

## NISKOENERGETSKA APROKSIMACIJA K-N-T FORMULE

Srpko MARKOVIĆ, Rodoljub SIMOVIĆ

*Institut za nuklearne nauke „Vinča“, Laboratorija za zaštitu od zračenja  
i zaštitu životne sredine „Zaštita“, pp. 522, 11001 Beograd*

### SADRŽAJ

*Koristeći opravdane aproksimacije za niske (dijagnostičke) energije X-zračenja, u ovom radu izveden je uprošćeni oblik K-N-T formule pogodan za analitičku upotrebu i praktična izračunavanja.*

#### 1. Uvod

U dijagnostičkoj radiologiji rasejano zračenje od pacijenta je glavni i praktično jedini uzrok izlaganja medicinskog tima i okolnih prostora. Problemi zaštite od zračenja neposredno prisutnog radiologa i ostalih članova dijagnostičkog tima posebno su kompleksni u kontrastnim tehnikama. Iz tih razloga potrebno je dobro poznavati prostorno-energetsku raspodelu rasejanog zračenja oko pacijenta. Osnova za proračun rasejanog zračenja je formula Klein-Nishina-Tama (K-N-T), po modelu jednostrukog Comptonovog rasejanja.

Comptonovo nekoherentno rasejanje je najznačajniji mehanizam u interakciji niskoenergetskog X-zračenja sa tkivom. Deo upadne energije bude prenesen u okolnu materijalnu sredinu, a deo bude rasejan. Raspodela energije rasejanog fotona i uzmaklog elektrona zavisi od uglova rasejanja fotona i ugla uzmaka elektrona. Ako upadni foton direktno pogađa elektron, elektron će biti odbačen direktno unapred ( $\theta = 0^\circ$ ) sa maksimalnom energijom, a rasejani foton biće rasejan unazad ( $\theta = 180^\circ$ ) sa minimalnom energijom. S druge strane kada foton samo kresne elektron, elektron će uzmaći pod uglom od  $90^\circ$  bez primanja energije, a foton će nastaviti u približno istom smeru, bez gubitka energije.

Comptonov efekt je interakcija sa slobodnim elektronom. U tkivu vezivna energija atomskih elektrona je reda veličine nekoliko eV i iznosi zanemarljiv deo energije upadnog fotona, te se elektron-meta može smatrati slobodnim. Iz tih razloga Comptonov efekt je najdominantniji proces u rasejanju X-zračenja sa tkivom. U opsegu energija standardnog dijagnostičkog spektra X-zračenja od 10 do 70 keV verovatnoće pojedinih interakcija se jako menjaju sa energijom, pa otuda i predata energija tkivu. Na primer, za fotone od 10 keV srednja predata energija elektronima iznosi manje od 2 keV. Na višim upadnim energijama dolazi do sve veće frakcije prenosa energije u odnosu na rasejanu komponentu. Na još manjim energijama presek za foto efekat postaje predominantan, a pretpostavka o slobodnom elektronu postaje sumnjiva.

#### 2. Analitička aproksimacija

Analitički izraz za verovatnoću interakcije sa slobodnim elektronom daje formula Klein-Nishina-Tamma. Ona predstavlja verovatnoću za rasejanje fotona na elektronu u prostorni ugao  $d\vec{\Omega}$  oko  $\theta$ :

$$\frac{d_e \sigma_t}{d\bar{\Omega}} = \frac{e^4}{2m_0^2 c^4} \left[ \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \right]^2 \left[ 1 + \cos^2 \theta + \frac{\alpha^2 (1 - \cos \theta)^2}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \right] \quad (1)$$

gde  $\sigma_t$  označava totalni elektronski presek.

Uz oznaku:  $r_0 = e^2 / m_0 c^2$  (klasični radijus elektrona) i smenu:  $P = E' / E$ , gde su  $E'$  i  $E$  sekundarna i primarna energija fotona, K-N-T formula dobija oblik

$$\frac{d_e \sigma_t}{d\bar{\Omega}} = \frac{r_0^2}{2} P^2 \left( P + \frac{1}{P} - \sin^2 \theta \right) \quad (2)$$

Ako se uvede pogodna smena promenljivih i jedna aproksimacija

$$P = \frac{E'}{E} = \frac{E - \Delta E}{E} = 1 - \frac{\Delta E}{E} \quad \text{i}$$

$$\frac{1}{P} = \frac{E}{E'} = \frac{E}{E - \Delta E} \cong 1 + \frac{\Delta E}{E} + \dots \quad (3)$$

(član  $(\Delta E / E)^2$  i svi viši članovi zanemareni su s obzirom da u opsegu energija od interesa njihov uticaj iznosi manje od 1 %), i formuliše  $P + \frac{1}{P} - \sin^2 \theta \cong 1 + \cos^2 \theta$ , dobija se aproksimativna K-N-T formula za niske energije upadnog fotona

$$\frac{d_e \sigma_t}{d\bar{\Omega}} = \frac{r_0^2}{2} P^2 \left( P + \frac{1}{P} - \sin^2 \theta \right) \approx \frac{r_0^2}{2} P^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (4)$$

Dakle, u dijagnostičkoj oblasti energija, opšta formula K-N-T može se uprostiti na oblik koji opštu povezanost ugla i energije svodi na faktorisanu formu pogodnu za analitički tretman transportne jednačine fotona i lakša izračunavanja. Opravdanost zamene kompletne K-N-T formule (1) aproksimativnom formulom (4) može se proceniti direktnim izračunavanjem i poređenjem sa kompletnom K-N-T formulom kao i graničnim Tomsonovim slučajem. U graničnom slučaju, nema transfera energije i formula glasi

$$\frac{d_e \sigma_t}{d\bar{\Omega}} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \delta(E - E') \quad (\text{bez transfera energije}) \quad (5)$$

Poređenje se može izvršiti tabeliranjem faktora po kojima se aproksimativni oblik razlikuje od kompletne K-N-T formule u opsegu energija od interesa (10 do 100 keV), uz naznaku odgovarajućeg faktora Tomsonove formule koji je za sve energije u razmatranju konstantan, jer ne zavisi od energije:

$$f_1(\theta) = 1 + \cos^2 \theta \quad - \quad \text{Tomsonov faktor nezavisan od } E;$$

$$f_2(\theta, E) = P^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad - \quad \text{aproksimativni oblik K-N formule;}$$

$$f_3(\theta, E) = P^2 \left( P + \frac{1}{P} - \sin^2 \theta \right) \quad - \quad \text{K-N formula, pri čemu je korišćen izraz}$$

$$P = \frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{E}{0.511}(1 - \cos \theta)} \quad (\text{E je računato u MeV})$$

**Tabela 1. Vrednosti Tomsonove, aproksimativne i K-N-T ugaone komponente**

$\cos \theta$	$E = 0$ [MeV]	$E = 0.01$ [MeV]		$E = 0.05$ [MeV]		$E = 0.1$ [MeV]	
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_2$	$f_3$	$f_2$	$f_3$
-1	2	1.852	1.854	1.399	1.421	1.033	1.090
-0.5	1.25	1.179	1.181	0.951	0.965	0.747	0.787
0	1	0.962	0.962	0.830	0.837	0.699	0.722
0.5	1.25	1.226	1.226	1.136	1.138	1.037	1.044
1	2	2	2	2	2	2	2

Na osnovu tabele 1 može se zaključiti da je aproksimacija K-N-T formule veoma tačna za energije ispod 50 keV, a da na gornjoj granici energetskeg intervala od 100 keV, relativna greška ne prelazi 5-6%.

### 3. Transfer energije pri komptonovom rasejanju

U tabeli 2 pokazane su vrednosti  $E'/E$  i  $\Delta E_{\max}$ , pri čemu je  $\Delta E = E - E'$ , a  $\Delta E_{\max}$  se odnosi na direktan sudar sa refleksijom fotona pod uglom  $\theta = 180^\circ$ .

Za gornju granicu opsega energije koji se razmatra od (najnepovoljniji slučaj) srednji transfer energije  $\Delta E$  iznosi oko 8 %. Razdvajanjem rasejanja na rasejanje unapred i rasejanje unazad (albedo) pokazuje se da je transfer energije drastično veći (za faktor preko 3) u slučaju rasejanja unazad: 6.6 keV u odnosu 2 keV, za inicijalne energije fotona od 50 keV, odnosno 23.1 keV prema 7.4 keV za inicijalne energije fotona od 100 keV. Tačnost ovog pristupa proverena je na energiji od 100keV.

Rezultatima u tabeli 2 potvrđena je opravdanost korišćenih aproksimacija pri izvođenju simplifikovane K-N-T formule.

**Tabela 2. Maksimalni transfer energije pri Komptonovom rasejanju**

E(MeV)	$\left(\frac{E'}{E}\right)_{\min}$	$\Delta E_{\max}$ [MeV]
0.01	0.9623	0.000377
0.05	0.8363	0.0082
0.08	0.7615	0.01908
0.1	0.7187	0.0281
0.2	0.5609	0.0878

#### **4. Zaključak**

Za proračun rasejanog zračenja od pacijenta u dijagnostičkom, niskoenergetskom opsegu energija X-zračenja opravdano je koristiti jednostavniji oblik formule K-N-T, pogodna za analitička izračunavanja. Izvedeni, uprošćeni, oblik formule K-N-T daje zadovoljavajuću tačnost. Za najnepovoljniji slučaj energije fotona od 0.1 MeV odstupanja iznose ne više od 8%. Dobijeni rezultati nisu ograničeni samo na zaštitu od zračenja u dijagnostičkoj radiologiji, već se mogu primenjivati gde god postoji potreba za proračunom rasejanog zračenja u interakcijama nisko-energetskog fotonskog zračenja sa zaštitnim materijalom.

#### **5. Literatura**

- [1] \*\*\*\*, UNSCEAR, Report of the United nations scientific committee on effects of atomic radiation, Supl. 45, UN, New York, 1988.
- [2] H. E. Johns, J. R. Cunningham, The Physics of radiology, 4<sup>th</sup> edition, 1984.
- [3] James E. Martin, Physics for radiation protection, Wiley-VCH Verlag GmbH &Co. KGaA, Weinheim, 2004.
- [4] Arthur B Chilton, J. Kenneth Shultis, Richard E. Faw, Principles of radiation shielding, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, new Jersey, 1984.
- [5] Srpko Marković, Doktorska disertacija (U rukopisu).
- [6] Olivera Ciraj Bjelac, Procena izloženosti i mogućnosti za smanjenje pacijentnih doza u dijagnostičkoj radiologiji, doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, ACIMS, 21. oktobar 2005, mentor: Prof Slobodanka Stanković.

ABSTRACT

#### **LOW-ENERGY APPROXIMATION OF K-N-T FORMULA**

**Srpko MARKOVIĆ, Rodoljub SIMOVIĆ**

A simplified version of the K-N-T formula is derived in this paper by using some well justified approximations in low (diagnostic) range of photon energies. This formula is suitable mostly for analytical purposes and practical calculations.