

LINGUISTIC FUZZY CONTROL OF THE WELANDER PROBLEM IN THE CHAOTIC REGIME

Theiler, G.^{1,2,*} Urdapilleta, E.^{1,3,4,**} Bonetto, F. J.^{1,2,4,***}

¹ Instituto Balseiro, UNCu-CNEA

² Laboratorio de Cavitación y Biotecnología, CAB-CNEA

³ Departamento de Física Estadística e Interdisciplinaria, CAB-CNEA

⁴ CONICET

Abstract

As natural convection provides an efficient and completely passive heat removal system, natural circulation loops are a matter of great interest in the subject of advanced nuclear reactor design. However, under certain circumstances thermal-fluid-dynamical instabilities may appear, threatening the reactor safety as a whole. On the other hand, fuzzy logic controllers provide an ideal framework to approach highly non-linear control problems. In the present work we introduce the basic ideas of the fuzzy logic theory and analyse the natural convection system known as the the Welander problem, that is one of the simplest configurations of single-phase thermal-hydraulic loops in which chaos actually occurs. Finally, we design a linguistic fuzzy controller that is able to stabilise the circulation flow in conditions that, if the controller was not present, would be otherwise non-periodic unstable.

* thelerg@ib.cnea.gov.ar

** urdapile@ib.cnea.gov.ar

*** bonetto@cab.cnea.gov.ar

CONTROL BASADO EN LÓGICA DIFUSA DEL LOOP DE WELANDER EN RÉGIMEN CAÓTICO

Theiler, G.^{1,2,*} Urdapilleta, E.^{1,3,4,**} Bonetto, F. J.^{1,2,4,***}

¹ Instituto Balseiro, UNCu-CNEA

² Laboratorio de Cavitación y Biotecnología, CAB-CNEA

³ Departamento de Física Estadística e Interdisciplinaria, CAB-CNEA

⁴ CONICET

Resumen

Los circuitos termofluidodinámicos de convección natural están cobrando especial importancia en el diseño de reactores nucleares avanzados, debido a que la convección natural suministra un sistema eficiente de remoción de calor completamente pasivo. Interesa entonces analizar las condiciones bajo las cuales existen inestabilidades termohidráulicas que puedan amenazar la seguridad del reactor. Por otro lado, la lógica difusa provee una herramienta especialmente útil para atacar problemas de control altamente no-lineales. En este trabajo introducimos las ideas básicas de la teoría de lógica difusa y de los controladores lingüísticos y luego analizamos matemáticamente el loop de convección natural conocido como el problema de Welander, que bajo cierta combinación de parámetros presenta un comportamiento caótico. Finalmente diseñamos un controlador lingüístico difuso que logra estabilizar el caudal de circulación en condiciones que de otra manera presentaría oscilaciones caóticas.

1. Introducción

La industria nuclear mundial deberá afrontar grandes desafíos en el mediano plazo, ya que las necesidades mundiales de energía eléctrica indican que la capacidad instalada deberá incrementarse notablemente. Más aún, consideraciones económicas y de impacto ambiental sugieren que sería conveniente que aumente la cuota de energía nuclear en el mercado eléctrico. Por otro lado, estudios de seguridad en el diseño conceptual de los reactores nucleares avanzados proponen utilizar sistemas de control y seguridad completamente pasivos con el objetivo de lograr un reactor inherentemente seguro.

Existe entonces una tendencia a diseñar sistemas primarios de extracción de energía basados en convección natural, por lo que es necesario un estudio detallado de los fenómenos termofluidodinámicos asociados a este efecto. En particular,

* thelerg@ib.cnea.gov.ar

** urdapile@ib.cnea.gov.ar

*** bonetto@cab.cnea.gov.ar

interesa analizar las condiciones bajo las cuales existen inestabilidades que puedan amenazar la seguridad del reactor.

Sucede que los circuitos de convección natural presentan —bajo ciertas condiciones— un comportamiento no periódico y con alta sensibilidad a condiciones iniciales. No debería esto sorprendernos, ya que el primer sistema caótico presentado originalmente por Lorenz en 1963 está inspirado en flujos atmosféricos de convección natural. En este trabajo intentamos entonces resolver el problema del control de un loop de convección natural en particular —conocido como el problema de Welander— con herramientas de lógica difusa, ya que resulta ésta una herramienta especialmente apropiada para atacar problemas caóticos.

La teoría de la lógica difusa ha probado tener aplicaciones en amplios espectros, por ejemplo en el campo de la inteligencia artificial y en la toma de decisiones asistida. Y ciertamente una de las áreas que más se ha enriquecido con la lógica difusa es la teoría de control, pues resulta ésta una forma alternativa y a la vez poderosa de atacar cierta clase de problemas (Yen et al., 1995), muy difíciles de resolver utilizando técnicas tradicionales. En particular, en este trabajo relacionamos dos líneas de investigación diferentes, el estudio de inestabilidades termofluidodinámicas en un problema particular y el control basado en lógica difusa, proponiendo técnicas para atacar el problema de las oscilaciones en sistemas termohidráulicos de circulación natural.

2. Lógica difusa

La teoría de lógica difusa fue originalmente introducida por Zadeh (1965) como una herramienta matemática para atacar problemas cuyas definiciones son algo subjetivas, pero que juegan un papel preponderante en la forma de pensar del ser humano. Por ejemplo, conceptos como “un número x mucho mayor que la unidad” carecen de una definición precisa, pero a la vez resultan claves para aplicar una aproximación que permita resolver un problema. Sin embargo, a pesar de que no podemos afirmar que cualquier número x sea mayor que uno, un experto humano es capaz de poder discernir entre casos en los que es válida la expresión $x \gg 1$ y en los que no lo es.

2.1. Conjuntos difusos

En los problemas de ingeniería suelen existir variables tales como presión y temperatura, que a menudo describimos cualitativamente con adjetivos como bajo o alto. Para poder atacar problemas expresados lingüísticamente fue que Zadeh propuso los fuzzy sets. Estos conjuntos en cierta manera extienden los conceptos de teoría de conjuntos clásicos para poder manejar matemáticamente expresiones coloquiales del orden de como “baja presión”.

Dado un conjunto clásico A , un objeto a o bien pertenece al conjunto o bien no

pertenece al mismo. Por otro lado, para poder clasificar qué tan aplicable es el valor lingüístico “bajo” a la variable lingüística “presión” necesitamos cuantificar de alguna manera la aplicabilidad del adjetivo “bajo” al valor real p de la presión.

Definición 1. Un conjunto difuso es un set de pares ordenados

$$V = \left\{ (x, \mu_{\tilde{v}}(x)) : x \in U \right\}$$

tales que la función $\mu_{\tilde{v}}(x) : U \mapsto [0, 1]$ da la certeza de que el valor numérico x pueda ser descripto lingüísticamente por la variable lingüística \tilde{v} . El dominio U se llama universo de discurso de x y $\mu_{\tilde{v}}(x)$ es la función de membresía de x en V . \square

Claramente, esto representa una extensión a la idea de conjunto clásico, donde la función de membresía puede tomar sólo dos valores discretos, cero o uno. En el resto del trabajo denotaremos con un tilde a las variables lingüísticas y utilizaremos indistintamente los términos conjunto difuso y variable lingüística.

2.2. Funciones de membresía

La definición 1 no debe ser confundida con una distribución de probabilidad. Una función de membresía caracteriza la *certeza* de que el contenido de la variable tradicional u pueda ser clasificada lingüísticamente como \tilde{v} , y no hay ninguna naturaleza probabilística detrás de este concepto ni estamos lidiando con fenómenos aleatorios. Sólo se trata de cuantificar matemáticamente ideas naturalmente imprecisas y subjetivas.

Por ejemplo, podríamos definir el conjunto difuso “luz azul” en el universo Λ de las longitudes de onda visibles, cuya función de pertenencia podría ser la función arbitraria mostrada en la figura 1. Es verdad que alguien podría no estar de acuerdo en la posición exacta del punto en el cual la función vale uno. O podría argumentar que la función debería tener un ancho mitad ligeramente más pequeño. Pero ciertamente todos sabemos qué es lo que significa luz azul, y nadie ubicaría el centro de la función en 600 nm. Si bien a nivel de detalles existen cuestiones subjetivas de por medio, la idea global permanece lo suficientemente objetiva como para ser tratada matemáticamente.

2.3. Operaciones difusas

Las operaciones usuales de unión e intersección entre dos conjuntos clásicos pueden extenderse al campo difuso de diversas maneras ligeramente diferente entre sí, pero todas consistentes con la idea base de la operación (Lee, 1990b; Passino and Yurkovich, 1998). En este trabajo seguimos las definiciones originales propuestas por Zadeh (1965). Sean F y G dos conjuntos difusos definidos sobre el mismo universo de discurso U .

Definición 2. La unión $F \cup G$ de los conjuntos F y G es el conjunto difuso cuya función de membresía $\mu_{F \cup G}(x)$ es (figura 2)

$$\begin{aligned}\mu_{F \cup G}(x) &= \text{máx} \{ \mu_F(x), \mu_G(x) \} \\ &= \mu_F(x) \vee \mu_G(x)\end{aligned}$$

□

Definición 3. La intersección $F \cap G$ es el conjunto difuso cuya función de membresía es (figura 3)

$$\begin{aligned}\mu_{F \cap G}(x) &= \text{mín} \{ \mu_F(x), \mu_G(x) \} \\ &= \mu_F(x) \wedge \mu_G(x)\end{aligned}$$

□

Es posible demostrar que estas definiciones satisfacen las propiedades asociativas y distributivas que siguen

$$\begin{aligned}A \vee (B \vee C) &= (A \vee B) \vee C \\ A \wedge (B \wedge C) &= (A \wedge B) \wedge C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C \wedge (A \vee B) &= (C \wedge A) \vee (C \wedge B) \\ C \vee (A \wedge B) &= (C \vee A) \wedge (C \vee B)\end{aligned}$$

2.4. Relaciones difusas y composiciones

La composición difusa es una operación que extiende la idea de función al campo de los conjuntos difusos. Nuevamente, existen varias maneras de definir esta operación, y otra vez nos adherimos a la proposición original de Zadeh. En su forma más elemental, una relación es un conjunto clásico de pares ordenados $(x, y) \in X \times Y$ en los que a cada elemento $x \in X$ le corresponde un elemento $y \in Y$. Una relación difusa binaria R está caracterizada por una función de membresía bidimensional $\mu_R(x, y)$ que da la certeza de que el par (x, y) sea representado por la relación R . En general, una relación de dimensión n puede ser asociada a un conjunto difuso F en el espacio $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ con una función de membresía $\mu_F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definición 4. Dados dos conjuntos difusos $A \in X$, $B \in Y$ y una relación difusa binaria $R \in X \times Y$, la función de membresía del conjunto difuso B es

$$\begin{aligned}
\mu_B(y) &= \text{máx}_x \left\{ \text{mín} \left[\mu_A(x), \mu_R(x, y) \right] \right\} \\
&= \bigvee_x \left[\mu_A(x) \wedge \mu_R(x, y) \right]
\end{aligned} \tag{1}$$

fórmula que se conoce como composición *sup-star* o *max-min*. En el campo de los conjuntos difusos escribimos

$$B = A \circ R \tag{2}$$

□

Podemos hacer una analogía entre la expresión (2) y la forma usual de relación entre dos números reales $y = f(x)$, donde ahora el conjunto difuso B hace las veces de variable dependiente, A es la variable independiente y la relación R es la función f . Para una discusión algo más profunda y una interpretación gráfica de la ecuación (1) ver el capítulo 2 del Proyecto Integrador de la Carrera de Ingeniería Nuclear de Theler (2007).

Utilizando la propiedad distributiva de los operadores unión e intersección se puede demostrar que la composición *sup-star* es distributiva con respecto a estos operadores

$$\begin{aligned}
A \circ (R_1 \cup R_2) &= (A \circ R_1) \cup (A \circ R_2) \\
A \circ (R_1 \cap R_2) &= (A \circ R_1) \cap (A \circ R_2)
\end{aligned}$$

Es posible calcular la función de membresía $\mu_R(x, y)$ de la relación R conociendo explícitamente los dos conjuntos difusos A y B como

$$\begin{aligned}
\mu_R(x, y) &= \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \\
&= \text{mín} \left[\mu_A(x), \mu_B(y) \right]
\end{aligned} \tag{3}$$

3. Controladores lingüísticos difusos

El diseño de un controlador estándar utilizando la teoría de control lineal necesita que la planta a controlar satisfaga simultáneamente las siguientes dos condiciones:

- i.* el diseñador debe disponer de un modelo matemático que describa el comportamiento temporal de la planta
- ii.* la planta debe ser Linear Time Invariant (LTI)

Sin embargo, los controladores lingüísticos difusos pueden prescindir completamente de ambas condiciones. Por un lado, la estrategia de control se almacena en una colección de reglas lingüísticas cualitativas de tipo **IF – THEN**. No es necesario por lo tanto una descripción matemática de la planta, y un conocimiento cualitativo del comportamiento del sistema en función de sus entradas es suficiente para diseñar un controlador lingüístico difuso. Por otro lado, dado que el controlador no depende de un modelo matemático, la segunda condición no es aplicable.

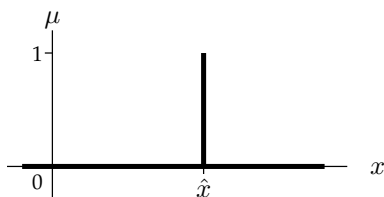
Un controlador difuso decide la mejor acción de control $u(t)$ en función de los datos disponibles en el vector $m(t)$ según una base de conocimiento que toma la forma de reglas lingüísticas. Para obtener una imagen mental del funcionamiento de estos controladores, conviene dividirlos internamente en cuatro subsistemas (Pasinino and Yurkovich, 1998) como esquematizamos en la figura 4.

- i.* Una interfaz real–difusa que convierte la entrada $m \in \mathbb{R}^n$ en n variables lingüísticas.
- ii.* Una base de reglas lingüísticas que cuantifica el conocimiento necesario para controlar la planta utilizando lógica difusa.
- iii.* Un mecanismo de inferencia que decide cuál es la mejor acción a tomar en función del estado actual y de la información almacenada en la base de reglas.
- iv.* Una interfaz difusa–real que convierte las conclusiones lingüísticas del mecanismo de inferencia en una acción de control $u \in \mathbb{R}^m$.

3.1. Interfaz real–difusa

Dado que un controlador difuso trabaja utilizando lógica difusa, necesita una forma de convertir las entradas reales en conjuntos difusos para poder operar sobre ellos. El proceso de conversión de valores numéricos $m \in M \subseteq \mathbb{R}$ en conjuntos difusos se llama *fuzzification*.

Sea $\hat{x} \in \mathbb{R}$ la entrada real al controlador que queremos convertir en un conjunto difuso. En este trabajo utilizamos el operador singleton $\mathfrak{s}(\hat{x})$ que devuelve un conjunto difuso con una función de membresía

$$\mathfrak{s}(\hat{x}) = \mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \hat{x}, \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$


El gráfico muestra un eje horizontal etiquetado como 'x' y un eje vertical etiquetado como 'μ'. El eje horizontal tiene un punto marcado como 'x-hat' y el eje vertical tiene un punto marcado como '1'. Una línea horizontal a μ=0 se extiende a lo largo del eje x. Una línea vertical a x=x-hat se extiende desde μ=0 hasta μ=1, formando un pulso rectangular de altura 1 en el punto x-hat.

Si bien podríamos intentar construir una función de membresía que incluya alguna incerteza —digamos una gaussiana con alguna desviación estándar σ o una función triangular— cuando la variable real \hat{x} está sujeta a ruido aleatorio, la experiencia demuestra que no es conveniente utilizarlas dado que agregan una gran complejidad computacional al problema sin justificar plenamente su aplicación.

3.2. Reglas lingüísticas

La principal diferencia entre los controladores tradicionales y los controladores lingüísticos difusos radica en la forma de expresar la información necesaria para poder controlar la planta. Esta información está almacenada en una base de conocimiento que contiene un conjunto —clásico— de reglas lingüísticas del tipo causa-efecto **IF – THEN** que relacionan condiciones lingüísticas con acciones de control, también lingüísticas. Este conocimiento sobre la estrategia de control se almacena en una serie de reglas del tipo

$$\text{IF } \underbrace{\tilde{m}_1 \text{ IS } A}_{\text{cláusula 1}} \text{ AND } \dots \text{ AND } \underbrace{\tilde{m}_n \text{ IS } B}_{\text{cláusula } n} \text{ THEN } \underbrace{\tilde{u}_i \text{ IS } C}_{\text{consecuencia}} \quad (4)$$

premisas

donde las \tilde{m}_j son variables lingüísticas —con su correspondiente conjunto difuso asociado— que provienen de la entrada del controlador; A , B y C son conjuntos difusos y las \tilde{u}_j son variables lingüísticas cuyo conjunto difuso representan la mejor acción de control a tomar cuando se satisfacen las condiciones de la premisa. Es posible mostrar que la forma 4 es general en el sentido de que construcciones semánticas que incluyan operadores **OR** o controladores con más de una salida pueden ser escritas de esta manera.

3.3. Mecanismo de inferencia

La regla lingüística

$$\text{IF } \tilde{x} \text{ IS } A \text{ THEN } \tilde{y} \text{ IS } B \quad (5)$$

está dando una relación de implicancia. Es decir, si el conjunto difuso asociado a la variable lingüística \tilde{x} es *exactamente* igual al conjunto difuso A , entonces \tilde{y} debe ser *exactamente igual* a B . En efecto, la regla implica una relación difusa R en $X \times Y$ entre A y B que escribimos como

$$B = A \circ R$$

Pero sucede que el hecho de que \tilde{x} sea *exactamente* igual al conjunto difuso A es casi imposible de lograr en una aplicación real. Lo que en realidad sucede es que la variable lingüística \tilde{x} es aproximadamente igual a A , digamos igual a A' . Entonces, la consecuencia lógica es que \tilde{y} debe ser aproximadamente igual a B , digamos B' .

Definición 5. Sean A , A' y B conjuntos difusos en X , X e Y respectivamente. Supongamos que la regla **IF** \tilde{x} **IS** A **THEN** \tilde{y} **IS** B se puede expresar como una relación difusa binaria R en $X \times Y$. Entonces el conjunto difuso B' inducido por \tilde{x} **IS** A' y la regla R es

$$B' = A' \circ R$$

o en forma equivalente

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \text{máx}_x \left\{ \text{mín} \left[\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y) \right] \right\} \\ &= \bigvee_x \left[\mu_{A'} \wedge \mu_R(x, y) \right]\end{aligned}\tag{6}$$

□

De esta manera, los conjuntos difusos A y B de una regla lingüística están definiendo una función de membresía $\mu_R(x, y)$ dada por la ecuación (3). Utilizando entonces la propiedad asociativa y el hecho de que μ_B no depende de x , podemos calcular la función de membresía del conjunto difuso inferido B' como

$$\mu_{B'}(y) = w \wedge \mu_B(y)$$

donde hemos definido el valor

$$\begin{aligned}w &= \bigvee_x \left[\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x) \right] \\ &= \text{máx}_x \left\{ \text{mín} \left[\mu_{A'}(x), \mu_A(x) \right] \right\}\end{aligned}$$

que llamamos la intensidad de disparo de la regla, y nos da una idea de qué tan aplicable es ésta cuando \tilde{x} IS A' . Podemos hacer una interesante interpretación gráfica de este resultado con la ayuda de la figura 5. Calculamos la intensidad de disparo w como el máximo de la intersección entre A y A' , y luego truncamos la función de membresía $\mu_B(y)$ a la altura w . La función de membresía así obtenida es el conjunto difuso inferido a partir del hecho \tilde{x} IS A' y la regla (5).

Si tenemos ahora la regla lingüística

$$\text{IF } \tilde{x} \text{ IS } A \text{ AND } \tilde{y} \text{ IS } B \text{ THEN } \tilde{z} \text{ IS } C\tag{7}$$

razonando análogamente, y teniendo en cuenta la propiedad conmutativa de la operación intersección, obtenemos

$$\mu_{C'}(z) = w_1 \wedge w_2 \wedge \mu_C(z)$$

con

$$\begin{aligned}w_1 &= \bigvee_x \left[\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x) \right] \\ w_2 &= \bigvee_y \left[\mu_{B'}(y) \wedge \mu_B(y) \right]\end{aligned}$$

De esta manera, hemos logrado escribir la intensidad de disparo w como la intersección —en el sentido del operador mínimo— de cada una de las intensidades de

disparo de las cláusulas que componen la premisa. Vemos la simple interpretación gráfica en la figura 6.

Para dos reglas que definen sendas relaciones difusas R_1 y R_2 , el conjunto difuso inferido es

$$C' = (A' \cap B') \circ (R_1 \cup R_2)$$

Utilizando la propiedad distributiva de la composición *sup-star*, podemos escribir

$$C' = \left[(A' \cap B') \circ R_1 \right] \cup \left[(A' \cap B') \circ R_2 \right]$$

que resulta ser la unión difusa de los conjuntos difusos inferidos por cada una de las reglas. En particular, si los conjuntos difusos de entrada son singletons, el cálculo de las intensidades de disparo se simplifica significativamente. En la figura 7 mostramos la interpretación gráfica de la inferencia difusa de dos reglas con singletons como entrada. La generalización a n cláusulas y m reglas es inmediata.

3.4. Interfaz difusa–real

Las conclusiones a las que llega el mecanismo de inferencia son conjuntos difusos definidos sobre algún universo de discurso. Pero como la acción de control es un número real, debemos convertir estos conjuntos difusos a valores reales. Existen varios operadores defuzzification (Lee, 1990a; Theler, 2007). En particular, utilizamos el operador Center of Gravity (COG) el cual, dado un conjunto difuso $\tilde{z} \in Z$ que resulta ser la unión de n conjuntos difusos \tilde{z}_i , cada uno de ellos con función de membresía $\mu_i(z)$ integrable L^1 , devuelve la posición del momento de primer orden de los n conjuntos difusos \tilde{z}_i

$$\mathbf{g}(\tilde{z}) = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \mu_i(z) dz}{\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \mu_i(z) dz}$$

Notar que esta definición coincide con el centro de gravedad usual sólo si los n conjuntos difusos son disjuntos. Sin embargo, utilizamos el operador COG dado que es computacionalmente más sencillo de calcular que el centro de gravedad usual.

4. El loop de Welander

El problema que nos interesa estudiar fue originalmente introducido hace ya cuarenta años por Welander (1967) y es uno de los primeros trabajos realizados sobre

inestabilidad de tipo caótica en loops de convección natural, justamente poco tiempo después del paper seminal de Lorenz (1963) sobre flujo determinístico no periódico.

4.1. Descripción del problema

El sistema a estudiar consiste en un loop de convección natural de simple fase con una sección transversal circular y con la geometría mostrada en la figura 8a. La implementación física básica consiste en dos piernas adiabáticas verticales unidas entre sí por dos secciones prácticamente horizontales donde se produce la transferencia de energía entre el sistema y la fuente de calor en la parte inferior, y el sumidero en la parte superior. En particular, el mecanismo de transferencia de calor es por temperatura controlada. Es decir, el flujo de calor q'' es proporcional a la diferencia de temperatura entre la fuente y el fluido.

4.2. Análisis matemático

Vamos a analizar el problema siguiendo el tratamiento propuesto por Ferreri and Ambrosini (1998), el cual presenta una leve variación con respecto al original que sólo trata el caso de flujo laminar, extendiendo los resultados a condiciones más generales de flujo. La característica principal del problema de Welander radica en suponer que la longitud ℓ de intercambio de calor con las fuentes es infinitesimal, correspondiendo matemáticamente a deltas de Dirac en las ecuaciones, y esquemáticamente a la figura 8b. Esto nos permite escribir estos intercambios como condiciones de contorno en lugar de introducir inhomogeneidades en las ecuaciones diferenciales, simplificando el análisis a costa de alejarnos ligeramente de una hipotética implementación experimental. Más aún, suponemos que no existen pérdidas de carga puntuales a lo largo del circuito.

Suponiendo flujo unidimensional y utilizando la aproximación de Boussinesq (Incropera and Dewitt, 2002), el caudal volumétrico de circulación Q no depende de la posición axial S . Para un factor de Fanning de la forma

$$f(\text{Re}) = \frac{a}{\text{Re}^b} \quad (8)$$

la ecuación de flujo de momento integrada a lo largo de la longitud total L del loop es

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{aR}{16} \left(\frac{\rho D}{\mu A} \right)^{1-b} Q |Q|^{1-b} = \frac{\beta A}{L} \oint g(S) (T - T_0) dS \quad (9)$$

donde R es el factor de resistencia al flujo laminar utilizado en el trabajo original de Welander definido como

$$R = 32 \frac{\mu}{\rho D^2}$$

Por otro lado, la ecuación para la conservación de energía, teniendo en cuenta que las piernas son adiabáticas y despreciando el término de conductividad axial, es

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial T}{\partial S} = \begin{cases} 0 & \text{en las piernas} \\ \frac{P_w}{A} \frac{h}{\rho c} (T_s - T(S)) & \text{en el heater y en el cooler} \end{cases} \quad (10)$$

La temperatura T_s es T_{heater} o T_{cooler} según corresponda, y ambas son constantes en la aproximación de Welander. Para simplificar el tratamiento matemático que sigue definimos

$$T_0 = \frac{T_{\text{heater}} + T_{\text{cooler}}}{2}$$

$$\Delta T = \frac{T_{\text{heater}} - T_{\text{cooler}}}{2}$$

Welander propone que dada una distribución inicial de temperaturas antisimétrica con respecto a la fuente y al sumidero, la antisimetría se conserva durante toda la evolución temporal posterior. Más aún, afirma que es posible mostrar que el sistema alcanza asintóticamente el estado de antisimetría para una condición inicial arbitraria. En efecto, en las simulaciones numéricas que a continuación describimos observamos este útil resultado, por lo que vamos a utilizar esta interesante propiedad más adelante.

4.3. Adimensionalización

Siguiendo el tratamiento de Ferreri and Ambrosini (1998), adimensionalizamos las variables que intervienen en el problema de la siguiente manera

$$s = \frac{S}{L/2}$$

$$\tau = \frac{t}{L/(2\kappa\ell)}$$

$$q = \frac{Q}{A\kappa\ell}$$

$$\phi = \frac{T - T_0}{\Delta T}$$

donde para simplificar la notación hemos llamado

$$\kappa = \frac{P_w}{A} \frac{h}{\rho c}$$

Siguiendo la abstracción de la figura 8b, no podríamos tomar estrictamente $\ell \rightarrow 0$ pues ni τ ni q estarían bien definidas. Sin embargo, todavía podemos —al menos

analíticamente— hacer que el producto $\kappa\ell$ se mantenga constante haciendo al mismo tiempo que $\kappa \rightarrow \infty$. Físicamente, esto es consistente con el hecho de que para transferir una cantidad finita de energía en una distancia infinitesimal a través de una diferencia de temperatura finita, es necesario un coeficiente de transferencia térmico h infinito.

Las ecuaciones (9) y (10) adimensionalizadas son

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau} = \alpha \int_0^1 \phi ds - \varepsilon q|q|^{\xi-1} & \text{para } \tau > 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + q \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 & \text{para } 0 < s < 1 \text{ y } \tau > 0 \end{cases} \quad (11)$$

donde los parámetros adimensionales que controlan completamente el sistema de ecuaciones son

$$\begin{aligned} \xi &= 2 - b \\ \alpha &= \frac{g\beta\Delta TL}{2(\kappa\ell)^2} \\ \varepsilon &= \frac{a}{16} \left(\frac{\rho D \kappa\ell}{\mu} \right)^{1-b} \frac{RL}{2\kappa\ell} \end{aligned}$$

Al expresar el sistema de ecuaciones resultante en la forma (11) hemos utilizado tanto la propiedad de antisimetría ya discutida como el hecho de que la proyección de la gravedad sobre el diferencial de arco tiene el mismo módulo pero diferente signo en cada una de las piernas. De esta manera, sólo es necesario prestar atención a lo que sucede en el intervalo ($0 < s < 1$).

Para completar la formulación del problema necesitamos especificar condiciones iniciales y de contorno. Está claro que si nos hubiésemos quedado con la figura 8a e intentado resolver el circuito completo no necesitaríamos condiciones de contorno, al precio de tener que lidiar con una incómoda inhomogeneidad. Sin embargo, resulta más sencillo trabajar con la ecuación de energía homogénea incorporando la fuente y el sumidero como condiciones de contorno en los extremos de la pierna. Utilizando argumentos de transferencia de calor es posible mostrar que éstas resultan

$$\phi(0^+, \tau) + \phi(1^-, \tau) = \begin{cases} \left[1 + \phi(1^-, \tau) \right] \left[1 - \exp(-1/q) \right] & \text{para } q \geq 0 \\ \left[-1 + \phi(0^+, \tau) \right] \left[1 - \exp(-1/|q|) \right] & \text{para } q < 0 \end{cases} \quad (12)$$

Finalmente, las condiciones iniciales son arbitrarias. Pero dado que utilizamos la propiedad de antisimetría en la deducción de las ecuaciones, la distribución inicial

debe ser necesariamente antisimétrica también

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \phi(s, 0) = \phi_0(s) & \text{para } 0 < s < 1 \\ \phi(s, 0) = -\phi_0(s - 1) & \text{para } 1 < s < 2 \end{cases} \quad (13)$$

Las ecuaciones (11), (12) y (13) especifican completamente el problema adimensional de Welander, extendido a flujo turbulento. Es interesante notar que existen sólo tres parámetros adimensionales que controlan el comportamiento del sistema. El primero, ξ depende solamente de la ley de fricción (8) particular y es, en este problema, el menos susceptible de ser variado externamente, por lo que no le dedicaremos mayor atención a los efectos del análisis. Incluso se puede demostrar que este parámetro es igual a la unidad para el caso de flujo laminar, por lo que no es considerado en absoluto en el trabajo original de Welander. El siguiente, α , representa las contribuciones a la fuerza boyante debido a las diferentes densidades, siendo proporcional a la diferencia de temperaturas $2\Delta T$ entre la fuente fría y la fuente caliente. Finalmente ε contiene información sobre las fuerzas disipativas que se oponen al movimiento del fluido. Es la dependencia de las propiedades del sistema con estos dos últimos parámetros lo que nos interesa estudiar para entender tanto la física como la evolución temporal del problema.

4.4. Estado estacionario y estabilidad

En los problemas de convección natural en general, sucede que la solución trivial de fluido en reposo es estable para parámetros de control —típicamente el número de Rayleigh— menores que un cierto umbral, a partir del cual se produce una bifurcación de tipo *pitchfork*. Más interesante que estudiar la solución trivial resulta analizar tanto la magnitud de los puntos críticos creados en la bifurcación como la dependencia de su estabilidad con los parámetros del problema.

Utilizando argumentos de simetría, es fácil ver que una solución estacionaria dada del problema de Welander, digamos con $q_1 > 0$ tiene una solución simétrica asociada $q_2 = -q_1 < 0$. En aras de la simplificación, prestaremos atención sólo a las soluciones con caudal positivo. Es posible mostrar que la solución estacionaria q^* de la ecuación de momento del sistema (11) satisface la relación implícita

$$\frac{2(q^*)^\xi}{(\alpha/\varepsilon) + (q^*)^\xi} = 1 - \exp(-1/q^*) \quad q^* > 0 \quad (14)$$

Además, se puede ver que dada una solución estacionaria q^* , la distribución de temperaturas debe ser homogénea en cada una de las piernas, con igual valor absoluto ϕ^* en ambas pero con diferente signo, e idénticamente igual a

$$\phi^* = \frac{1 - \exp\left(-\frac{1}{|q^*|}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{1}{|q^*|}\right)} \quad (15)$$

Pero el hecho de que encontremos una solución estacionaria no necesariamente implica que el sistema efectivamente la alcance en un tiempo finito, o siquiera tienda asintóticamente a ella. Debemos agregar a la existencia de la solución la condición de que ésta sea estable, en el sentido de que el punto en el espacio de las fases que la representa atraiga órbitas que pasen en algún entorno del punto fijo.

Un análisis exhaustivo de la dependencia de la estabilidad de la solución estacionaria q^* dada por la relación (14) escaparía a los objetivos de este trabajo, pero la idea está desarrollada en el trabajo de Ambrosini et al. (2003). En la figura 9 presentamos un mapa de estabilidad de la solución estacionaria, con los dos parámetros de interés α y ε para ξ constante, como un resultado del trabajo de Ferreri and Ambrosini (1998).

La zona estable indica que, para tiempos grandes, el sistema alcanzará un caudal y una distribución de temperaturas estacionarios dados por las ecuaciones (14) y (15). Pero si la combinación de parámetros α y ε cae dentro de la zona inestable de la figura 9, el punto fijo correspondiente a la solución estacionaria —y correspondientemente el punto fijo simétrico— es inestable. Sin embargo, es posible mostrar que tanto $q(\tau)$ como $\phi(s, \tau)$ están acotadas para todo τ . Más aún, el exponente de Lyapunov de la evolución temporal de $q(\tau)$ es positivo lo que implica que el comportamiento del sistema es efectivamente caótico.

4.5. Explicación física de la inestabilidad

Es interesante reproducir aquí la explicación cualitativa de la aparición de las inestabilidades introducida por Welander en su paper original. Un aumento del caudal causaría en principio un aumento de la fricción y, por lo tanto, una disminución de la fuerza boyante neta, ya que el calentamiento por unidad de longitud de fluido se vería disminuida. Intuitivamente, podríamos pensar que es posible alcanzar siempre un movimiento estacionario. Sin embargo, estos dos fenómenos pueden no estar en fase y existe la posibilidad de que comiencen a amplificarse sus efectos, produciendo oscilaciones de amplitud creciente.

En particular, podemos explicar el efecto de inversión de flujo con la ayuda del concepto de *warm pocket* propuesto por Welander, que se basa en la dependencia de la efectividad de las fuentes con el caudal instantáneo. En efecto, cuando el caudal es pequeño hay un volumen de fluido que pasa mucho tiempo cerca de la fuente caliente e incrementa localmente su temperatura. Cuando este volumen se dirige a una de las piernas —que están mas frías que el *warm pocket*— el caudal aumenta sensiblemente debido a que este volumen tenderá a subir rápidamente. Al llegar a la parte superior, su velocidad será bastante grande y pasará rápidamente por la fuente fría, de manera que su temperatura será esencialmente la misma al ingresar a la pierna opuesta, con el efecto neto de una reducción en la fuerza boyante y la disminución de la velocidad del fluido. De esta manera, el *warm pocket* llegará hasta la parte inferior de loop con una velocidad pequeña y consecuentemente la anomalía volverá a producirse. Más aún, es posible que la desaceleración que produce el

volumen caliente al ingresar en la pierna descendente sea tan grande que el fluido comience a moverse en dirección opuesta a la original.

5. Control lingüístico difuso

Para ciertas combinaciones de los parámetros α y ε , la solución de estado estacionario del problema de Welander se hace inestable y el sistema presenta un comportamiento aperiódico de características caóticas. A continuación diseñamos un controlador difuso lingüístico para lograr una condición de caudal estacionario estable en un caso particular de un loop de tipo Welander, estudiado numéricamente.

En esta aproximación hemos elegido como variable de control la temperatura T_{heater} de la fuente caliente, lo que equivale a actuar sobre el parámetro α del problema adimensional. En principio también debería ser posible actuar sobre el parámetro ε , por ejemplo introduciendo una válvula. Será este un tema de estudio en futuros trabajos.

La implementación numérica consiste en dividir cada pierna en 100 nodos, para luego calcular la integral del miembro derecho de la ecuación (9) con el método de los trapecios y resolver la ecuación diferencial ordinaria de momento (9) con el método estándar de Euler. La ecuación de energía está implementada con el método upwind explícito de segundo orden. De todas maneras, los detalles de la solución numérica, que pueden encontrarse en Theler (2007), realmente no son importantes desde el punto de vista del problema que estamos atacando mientras sea posible reproducir el comportamiento inestable-caótico que esperamos controlar.

5.1. El sistema a controlar

Diseñamos el controlador difuso teniendo en mente un loop de convección natural de dimensiones particulares, que es el que mostramos en la figura 10. La temperatura T_{heater} de la fuente caliente propuesta es la temperatura nominal, pero durante el transitorio será este el parámetro de control. Si bien este circuito no corresponde exactamente al problema de Welander discutido, en el cual la transferencia de calor se hace en una longitud ℓ infinitesimal, esperamos que el análisis matemático realizado en la sección 4.1 sea aplicable con algún margen de error al caso de la figura 10. Además, dado que por un lado justamente la adimensionalización propuesta involucra la diferencia de temperaturas $2\Delta T$ entre la fuente fría y la caliente, y por otro el problema dimensional es más cercano a una posible implementación experimental, trabajamos con las ecuaciones dimensionales (9) y (10).

5.2. Estado estacionario

Sabemos que en el problema de Welander, para cada combinación de α , ε y ξ existe una solución de caudal q^* estacionario. Por lo tanto, esperamos que para una dada

condición de ΔT en el problema particular de la figura 10 haya sólo un valor de caudal dimensional Q^* solución de las ecuaciones estacionarias. Suponiendo que este caudal está dado por la relación (14), para este caso resulta numéricamente

$$\begin{aligned} q^* &= 5,5 \\ Q^* &= 6,1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

con una distribución de temperaturas homogéneas a lo largo de cada uno de los tramos verticales e igual a

$$T^*(S) = \begin{cases} 41,8^\circ\text{C} & \text{en la pierna ascendente} \\ 38,2^\circ\text{C} & \text{en la pierna descendente} \end{cases} \quad (17)$$

Dado que para los parámetros adimensionales resultantes $\alpha = 700$, $\varepsilon = 3,21$ — con $\xi = 1,75$ correspondiendo a la ley de fricción de Blasius (White, 1999)— el mapa de estabilidad de la figura 9 predice que la solución estacionaria es inestable, esperamos observar una oscilación caótica al resolver el problema con las condiciones iniciales (16) y (17). En efecto, vemos en la figura 11 tanto la inestabilidad del estado estacionario como el comportamiento oscilatorio característico de los sistemas caóticos.

5.3. Objetivos

Ya hemos dicho que para cada condición de ΔT habrá un caudal Q^* estacionario, por lo que si nuestra meta es que el sistema se establezca en un caudal dado Q_{sp} tendremos que buscar aquella diferencia de temperaturas ΔT_{sp} que haga que $Q_{\text{sp}} = Q^*$. Para simplificar el problema, supongamos que efectivamente el setpoint deseado es la solución de estado estacionario correspondiente al problema de la figura 10 con la fuente caliente a una temperatura igual a 60°C , esto es, $Q_{\text{sp}} = 6,1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ (ecuación (16)). Si no fuera éste el setpoint deseado, bastaría con buscar la temperatura de fuente caliente nominal con la que efectivamente se alcanza el caudal de estado estacionario que buscamos.

Más aún, dada la simetría del problema, si Q^* es una solución estacionaria, entonces el valor de caudal $-Q^*$ correspondiente al sentido opuesto de circulación también es solución. Queremos poder elegir entonces no sólo el módulo sino también el signo del setpoint Q_{sp} . Elegimos arbitrariamente el signo positivo, que corresponde a un flujo en la figura 10 en el sentido de las agujas del reloj.

5.4. Control lingüístico difuso

El controlador deber realizar dos tareas que son esencialmente diferentes. Por un lado, tiene que lograr estabilizar un caudal de circulación estacionario que es inherentemente inestable por las condiciones del problema. Pero por el otro lado, cuando

el caudal tiene la dirección opuesta a la elegida, debe lograr invertir el flujo de la forma más suave posible y evitando tanto como sea posible la generación de warm pockets que tiendan a hacer oscilar el sistema.

Los observables de la planta son el caudal instantáneo $Q(t)$, su derivada $\dot{Q}(t)$ y la temperatura instantánea $T(t)$ del punto medio de la pierna ascendente. La acción de control es realizada sobre la temperatura T_{heater} de la fuente caliente. Definimos entonces una variable lingüística asociada a cada una de estas cuatro magnitudes

$$\begin{aligned} q &\leftrightarrow Q \\ qpunto &\leftrightarrow \dot{Q} \\ termocupla &\leftrightarrow T \\ theater &\leftrightarrow T_{\text{heater}} \end{aligned}$$

donde los valores lingüísticos que cada una de estas variables puede tomar están dados por los conjuntos difusos de las figuras 12.

Realizando las simulaciones correspondientes y analizando cualitativamente el comportamiento dinámico del loop inestable, encontramos que el set de reglas lingüísticas mostrado en la tabla 2 efectivamente logra el objetivo de control propuesto. En las figuras 13 y 14 mostramos cuatro resultados de simulaciones numéricas —de un total de trescientas— donde iniciamos la acción de control en diferentes instantes de tiempo. Más aún, en la mitad de las simulaciones la perturbación inicial que aparta el sistema del estado estacionario es en sentido horario (figuras 13) y la otra mitad es en sentido antihorario (figuras 14). En todos los casos el caudal obtenido es positivo, que es justamente lo que queríamos lograr.

Hemos agrupado las reglas lingüísticas de la tabla 2 en cuatro grupos, ya que cada uno de éstos persigue un objetivo diferente. La primer regla inestabiliza la solución estacionaria negativa inyectando una gran cantidad de energía para crear un warm pocket e intentar invertir el flujo a como diere lugar. El siguiente grupo intenta establecer el signo positivo del caudal cuando éste no tiene la dirección correcta. Cuando el caudal es pequeño en módulo, el sistema es muy susceptible a generar warm pockets que hacen difícil estabilizar la solución positiva. Es por eso que tanto éste como el tercer grupo de reglas hace que la temperatura de la fuente caliente en esta situación sea moderadamente baja para evitar justamente la generación de grandes gradientes en la distribución de temperaturas y facilitar la estabilización de la solución deseada, tarea que realiza el último grupo teniendo en cuenta información sobre el caudal de circulación, su derivada y la temperatura en el punto medio de la pierna izquierda.

6. Conclusiones

Si bien no es posible demostrar que el controlador estabiliza la solución para cualquier condición inicial, en trescientas simulaciones que hemos realizado el contro-

lador ha sido capaz de establecer un caudal de circulación estacionario estable en todos los casos. El hecho de realizar el control sobre la temperatura T_{heater} de la fuente caliente es equivalente a actuar sobre el parámetro α del problema adimensional. En la figura 15 podemos observar que α se mantiene en la zona de inestabilidad predicha por la figura 9 para todo tiempo, por lo que el control es realmente necesario para lograr un caudal estable. En efecto, en la figura 16 observamos que si una vez alcanzado el estado estacionario suprimimos la acción de control, el sistema presenta nuevamente oscilaciones caóticas.

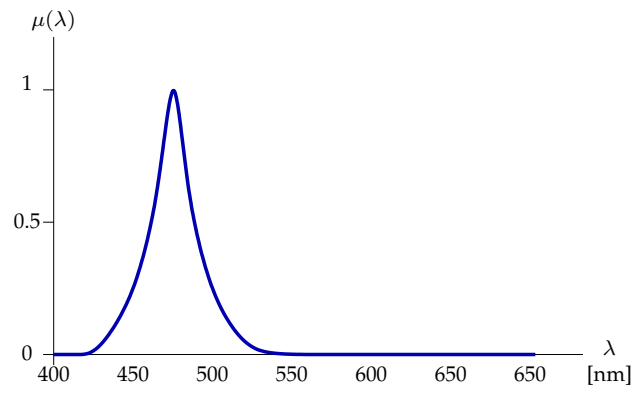
Con este trabajo mostramos que la lógica difusa es una potente herramienta para atacar problemas no lineales que serían muy difíciles de resolver con otras técnicas de control. Más aún, un único controlador es capaz de realizar acciones que en principio son de diferente naturaleza, como lo son intentar invertir el flujo cuando el caudal es negativo y estabilizarlo cuando es positivo. Además no hemos utilizado ningún modelo matemático para diseñar el controlador, sino sólo la solución de estado estacionario y una explicación física coloquial del comportamiento de la planta.

Esta forma de diseñar controladores es un salto cualitativo en la forma de implementar estrategias de control e identificación, de la cual la industria nuclear podría beneficiarse notablemente. Los controladores basados en lógica difusa resultan particularmente aptos para implementar sistemas expertos de asistencia al operador, procesamiento blando para sistemas de alerta temprana, control de procesos auxiliares en centrales nucleares o incluso control de inestabilidades termohidráulicas.

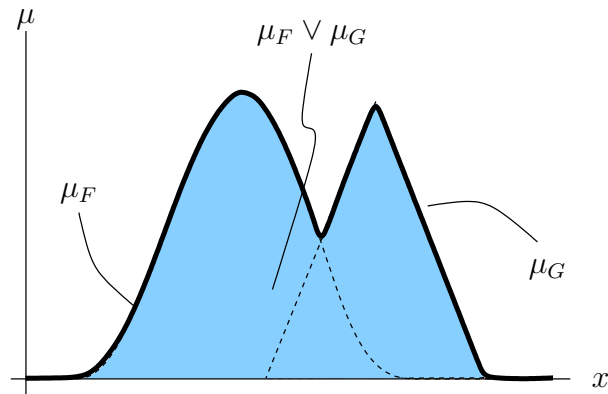
Referencias

- W. Ambrosini, W.J.M. de Krujif, and M. Maiani. An analytical model for the determination of stability boundaries in a natural circulation single-phase thermosyphon loop. *International journal of fluid and mass flow*, 24(6):853–863, December 2003.
- J. C. Ferreri and W. Ambrosini. Stability analysis of single-phase thermosyphon loops by finite-difference numerical methods. *Nuclear Engineering and Design*, 201:11–23, 2000.
- J. C. Ferreri and W. Ambrosini. On the analysis of thermal-fluid-dynamic instabilities via numerical discretization of conservation equations. *Nuclear Engineering and Design*, 215:153–170, 2002.
- J. C. Ferreri and W. Ambrosini. The effect of truncation error on the numerical prediction of linear stability boundaries in a natural circulation single-phase loop. *Nuclear Engineering and Design*, 183:53–76, 1998.
- F. Incropera and D. Dewitt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley, New York, 2002.

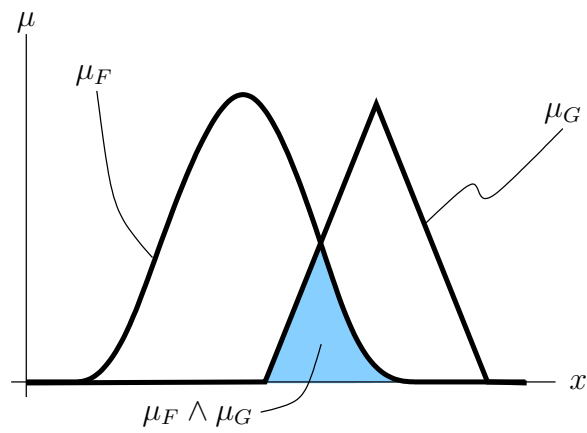
- Chuen Chien Lee. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller—part I. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 20(2):404–419, March/April 1990a.
- Chuen Chien Lee. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller—part II. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 20(2):419–435, March/April 1990b.
- Edward Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- Kevin M. Passino and Stephen Yurkovich. *Fuzzy Control*. Addison-Wesley, 1998.
- Germán Theler. Controladores basados en lógica difusa y loops de convección natural caóticos. Proyecto Integrador de la Carrera de Ingeniería Nuclear, Instituto Balseiro, 2007.
- P. Welander. On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop. *Journal of Fluid Mechanics*, 29(1):17–30, 1967.
- F. M. White. *Fluid Mechanics*. McGraw Hill, 4th edition, 1999.
- John Yen, Reza Langari, and Lotfi A. Zadeh. *Industrial applications of fuzzy logic and intelligent systems*. IEEE New York, 1995.
- Lotfi A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.



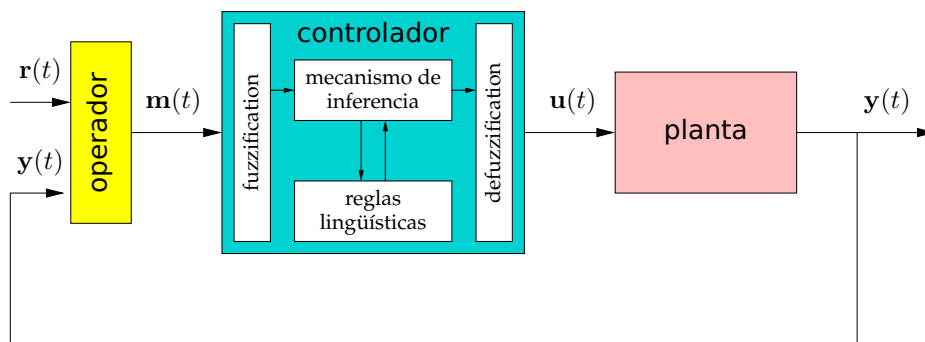
Figuras 1: Función de membresía propuesta para el conjunto difuso “luz azul”



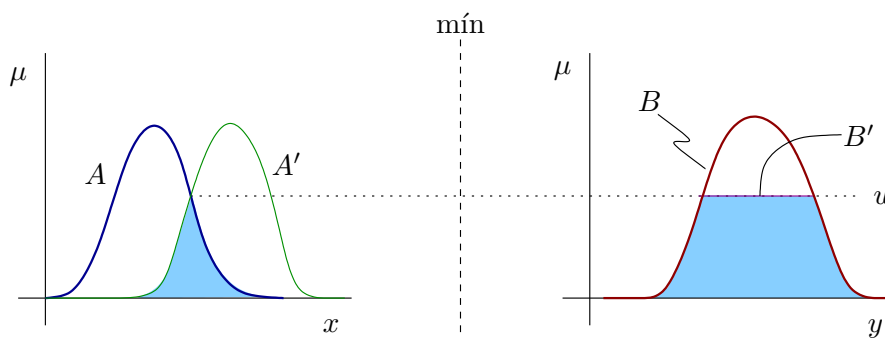
Figuras 2: Representación gráfica de la unión de dos conjuntos difusos



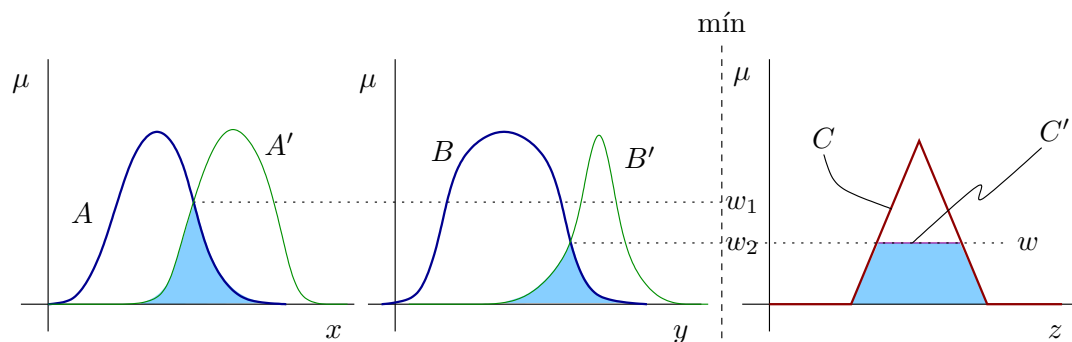
Figuras 3: Representación gráfica de la intersección de dos conjuntos difusos



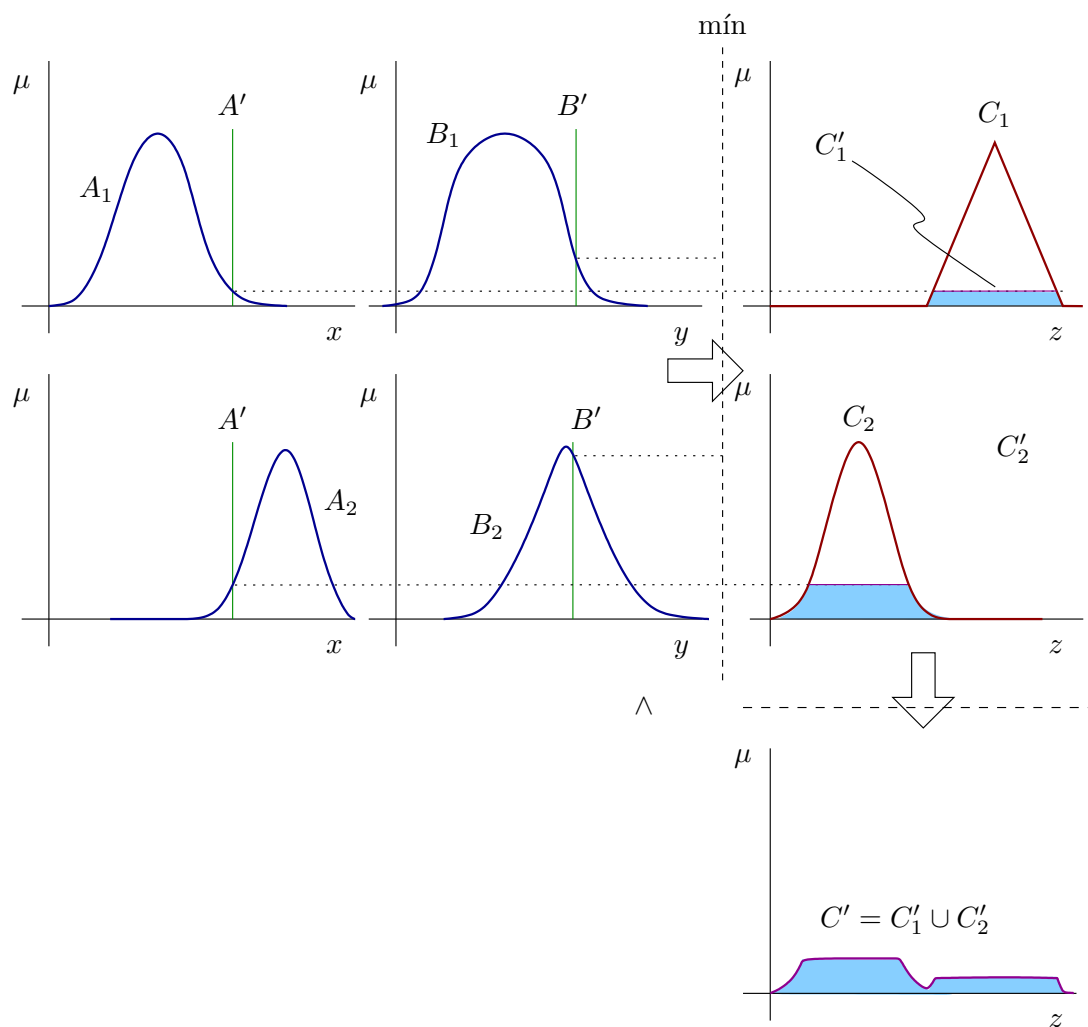
Figuras 4: Estructura interna de un controlador lingüístico difuso



Figuras 5: Interpretación gráfica de la inferencia de una regla con una cláusula



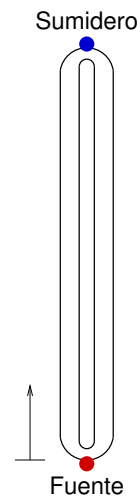
Figuras 6: Interpretación gráfica de la inferencia de una regla con dos cláusulas



Figuras 7: Simplificación del esfuerzo computacional utilizando conjuntos difusos singletes

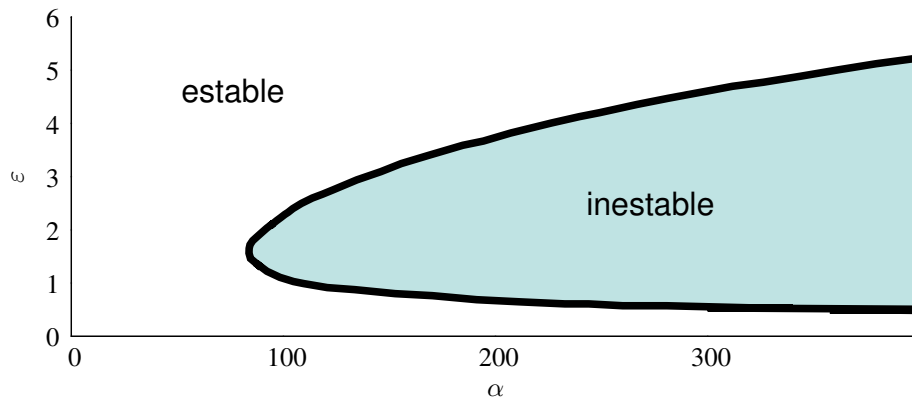


(a) El problema físico original

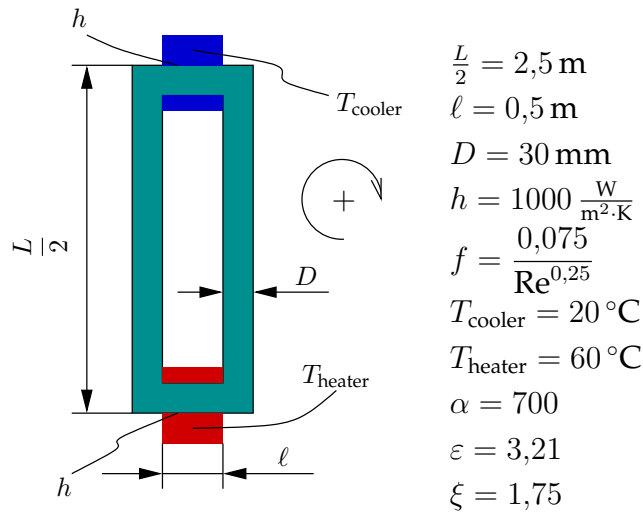


(b) Abstracción para el análisis matemático

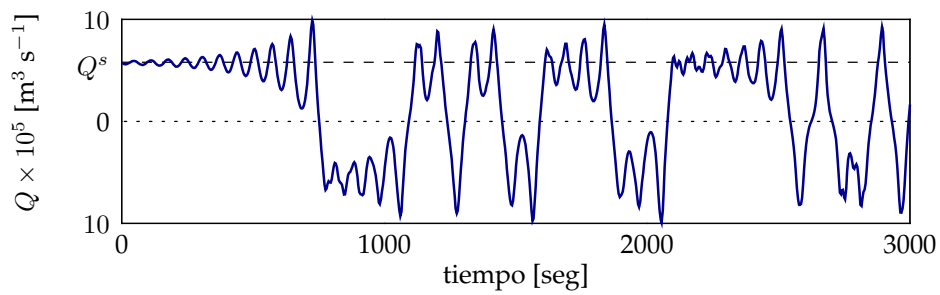
Figuras 8: Loop de circulación natural conocido como el problema de Welander



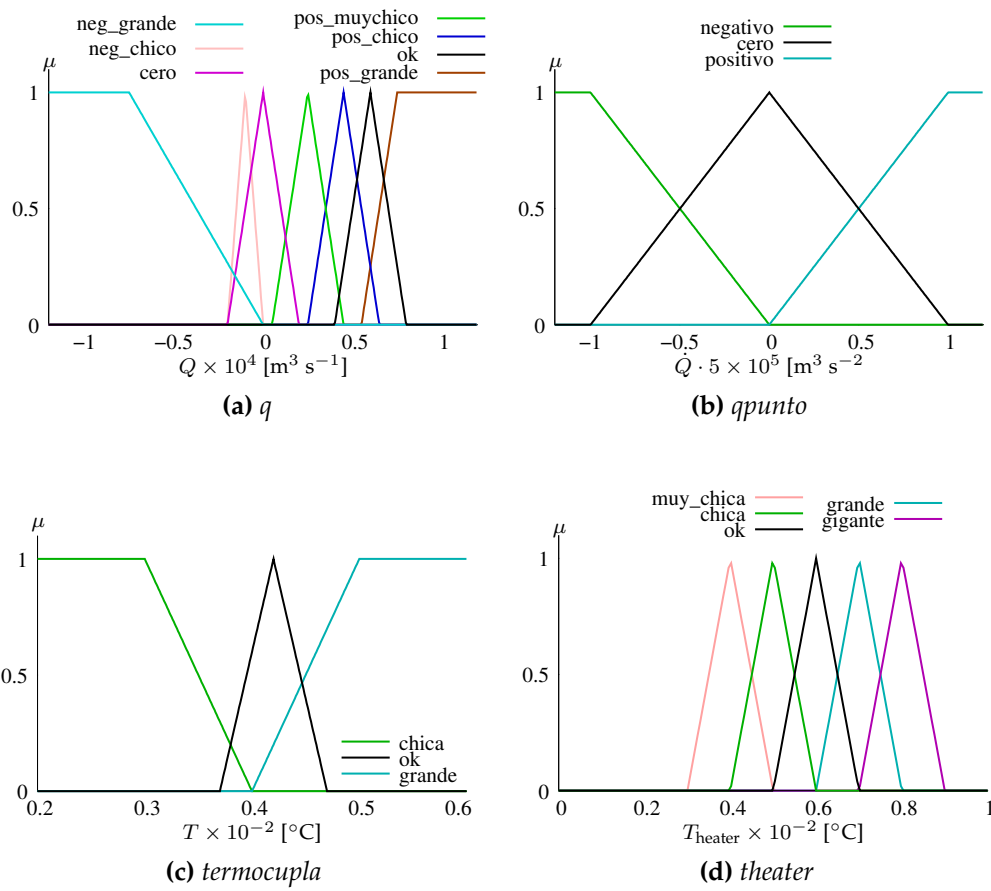
Figuras 9: Mapa de estabilidad para la solución estacionaria q^* positiva con $\xi = 1,75$ (Ferreri and Ambrosini, 1998)



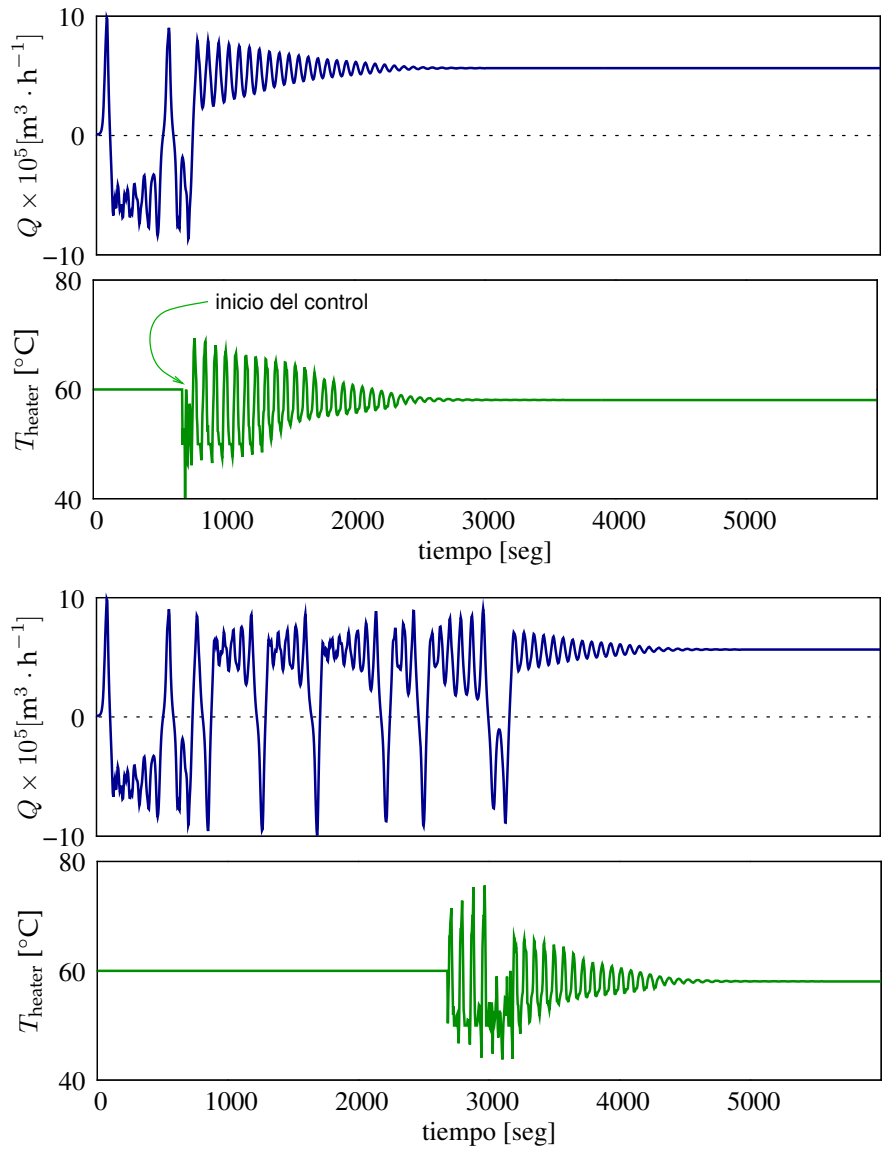
Figuras 10: El circuito de convección natural a controlar



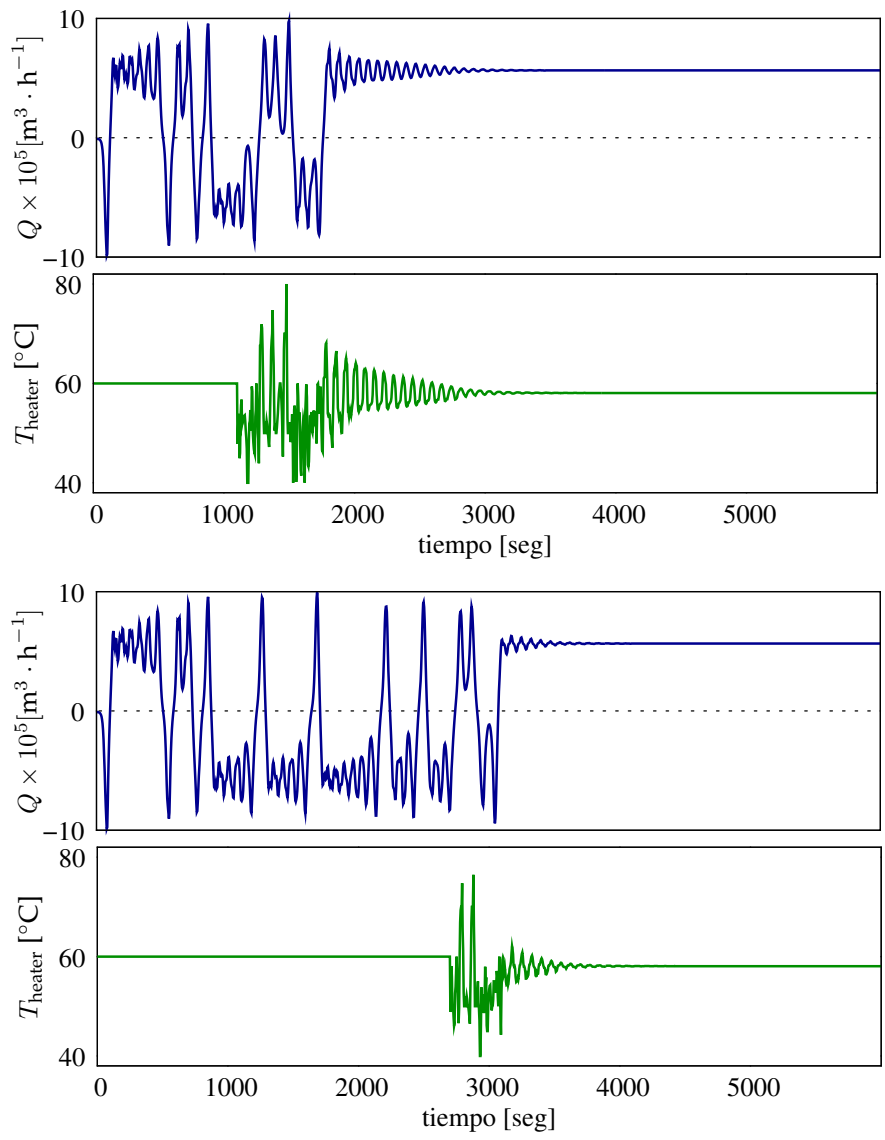
Figuras 11: Inestabilidad de las condiciones estacionarias (16) y (17) del sistema sin controlar



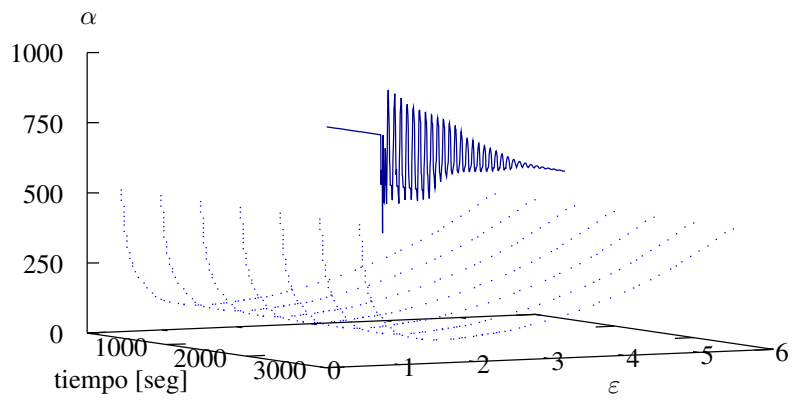
Figuras 12: Funciones de membresía de los conjuntos difusos asociados a los valores lingüísticos del controlador.



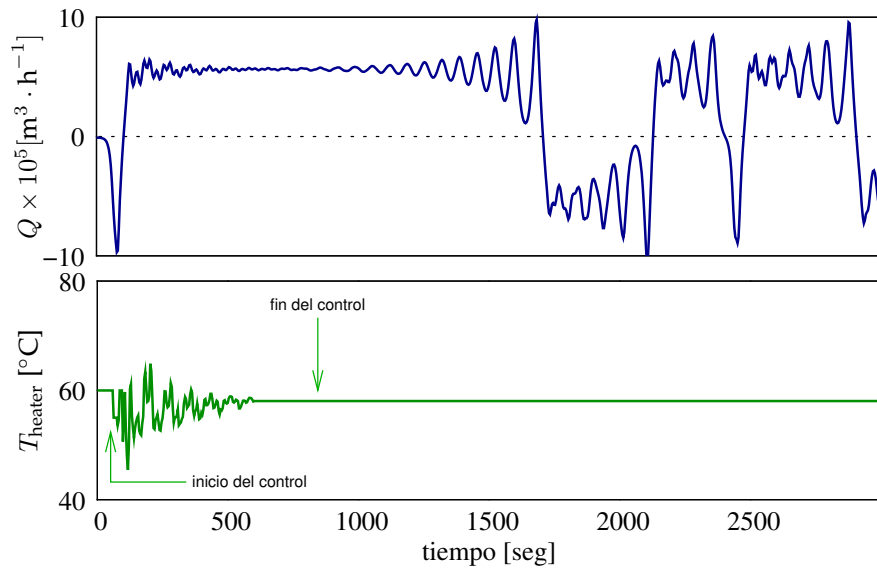
Figuras 13: Resultados del control del caudal en el problema de Welander mediante una acción lingüística sobre la temperatura de la fuente caliente para diferentes instantes de inicio de acción de control. La perturbación inicial es en sentido *horario*.



Figuras 14: Resultados del control del caudal en el problema de Welander mediante una acción lingüística sobre la temperatura de la fuente caliente para diferentes instantes de inicio de acción de control. La perturbación inicial es en sentido *antihorario*.



Figuras 15: Comparación de la evolución temporal del parámetro α controlado, con el límite de estabilidad predicho por la figura 9.



Figuras 16: El sistema vuelve a tener oscilaciones caóticas si una vez alcanzado el estado estacionario el control es suprimido.

Variable	Descripción
β	Coefficiente de expansión isobárico
w	Velocidad media
ρ	Densidad a la temperatura T_0
D	= $2r$ Diámetro del conducto
τ_w	Esfuerzo de corte en la pared
$g(S)$	Componente de la gravedad en la dirección del eje del loop
L	Longitud total del loop
Q	Caudal volumétrico
T	Temperatura de mezcla del fluido
a	Numerador del factor de Fanning f
b	Exponente recíproco de la dependencia f con Re_D
ℓ	Longitud de intercambio de calor
μ	Viscosidad dinámica
A	= πr^2 Área transversal del conducto
h	coeficiente de transferencia térmica
P_w	= $2\pi r$ Perímetro mojado
c	Calor específico a presión constante

Tabla 1: Descripción de las variables de las ecuaciones de conservación de momento (9) y de energía (10).

IF q **IS** neg_grande **AND** *termocupla* **IS** chica **THEN** *theater* **IS** grande
IF q **IS** neg_grande **AND** *qpunto* **IS** negativo **THEN** *theater* **IS** muy_chica
IF q **IS** neg_grande **AND** *qpunto* **IS** cero **THEN** *theater* **IS** muy_chica
IF q **IS** neg_grande **AND** *qpunto* **IS** positivo **THEN** *theater* **IS** chica

IF q **IS** neg_chico **AND** *qpunto* **IS** negativo **THEN** *theater* **IS** muy_chica
IF q **IS** neg_chico **AND** *qpunto* **IS** cero **THEN** *theater* **IS** chica
IF q **IS** neg_chico **AND** *qpunto* **IS** positivo **THEN** *theater* **IS** chica
IF q **IS** cero **AND** *qpunto* **IS** negativo **THEN** *theater* **IS** chica
IF q **IS** cero **AND** *qpunto* **IS** cero **THEN** *theater* **IS** ok
IF q **IS** cero **AND** *qpunto* **IS** positivo **THEN** *theater* **IS** ok
IF q **IS** pos_muychico **THEN** *theater* **IS** chica

IF q **IS** pos_chico **AND** *qpunto* **IS** negativo **THEN** *theater* **IS** chica
IF q **IS** pos_chico **AND** *qpunto* **IS** cero **THEN** *theater* **IS** chica
IF q **IS** pos_chico **AND** *qpunto* **IS** positivo **THEN** *theater* **IS** muy_chica
IF q **IS** ok **AND** *termocupla* **IS** ok **THEN** *theater* **IS** ok
IF q **IS** ok **AND** *qpunto* **IS** negativo **THEN** *theater* **IS** chica
IF q **IS** ok **AND** *qpunto* **IS** cero **THEN** *theater* **IS** ok
IF q **IS** ok **AND** *qpunto* **IS** positivo **THEN** *theater* **IS** grande
IF q **IS** pos_grande **AND** *qpunto* **IS** negativo **THEN** *theater* **IS** gigante
IF q **IS** pos_grande **AND** *qpunto* **IS** cero **THEN** *theater* **IS** grande
IF q **IS** pos_grande **AND** *qpunto* **IS** positivo **THEN** *theater* **IS** grande

Tabla 2: Reglas lingüísticas del controlador difuso