

Výpočet dynamiky chování mikrotronu MT 25 a jeho rychlá simulace

Pavel Krist¹, Jiří Bíla², David Chvátíl¹

¹ Ústav jaderné fyziky AV ČR v.v.i., Řež

² Ústav přístrojové a řídicí techniky, Fakulta strojní, ČVUT v Praze, Praha

Mikrotron MT25 je pulzní cyklický urychlovač elektronů s rezonátorem Kapitzova typu, který je napájen mikrovlnným zářením, jehož zdrojem je magnetron^{1,2}. Částice jsou urychlovány pomocí vysokofrekvenčního (vf) elektrického pole s konstantní frekvencí. Ve vakuové komoře s konstantním homogenním magnetickým polem se elektrony pohybují po kruhových drahách (orbitách) s jedním společným (tečným) bodem. V tomto bodě se nachází vlastní urychlovací rezonátor^{2,4}.

Hlavní parametry mikrotronu MT25 jsou shrnuty v Tab. 1. Poznamenejme, že energie urychlených elektronů je variabilní a závisí na počtu provedených otáček v komoře urychlovače a na velikosti magnetického pole v této komoře^{2,3}.

Tab. 1 Hlavní parametry mikrotronu MT25

Parametr	Hodnota
Energie elektronů	6 – 25 MeV
Energetický zisk na jednu orbitu	přibližně 0,9 MeV
Počet orbit	maximálně 25
Proud urychlených elektronů v pulzu	maximálně 20 mA (při 24 MeV)
Frekvence magnetronu	2796 ± 5 MHz
Pulzní výkon magnetronu	3 MW
Délka vf pulzu	3,9 μs
Opakovací frekvence vf pulzů	423 Hz

Výpočet pohybových rovnic

Celý model je založen na výpočtu pohybu elektronů v urychlovači v závislosti na fázi vf pole v rezonátoru. Výpočet je nutno rozdělit na dvě části:

- výpočet pohybu elektronů uvnitř rezonátoru, zde je elektrické pole proměnné
- výpočet pohybu elektronů mimo rezonátor, kde je elektrické pole nulové^{2,4}

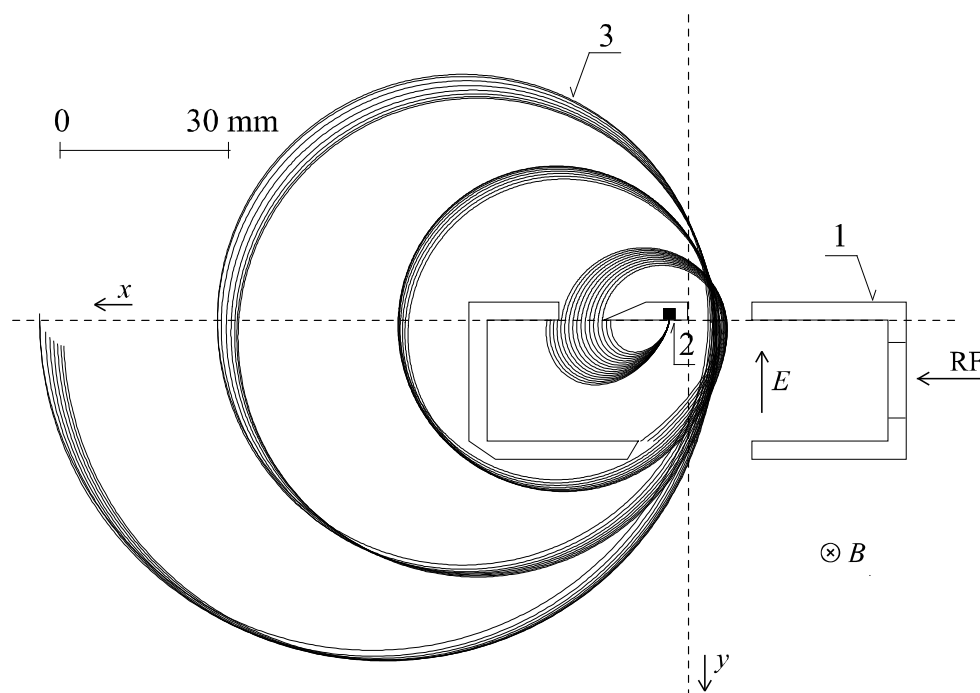
Pro výpočet pohybu uvnitř rezonanční dutiny je nutné vycházet z tvaru elektromagnetického pole, které se nastaví v rezonátoru. V našem případě se jedná o transverzální magnetickou vlnu TM₀₁₀. Po dosazení tvarů polí do obecné relativistické pohybové rovnice^{2,3} a za pomoci několika úprav dostáváme soustavu čtyř diferenciálních rovnic (pro výpočet ve dvourozměrném prostoru pro $z = 0$)⁴. Zde předpokládáme, že axiální oscilace jsou zanedbatelné a že axiální fokusace je ideální.

$$\frac{d\beta_x}{d\varphi} = \sqrt{1 - \beta^2} (-\varepsilon\Omega\beta_y\beta_x J_0(x)\cos\varphi - \Omega\beta_y + \varepsilon\Omega\beta_y J_1(x)\sin\varphi)$$
$$\frac{d\beta_y}{d\varphi} = \sqrt{1 - \beta^2} (-\varepsilon\Omega\beta_y^2 J_0(x)\cos\varphi + \Omega\beta_x + \varepsilon\Omega J_0(x)\cos\varphi - \varepsilon\Omega\beta_x J_1(x)\sin\varphi)$$
$$\frac{dx}{d\varphi} = \beta_x \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \beta_y$$

Ve výpočtu této soustavy jsme vycházeli z výpočtů provedených v pracích^{2,3}. Také jsme se drželi zavedených symbolů. φ je fáze vlny, $\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}$ je relativistická rychlost, $\beta_x = \frac{1}{c} \frac{dX}{dt} = \frac{dx}{d\varphi}$, kde X je souřadnice v mm a $x = kX$, $\varepsilon = \frac{E}{cB}$, $\Omega = \frac{B}{B_0}$. Zde pak B je homogenní magnetické pole ve vakuové komoře urychlovače a B_0 je standardní cyklotronové pole a c je rychlost světla.

Pro výpočet pohybu elektronů mimo rezonátor předpokládáme, že elektrony vystupují z rezonátoru kolmo na magnetické pole, které je ve všech částech komory urychlovače totožné. Elektrony tedy opíší kružnici a vrací se s jistým fázovým posuvem zpět do rezonátoru. Rovnice popisující tento pohyb nalezneme v práci².

Nyní máme k dispozici statický model urychlovače, který říká, za jakých podmínek (parametry ε , Ω a φ) se dostane elektron z katody na zvolenou orbitu a jakou bude mít energii. Zobrazení výsledků z pohybových rovnic je na Obr. 1. Zde jsou zakresleny pouze 3 orbity.



Obr. 1 Trajektorie elektronů pro různé počáteční fáze φ_0 . 1 – mikrovlnný rezonátor, 2 – zdroj elektronů (žhavená LaB_6 katoda), 3 – trajektorie elektronů. Fáze $\varphi_0 = 0$ je v maximu elektrického pole. Počáteční fáze, pro které jsou splněny urychlovací podmínky, nabývají hodnot od $-0,1$ rad do $0,1$ rad.

Zdroj elektronů

Jako zdroj elektronů slouží přímo žhavená katoda, která je vyrobena z hexaboridu lanthanu (LaB_6). Tato katoda zajišťuje dostatečně vysokou a stabilní intenzitu emisního proudu v přítomnosti silného elektrického pole. Hustotu emisního proudu katody popisuje Richardsonův zákon. V okolí katody je elektrické pole o velikosti E_{cath} , které snižuje povrchovou bariéru o ΔW_{bind} a zvyšuje tak hustotu emisního toku j . Tento jev je znám jako Shottkyho efekt a může být namodelován jednoduchou úpravou Richardsonovi rovnice. Dostáváme tedy výraz

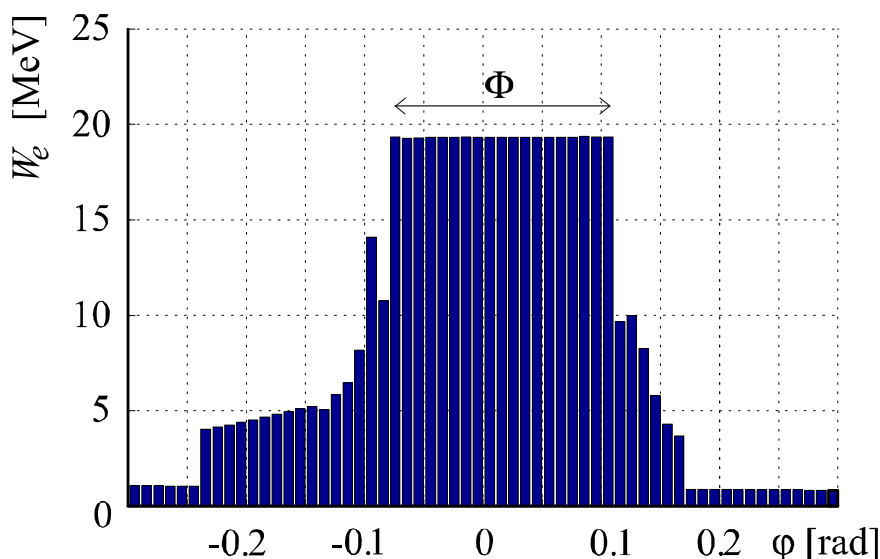
$$j = AT^2 e^{-\frac{W_{\text{bind}} - \Delta W_{\text{bind}}}{kT}},$$

kde $\Delta W_{\text{bind}} = \sqrt{\frac{e^3 E_{\text{cath}}}{4\pi\epsilon_0}}$ (ϵ_0 je permittivita vakua), A je Richardsonova konstanta, W_{bind} je výstupní práce katody, k je Boltzmannova konstanta, T je termodynamická teplota a e je náboj elektronu.

Velikost výsledného proudu urychlených elektronů i_{bunch} je tedy závislá na teplotě katody T , velikosti elektrického pole E a dále také na kvalitě splnění urychlovacích podmínek, což specifikuje velikost oblasti fázového záchytu Φ . Oblast fázového záchytu je interval počátečních fází φ_0 , pro které platí, že urychlované elektrony se dostanou na požadovanou orbitu (viz Obr. 2).

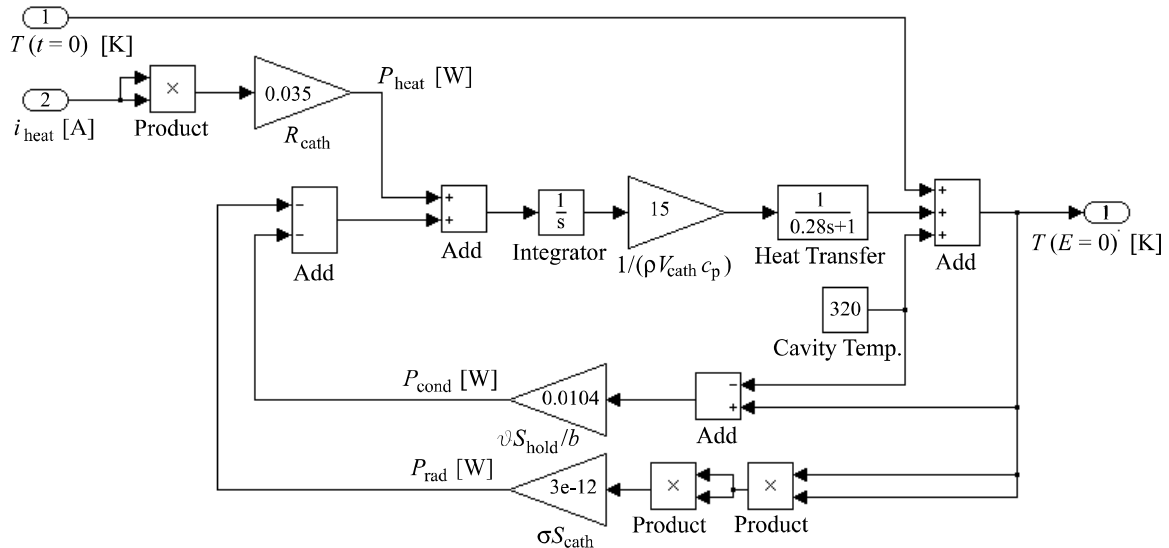
$$i_{\text{bunch}} = j S_{\text{emiss}} \frac{\Phi}{2\pi},$$

kde S_{emiss} je plocha katody, emitující elektrony do rezonátoru.



Obr. 2 Závislost dosažené energie elektronů na počáteční fázi s vyznačením oblasti záchytu. Počet orbit $n = 20$, koeficient $\epsilon = 0,8$ a $\Omega = 1,8$. Oblast záchytu $\Phi = 11^\circ$ a dosažená energie $W_e = 19,35$ MeV.

Teplota katody byla počítána na základě žhavicích a ochlazovacích výkonových poměrů. Žhavicí příkon $P_{\text{heat}} = R_{\text{cath}} i_{\text{heat}}^2$, kde R_{cath} je odpor katody v pracovním bodě a i_{heat} je žhavicí proud. Ochlazování katody pak předpokládáme, že se děje dvěma způsoby. Ochlazování radiací je počítáno ze Stefan-Boltzmanova zákona jako vyzařování absolutně černého tělesa. Další způsob je způsoben tepelnou vodivostí držáku katody, jehož studený konec je připevněn k tělu rezonátoru a má v ustáleném stavu stejnou teplotu jako rezonátor. Pro výpočet jsme předpokládali, že teplota studeného konce držáku je konstantní a rovna 320 K. Výpočet byl proveden jako simulace v prostředí Matlab–Simulink⁶, jak ukazuje Obr. 3. Poznamenejme, že rovnice pro výpočet tepelného přenosu v katodě je uveden v Laplaceově transformaci. Její přesný tvar byl zjištěn fitováním rovnice na naměřené hodnoty.



Obr. 3 Simulační schéma LaB₆ katody v prostředí Simulink (Hot Cathode Model). $T(t=0)$ – teplota katody na počátku simulace, i_{heat} – žhavicí proud katody R_{cath} – odpor katody, P_{heat} – žhavicí příkon, ρ – hustota katody, V_{cath} – objem katody, c_p – tepelná kapacita katody, P_{cond} – ochlazovací výkon způsobený odvodem tepla skrze Ta držák katody, ϑ – tepelná vodivost Ta, S_{hold} – průřez Ta držáku katody, b – délka držáku katody, P_{rad} – ochlazovací výkon způsobeným radiací, σ – Stefan-Boltzmannova konstanta, S_{cath} – povrch katody, $T(E=0)$ – výsledná teplota bez vlivu elektrického pole.

Výkonové poměry v rezonátoru

Poměr amplitudy elektrického pole E v y ose rezonátoru a homogenního magnetického pole B je parametr, který se musí pečlivě nastavit. V literatuře je odvozen vztah pro jeho optimální hodnotu². Ta závisí na délce rezonátoru v ose y a pro většinu rezonátorů používaných na mikrotronu MT25 se blíží hodnotě $\varepsilon = 0,8$.

Velikost elektrického pole v rezonátoru závisí na příkonu dodávaného do systému magnetronem P_{mag} , odváděnému výkonu urychlenými elektrony P_{out} a vlastním činitelem jakosti rezonátoru Q_0 a vazebním koeficientem κ . Činitel jakosti rezonátoru a vazební koeficient pak můžeme vyjádřit pomocí rozptylového koeficientu s_{11} ⁵.

Příkon vstupující do rezonátoru P_{in} pak můžeme spočítat ze vztahu $P_{\text{in}} = s_{11}P_{\text{mag}}$. Rozdíl mezi dodaným a na urychlování spotřebovaným výkonem, je $P_{\text{cav}} = s_{11}P_{\text{mag}} - P_{\text{out}}$. Pokud předpokládáme, že druhá mocnina amplitudy elektrického pole v ose rezonátoru je úměrná P_{cav} , pak pro výpočet parametru ε můžeme použít následující rovnici:

$$\varepsilon = \sqrt{k_R (s_{11}P_{\text{mag}} - P_{\text{out}}) / B},$$

kde k_R je koeficient úměrný impedanci nezátíženého rezonátoru.

Zjednodušený model – rychlá simulace

Jelikož statický model popsáný v kapitole „Výpočet pohybových rovnic“ je velmi náročný na výpočetní čas bylo přistoupeno k aproximaci tohoto modelu polynomickými funkcemi. Pro představu, pro jediný časový okamžik výpočtu pohybu elektronů potřebujeme vypočítat 104 diferenciálních rovnic, řešící opakovaně průlet elektronů skrze rezonátor (pro $n = 25$). Dále

musíme tyto rovnice řešit pro různé počáteční fáze φ_0 . Pokud předpokládáme, že pro relativně přesný výpočet musíme výpočet provést pro 100 různých fází, dostáváme se již k číslu 10 400 diferenciálních rovnic. Při zvoleném simulačním kroku 2 ms, což odpovídá přibližně opakovací frekvenci mikrovlnných makropulzů, dostáváme se k hodnotě 5 milionů diferenciálních rovnic za jednu sekundu simulovaného času.

Aproximace modelu byla provedena tak, že se vynesly křivky zobrazující v jakém intervalu fází v pole mikrotron pracuje v závislosti na nastavení parametrů ε a Ω . Tento fázový interval nám udává aktuální oblast fázového záchytu Φ . Pro další výpočty označme Φ_ε jako normovanou oblast fázového záchytu v závislosti na změně parametru ε při optimální hodnotě parametru Ω a Φ_Ω jako normovanou oblast fázového záchytu v závislosti na změně parametru Ω při optimální hodnotě parametru ε . Celková velikost Φ je získána vynásobením těchto dvou získaných oblastí fázového záchytu s Φ_{opt} , která značí maximální oblast fázového záchytu pro optimální naladění urychlovače, ta je rovna 11° .

$$\Phi_\varepsilon = 8202,86\varepsilon^4 - 19819,56\varepsilon^3 + 15331,89\varepsilon^2 - 3274,88\varepsilon - 430,78 \quad \varepsilon \in (0,768; 0,858)$$

$$\Phi_\Omega = 31,4679\Omega^3 - 194,2143\Omega^2 + 395,6607\Omega - 265,4643 \quad \Omega \in (1,65; 2,26)$$

Pro hodnoty ε a Ω mimo definiční obor jsou hodnoty fázových záchytů nulové. Nyní tedy můžeme psát novou rovnici pro výpočet proudu urychlených elektronů:

$$i_{\text{bunch}} = jS_{\text{emiss}} \frac{\Phi_{\text{opt}}}{2\pi} \Phi_\varepsilon \Phi_\Omega$$

Odhad energie elektronů byl spočítán pomocí následující rovnice²:

$$W_e = (n + 1)\Omega W_0 ,$$

kde W_0 je klidová energie elektronu. Rovnice říká, že energie urychlených elektronů je závislá pouze na velikosti parametru Ω a na orbitě n ze které elektrony vyvádíme.

Výpočet zatížení rezonátoru musíme rozdělit do několika částí. Prvním zatěžovacím výkonem je P_{zero} který zatěžuje rezonátor kontinuálně na nulté (vnitřní) orbitě $n = 0$. Tento výkon se mění jen v malém rozmezí v závislosti na parametru ε a je možno ho odhadnout z rovnice:

$$P_{\text{zero}} \approx i_{\text{emiss}} \varepsilon \frac{1,1}{\sqrt{2}} \text{ [kW]}$$

Druhým zatěžovacím výkonem je výkon ve svazku P_{bunch} , ten můžeme jednoduše vypočítat ze znalosti proudu urychlených elektronů a jejich energie:

$$P_{\text{bunch}} = W_e i_{\text{bunch}}$$

Bohužel nemáme informaci o tzv. nerezonančních elektronech, které jsou urychlovány, ale nedosáhnou požadované orbity. Jeho výpočet byl stejně jako výpočet proudu ve svazku vypořizován z chování modelu založeného na výpočtu pohybových rovnic. Pro tento jev byly vytvořeny polynomické rovnice v závislosti na koeficientech ε a Ω vztažené k hodnotě P_{zero} .

$$P_\varepsilon = 12,85(51,179\varepsilon^4 - 183,55\varepsilon^3 + 241,19\varepsilon^2 - 137,42\varepsilon + 28,684) \quad \varepsilon \in (0,694; 1,084)$$

$$P_\Omega = 12,85(-8,603\Omega^4 + 65,287\Omega^3 - 185,1\Omega^2 + 232,28\Omega - 108,7) \quad \Omega \in (1,47; 2,28)$$

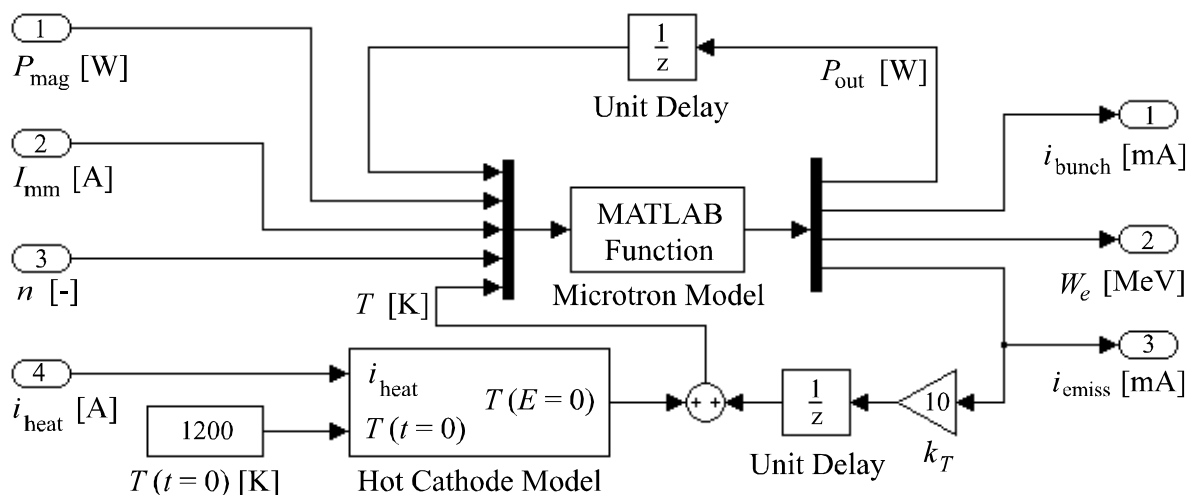
Pro hodnoty ε a Ω mimo definiční obor jsou hodnoty výkonů nulové.

$$P_{\text{nonres}} = P_\varepsilon P_\Omega P_{\text{zero}}$$

Výsledný zatěžovací výkon pak počítáme jako součet všech tří složek:

$$P_{\text{out}} = P_{\text{zero}} + P_{\text{bunch}} + P_{\text{nonres}}$$

Simulační schéma celého urychlovače je zobrazeno na Obr. 4. Zde vidíme již popsanou zpětnou vazbu výkonu P_{out} a dále je zde zachycena zpětná vazba působící na teplotu katody. Ovlivňování teploty katody je způsobeno nerezonančními elektrony, tedy elektrony, které v průběhu urychlovacího procesu, vypadávají z rezonance a nedostanou se na požadovanou orbitu. Tyto energetické elektrony mohou dopadat na katodu a způsobovat její ohřev. Jeví je podrobněji popsán v [3]. Simulační schéma je připraveno na přímé spojení s regulačním obvodem.

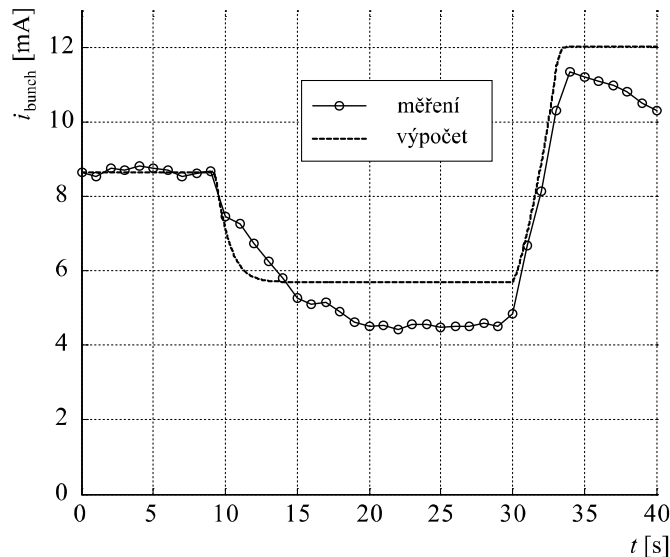


Obr. 4 Celkové simulační schéma mikrotronu v prostředí Simulink. P_{mag} – mikrovlnný příkon urychlovače, I_{mm} – proud hlavní cívkou magnetu urychlovače, n – číslo orbity ze které vyvádíme elektrony, i_{heat} – žhavicí proud katody, $T(t=0)$ – teplota katody na počátku simulace, $T(E=0)$ – teplota katody vypočtená bez vlivu elektrického pole, T – teplota katody, k_T – konstanta určující ohřev katody vlivem nerezonančních elektronů, P_{out} – celkový výkon ve všech urychlovaných elektronech (zatížení rezonátoru), i_{bunch} – proud urychlených elektronů, W_e – energie urychlených elektronů.

Porovnání modelu a realitou

Na Obr. 5 je uvedený příklad pro srovnání chování modelu a vlastního urychlovače. Závislost vynesena v grafu ukazuje proud urychlených elektronů v závislosti na změnách parametrů urychlovače způsobených obsluhou. V čase $t=0$ s byl urychlovač naladěn do optimálního stavu. Pak v čase $t=9$ s byl zvýšen žhavicí proud i_{heat} z hodnoty 29,7 A na hodnotu 30 A. To vedlo přezhavení katody a zvýšení zatížení rezonátoru, což vedlo k zhoršení účinnosti urychlovače a ke snížení proudu urychlených elektronů i_{bunch} . Následně byl zvýšen mikrovlnný příkon P_{mag} z hodnoty 1,8 MW na hodnotu 2,1 MW. To se uskutečnilo v čase $t=30$ s. Zvýšení příkonu způsobilo nárůst energie v rezonátoru a zlepšení účinnosti. Výsledkem je zvýšení proudu urychlených elektronů.

Rozdíl naměřené a vypočítané křivky je způsoben tím, že když urychlovač opouští optimální stav, mění se současně několik dalších parametrů. Především dojde ke změně rezonanční frekvence rezonátoru nebo magnetronu. To má vliv na velikost parametru s_{11} a Ω . Tyto parametry předpokládáme v modelu konstantní. Předpokládáme, že tento jeví eliminuje právě vyvíjeným systémem pro srovnání frekvence magnetronu a rezonátoru.



Obr. 5 Proud urychlených elektronů i_{bunch} . V čase $t = 0$ s byl urychlovač optimálně naladě, v čase $t = 9$ s bylo zvednuto žhavení i_{heat} o 0,3 A, v čase $t = 30$ s byl zvednut mikrovlnný příkon P_{mag} o 300 kW.

Závěr

Výsledný matematický model mikrotronu MT25 byl testován s různými vstupními podmínkami v porovnání s chováním reálného urychlovače. Dobrá shoda byla pozorována v případě optimálního naladění urychlovače. Bohužel při měření mimo optimální stav není výsledek jednoduché vyhodnotit, jelikož u reálného urychlovače se při změně jedné proměnné současně mění i některé další. Nicméně, model je připraven pro sestavení a testování řídicího systému, který bude využívat fuzzy regulátor. Od řídicího systému očekáváme, že zajistí stabilitu proudu urychlených elektronů, urychlovač bude pracovat v optimálních podmínkách a tím se také zajistí maximalizace proudu urychlených elektronů.

1. M. Vognar, Č. Šimáně, D. Chvátil, *Twenty Years of Microtron Laboratory Activities at CTU in Prague*, Acta Polytechnica Vol. 43, No. 2/2003, Prague: CTU in Prague, 2003, pp. 50 – 58.
2. S. P. Kapitza, V. N. Melekhin, *The Microtron*, London: Harwood Academic Publishers, 1978, pp. 204.
3. J. M. Tsipenyuk, *The Microtron, development and applications*, Taylor & Francis, London 2002.
4. P. Krist, J. Bíla, *Microtron Modelling and Control*, in Nuclear Physics Methods and Accelerators in Biology and Medicine, New York: American Institute of Physics, 2009, pp. 183-185.
5. D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York 1998.
6. *MatLab and Simulink for technical computing*, <http://www.mathworks.com>, The MathWorks Inc., 2011, Web. 10. September. 2011.

Computing of MT25 Microtron Dynamic Behavior and Fast Simulation

Pavel Krist¹, Jiří Bíla², David Chvátil¹

¹Nuclear Physics Institute, Academy of Sciences of the Czech Republic, Řež, Czech Republic

²Institute of Instrumentation and Control Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, Czech Technical University in Prague, Prague, Czech Republic

This paper presents the design of a mathematical model and its fast simulation developed for the setup of the control system of the MT25 microtron, which is a cyclic electron accelerator. This type of accelerator has been controlled manually until now. The mathematical model is based on calculations of the electron motion in the accelerating cavity and vacuum chamber. The simulation diagram was created using the Matlab-Simulink tools.