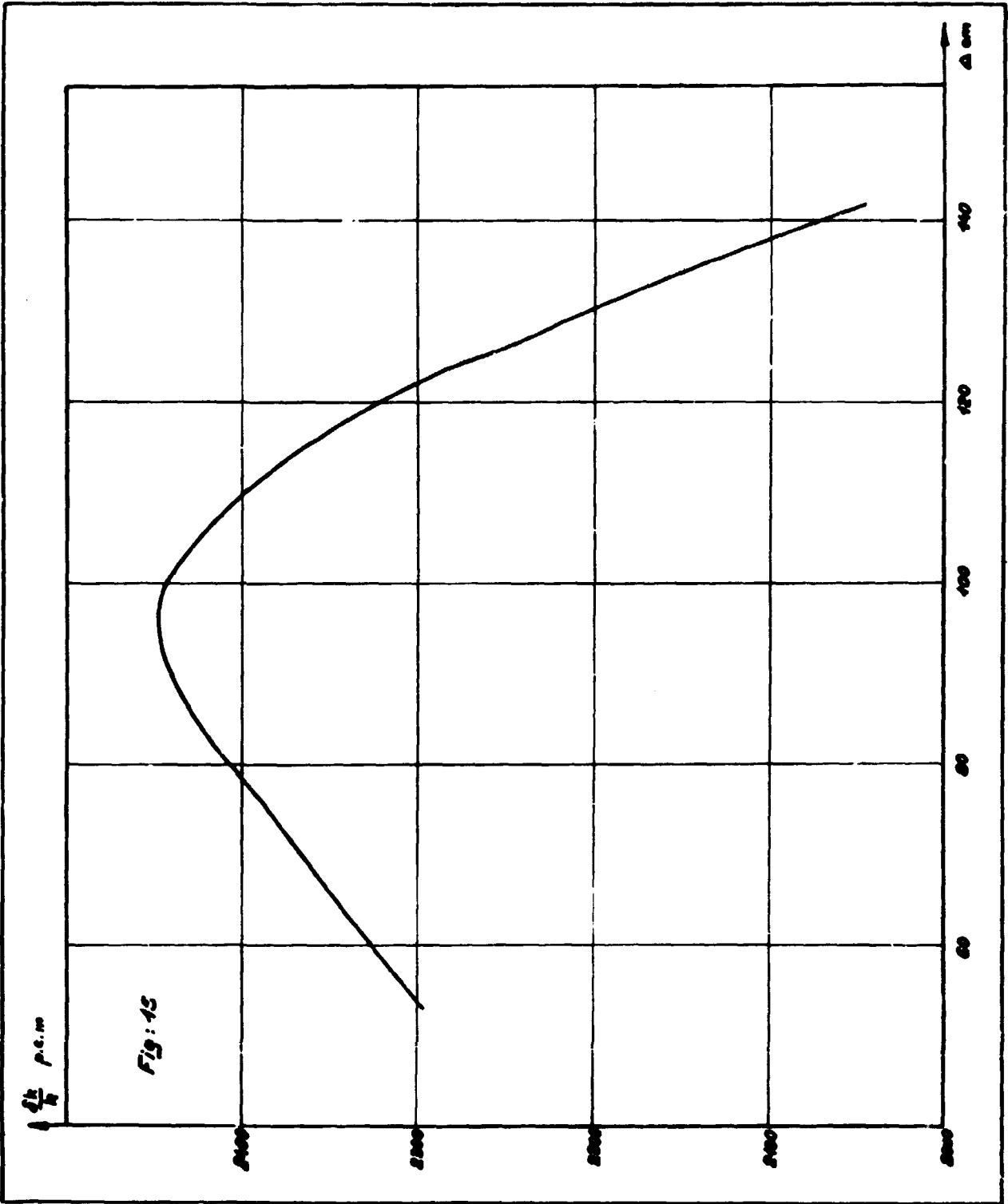


Fig: 13 Une barre calcul à un groupe plan médian B



**FIN**