

**CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS**  
**Rio de Janeiro**

**Notas de Física**

**CBPF-NF-018/11**

**December 2011**

**Oscilação de barra rígida na relatividade especial**  
**Oscilado de rigida stango êe la speciala relativeco**

F.M. Paiva & A.F.F. Teixeira



# Oscilação de barra rígida na relatividade especial

## Oscilado de rigida stango ĉe la speciala relativeco

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II  
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

### Resumo

Ĉe la speciala relativeco, rigida stango moviĝas sur si mem, kun unu fino oscilante harmonie. Ni malkovris limigajn kondiĉojn pri la amplitudo de la movado kaj pri la longo de la stango, necesegaj por elimini ne-fizikajn solvojn.

Na relatividade especial, uma barra rígida desliza sobre si mesma, com uma extremidade oscilando harmonicamente. Nós descobrimos restrições na amplitude do movimento e no comprimento da barra, imprescindíveis para eliminar soluções não-físicas.

## 1 Enkonduko

Rigida stango komence ripozas, etendita sur akso  $x$  de inercia sistemo de referenco  $S_0$ , inter pozicioj  $x_a = 0$  kaj  $x_b = L > 0$ . En momento  $t = 0$  la fino  $a$  komencas movadon  $x_a(t_a)$  sur akso  $x$ . Ni nomas  $[t_a, x_a]$  la postaj eventoj de  $a$  en sistemo  $S_0$ .

La fino  $b$  rigide akompanas la movadon de  $a$ , ankaŭ sur la akso. Tio estas,  $b$  konservas la distancon  $L$  al  $a$  en la sinsekvaj inerciaj sistemoj de referenco  $S_v$  kie  $a$  momente restas. Vidu [1], [2, paĝo 289], [3, paĝo 50], [4] – [7], pro detaloj pri rigida movado en speciala relativeco. Nomante  $[t_b, x_b]$  la eventoj de  $b$  en sistemo  $S_0$ , Nikolić [5] montris, ke en iu ajn movado  $x_a(t_a)$  okazas

$$x_b = x_a + L\gamma, \quad t_b = t_a + \frac{L}{c^2}v\gamma; \quad v := v_a(t_a) = \frac{dx_a}{dt_a}, \quad \gamma := (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \quad (1)$$

Simpla kalkulo [8, Sek. 9] montras, ke  $dx_b/dt_b$ , en momento  $t_b$ , egalas  $dx_a/dt_a$  en momento

## 1 Introduĉo

Uma barra rígida está em repouso, estendida sobre o eixo  $x$  de um referencial inercial  $S_0$ , entre as posições  $x_a = 0$  e  $x_b = L > 0$ . No momento  $t = 0$  a extremidade  $a$  inicia um movimento  $x_a(t_a)$  sobre o eixo  $x$ . Nós chamamos  $[t_a, x_a]$  os subsequentes eventos de  $a$  no sistema  $S_0$ .

A extremidade  $b$  acompanha rigidamente o movimento de  $a$ , também sobre o eixo. Isto é,  $b$  conserva a distância  $L$  para  $a$  nos sucessivos referenciais inerciais  $S_v$  de imobilidade momentânea de  $a$ . Veja [1], [2, pág. 289], [3, pág. 50], [4] – [7], para detalhes sobre movimento rígido em relatividade especial. Chamando  $[t_b, x_b]$  os eventos de  $b$  no referencial  $S_0$ , Nikolić [5] mostrou que em qualquer movimento  $x_a(t_a)$  ocorre

Um cálculo simples [8, Seç. 9] mostra que  $dx_b/dt_b$ , no momento  $t_b$ , é igual a  $dx_a/dt_a$ , no momento

$t_a$ . Konsekvence, ĉiuj punktoj de la rigida stango restas en la sinsekvaj inerciaj sistemoj  $S_v$ .

Ni studos la okazon kun fino  $a$  de stango moviĝante harmonie en sistemo  $S_0$ . Se  $A$  estas la duonamplitudo de movado, kaj  $\omega$  estas la frekvenco, tial

$t_a$ . Consequentemente, todos os pontos da barra rígida estão imóveis nos sucessivos sistemas inerciais  $S_v$ .

Vamos estudar o caso com a extremidade  $a$  da barra se movendo harmonicamente no sistema  $S_0$ . Se  $A$  for a semiamplitude do movimento, e  $\omega$  for a frequência, então

$$x_a = A(1 - \cos \omega t_a). \quad (2)$$

Por tiu movado de  $a$ , la ne-harmonia movado de  $b$  estas esprimita per la parametro  $t_a$  kiel

Para esse movimento de  $a$ , o movimento não-harmônico de  $b$  é expresso mediante o parâmetro  $t_a$  como

$$x_b = x_a + \frac{L}{\sqrt{1 - (A\omega/c)^2 \sin^2 \omega t_a}}, \quad t_b = t_a + \frac{(AL\omega/c^2) \sin \omega t_a}{\sqrt{1 - (A\omega/c)^2 \sin^2 \omega t_a}}. \quad (3)$$

Sen perdi generalecon, ni konsideru  $\omega = 1$  kaj  $c = 1$  (vidu [10]). Tiu simpligas ekvaciojn (2) kaj (3) al

Sem perder generalidade, nós vamos considerar  $\omega = 1$  e  $c = 1$  (veja [10]). Isso simplifica as equações (2) e (3) para

$$x_a = A(1 - \cos t_a), \quad x_b = x_a + \frac{L}{\sqrt{1 - A^2 \sin^2 t_a}}, \quad t_b = t_a + \frac{AL \sin t_a}{\sqrt{1 - A^2 \sin^2 t_a}}. \quad (4)$$

Tiel, la movado de  $b$  estas karakterizita per paro  $[A; L]$ . La duonamplitudo  $A$  estas limigita al  $A < 1$ , por eviti ke la rapido  $A \sin t_a$  de  $a$  atingas valoron  $c$ . Ĉar  $v_b(t_b) = v_a(t_a)$ , tial ankaŭ la rapido de  $b$  neniam estos  $c$ . Ekzemple, la paro  $[0,5; 1,8]$  generas movadojn por  $a$  kaj  $b$  kiel figuro 1a montras.

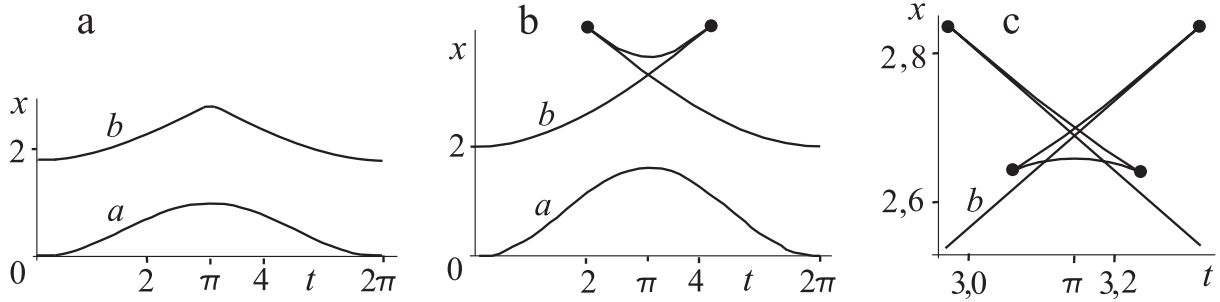
Tamen, la nura kondiĉo  $A < 1$  ne tute eliminis ne-fizikajn solvojn de (4b) kaj (4c). Ekzemple, la paro  $[A; L] = [0,8; 2,0]$  permesas finon  $b$  esti en eĉ 3 malsimilaj pozicioj  $x_b$  en sama momento  $t_b$ , kiel figuro 1b montras. Kaj la paro  $[0,88; 0,90]$  permesas  $b$  esti samtempe en eĉ 5 malsimilaj lokoj, kiel figuro 1c montras.

Ĉar tiuj matematikaj rezultoj estas fizike neakcepteblaj, tial ni devas trovi pluajn limigojn pri  $A$  kaj  $L$ . Ni profitas la evidentajn abruptajn malordojn en figuroj 1b kaj 1c, indikitaj per nigraj disketoj. Ĉiu malordo rezultas el nefinia akcelo, kiu estas fizike nebla.

Nesta forma, o movimento de  $b$  é caracterizado por um par  $[A; L]$ . A semiamplitude  $A$  é limitada a  $A < 1$ , para evitar que a velocidade  $A \sin t_a$  de  $a$  atinja o valor  $c$ . Como  $v_b(t_b) = v_a(t_a)$ , então tampouco a velocidade de  $b$  jamais será  $c$ . Por exemplo, o par  $[0,5; 1,8]$  gera movimentos para  $a$  e  $b$  como a figura 1a mostra.

Entretanto, a restrição  $A < 1$  sozinha não elimina totalmente soluções não-físicas de (4b) e (4c). Por exemplo, o par  $[A; L] = [0,8; 2,0]$  permite a extremidade  $b$  estar em até 3 diferentes posições  $x_b$  em um mesmo momento  $t_b$ , como a figura 1b mostra. E o par  $[0,88; 0,90]$  permite  $b$  estar simultaneamente em até 5 lugares distintos, como a figura 1c mostra.

Como esses resultados matemáticos são fisicamente inaceitáveis, nós devemos encontrar outras limitações em  $A$  e  $L$ . Nós aproveitamos as evidentes bruscas desordens nas figuras 1b e 1c, indicadas por pequenos discos negros. Cada desordem resulta de uma aceleração infinita, que é fisicamente impossível.



Figuro 1: Horizonta akso indikas la tempon  $0 < t < 2\pi$  en inercia sistemo  $S_0$ , kaj la vertikala akso montras poziciojn  $x_a$  (harmonia movado) kaj  $x_b$  (ne-harmonia movado). La nekonstanta distanco inter  $b$  kaj  $a$  en sistemo  $S_0$  estas mezurita vertikale. La klino de la trajektorioj evidentigas, ke ĉiu rapido estas plieta ol  $c$ . Nigra disketo (●) indikas eventon  $[t_b, x_b]$  kie nefinia propra akcelo okazas.

- a La paro de parametroj  $[A; L] = [0,5; 1,8]$  generas movadojn fizike eblajn.
- b La paro  $[0,8; 2,0]$  permesas  $b$  sammomente esti en eĉ 3 malsimilaj lokoj, en tempa intervalo  $2,0 < t < 4,3$ . Do tiu movado estas ne-fizika.
- c La paro  $[0,88; 0,90]$  permesas  $b$  sammomente esti en eĉ 5 malsimilaj lokoj. Do tiu movado estas ne-fizika.

Figura 1: O eixo horizontal indica o tempo  $0 < t < 2\pi$  do referencial inercial  $S_0$ , e o eixo vertical mostra as posições  $x_a$  (movimento harmônico) e  $x_b$  (movimento não-harmônico). A distância variável entre  $b$  e  $a$  no referencial  $S_0$  é medida verticalmente. A inclinação das trajetórias evidencia que toda velocidade é menor que  $c$ . Um pequeno disco negro (●) indica um evento  $[t_b, x_b]$  onde ocorre aceleração própria infinita.

- a O par de parâmetros  $[A; L] = [0,5; 1,8]$  gera movimentos fisicamente possíveis.
- b O par  $[0,8; 2,0]$  permite  $b$  estar em até 3 locais distintos em um mesmo momento, no intervalo temporal  $2,0 < t < 4,3$ . Portanto esse movimento é não-físico.
- c O par  $[0,88; 0,90]$  permite  $b$  estar em até 5 locais distintos, simultaneamente. Portanto esse movimento é não-físico.

## 2 Propra akcelo

Propra akcelo de punkto estas tiu akcelo mezurita en inercia sistemo de referenco kie la punkto momente restas. Vidu [1], [9, pág.22], [2, pág.13], [3, pág.49], [4], [5], por detaloj. Se la akcelo kaj la rapido de punkto estas paralelaj, tial la propra akcelo estas [8]

$$g(t) := \frac{d}{dt} \left( \frac{dx/dt}{\sqrt{1 - (dx/dt)^2}} \right). \tag{5}$$

La fino  $a$ , kies movado  $x_a(t_a)$  estas elektita en (4a), havas propran akcelon

$$g_a(t_a) = \frac{A \cos t_a}{(1 - A^2 \sin^2 t_a)^{3/2}}; \tag{6}$$

ni vidas, ke la akcelo  $g_a$  estas ĉiam finia.

Por koni la propran akcelon  $g_b$  de  $b$  ni uzas

## 2 Aceleração própria

Aceleração própria de um ponto é aquela medida em um referencial inercial onde o ponto esteja momentaneamente imóvel. Veja [1], [9, pág.22], [2, pág.13], [3, pág.49], [4], [5], para detalhes. Se a aceleração e a velocidade do ponto são paralelas, então a aceleração própria é [8]

A extremidade  $a$ , cujo movimento  $x_a(t_a)$  foi escolhido em (4a), tem aceleração própria

vemos que a aceleração  $g_a$  é sempre finita.

Para termos a aceleração própria  $g_b$  de  $b$  usa-

ankaŭ (5) kaj rememoras, ke  $v_b(t_b) = v_a(t_a)$ . La kalkulo do daŭrigas tiel:

$$g_b(t_b) = \frac{d}{dt_b} \left( \frac{v_a(t_a)}{\sqrt{1 - v_a^2(t_a)}} \right) = \left( \frac{dt_a}{dt_b} \right) \frac{d}{dt_a} \left( \frac{v_a(t_a)}{\sqrt{1 - v_a^2(t_a)}} \right) = \left( \frac{dt_a}{dt_b} \right) g_a(t_a) = \frac{g_a(t_a)}{dt_b/dt_a}. \quad (7)$$

Ĉar  $g_a$  estas ĉiam finia, tial  $g_b$  estas nefinia nur en momentoj  $t_b$  tiaj ke la nomanto  $dt_b/dt_a$  en (7) estas nula. Uzante (4c) ni vidas, ke la respondaj momentoj  $t_a$  obeas

$$AL \cos t_a + (1 - A^2 \sin^2 t_a)^{3/2} = 0. \quad (8)$$

Tio implicas  $\cos t_a < 0$ , tial  $\pi/2 < t_a < 3\pi/2$ .

Ekzemple, la paro  $[A = 0,8; L = 2,0]$  en (8) oferas solvon  $\cos t_a = -0,143$ , ekvivalente  $t_{a1} = 1,7$  kaj  $t_{a2} = 4,6$ ; uzante (4c), tiuj  $t_a$  donas  $t_{b1} = 2,0$  kaj  $t_{b2} = 4,3$ ; kaj uzante (4b) ili donas  $x_{b1} = x_{b2} = 4,2$ . Fakte en figuro 1b ni vidas, ke la eventoj  $[t_{b1}, x_{b1}]$  kaj  $[t_{b2}, x_{b2}]$  markas finojn de duobleco de movadoj de  $b$ , en sistemo  $S_0$ .

### 3 La fizikaj okazoj

Ni volas klare elmontri la parojn  $[A; L]$  fizike eblaj. Por tio, ni komence desegnas grafikaĵojn de  $dt_b/dt_a$  kiel funkcio de  $t_a$  por pluraj paroj de valoroj de  $[A; L]$ , kiel en figuro 2. En tiu figuro ni vidas, ke nur subfiguroj 3, 6 kaj 7 havas  $dt_b/dt_a$  neniam nula, do estas la nuraj fizike eblaj.

Se ni atentis la serion de subfiguroj  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  ni vidas, ke  $dt_b/dt_a$  unue estas nula en subfiguro 2, en  $t_a = \pi$ , kiam ankaŭ  $d^2t_b/dt_a^2 = 0$ . Tiu lasta ekvacio, uzante  $t_b(t_a)$  oferita en (4c), ekvivalentas

$$(3A^2 - 1 - 2A^2 \sin^2 t_a) \sin t_a = 0. \quad (9)$$

Ekvacio (9) helpas koni la fizike eblajn okazojn. Fakte, portante al (8) la solvon  $\sin t_a = 0$  de (9), ni ricevas la hiperbolon

$$L = \frac{1}{A}, \quad (10)$$

desegnita per kontinua linio en la centra grafikaĵo de figuro 2. La paroj  $[A; L]$  sur

mos tiam (5), e relembramos ke  $v_b(t_b) = v_a(t_a)$ . O cálculo então prossegue assim:

Como  $g_a$  é sempre finito,  $g_b$  será infinito somente nos momentos  $t_b$  tais que o denominador  $dt_b/dt_a$  na (7) for nulo. Usando (4c), vemos que os correspondentes momentos  $t_a$  obedecem

Isso implica  $\cos t_a < 0$ , então  $\pi/2 < t_a < 3\pi/2$ .

Por exemplo, o par  $[A = 0,8; L = 2,0]$  na (8) tem solução  $\cos t_a = -0,143$ , equivalentemente  $t_{a1} = 1,7$  e  $t_{a2} = 4,6$ ; usando (4c), esses  $t_a$  dão  $t_{b1} = 2,0$  e  $t_{b2} = 4,3$ ; e usando (4b) eles dão  $x_{b1} = x_{b2} = 4,2$ . De fato, na figura 1b nós vemos que os eventos  $[t_{b1}, x_{b1}]$  e  $[t_{b2}, x_{b2}]$  marcam extremidades de duplicidade de movimentos de  $b$ , no sistema  $S_0$ .

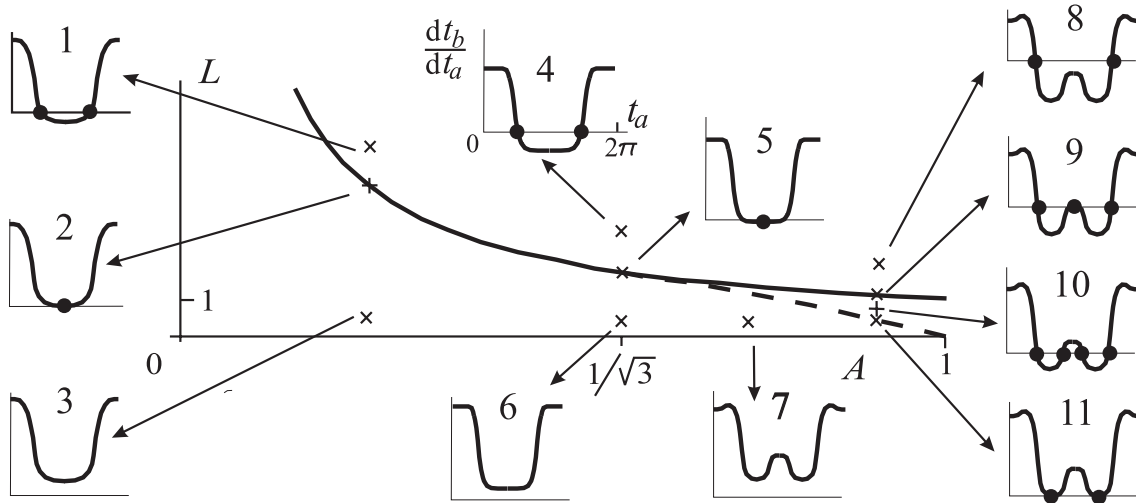
### 3 Os casos físicos

Queremos exhibir com clareza os pares  $[A; L]$  fisicamente possíveis. Para isso, começamos desenhando gráficos de  $dt_b/dt_a$  contra  $t_a$  para numerosos pares de  $[A; L]$ , como na figura 2. Nessa figura, vemos que somente as subfiguras 3, 6 e 7 não têm zeros de  $dt_b/dt_a$ , e portanto são as únicas fisicamente possíveis.

Se atentarmos à sequência de subfiguras  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  vemos que um zero de  $dt_b/dt_a$  primeiro aparece na subfigura 2, em  $t_a = \pi$ , quando também  $d^2t_b/dt_a^2 = 0$ . Esta última equação, usando  $t_b(t_a)$  dado em (4c), equivale a

A equação (9) ajuda conhecermos os casos fisicamente possíveis. De fato, levando à (8) a solução  $\sin t_a = 0$  da (9), recebemos a hipérbole

desenhada em linha contínua no gráfico central da figura 2. Os pares  $[A; L]$  sobre ou acima dessa



Figuro 2: En la centra grafikaĵo estas hiperbolo  $L = 1/A$  per kontinua linio, kaj parabolo  $L = (3\sqrt{3}/2)(1 - A^2)$  se  $A > 1/\sqrt{3}$  per strekita linio. Ĉirkaŭe estas 11 skizoj de la kvalite malsimilaj grafikaĵoj de  $dt_b/dt_a$  kiel funkcio de  $t_a$ , dissemnitaj en ebena  $(A; L)$ . Nigra disketo (●) indikas nefinian propran akcelon ( $dt_b/dt_a = 0$ ). Nur grafikaĵoj 3, 6, kaj 7 estas fizike eblaj.

Figura 2: No gráfico central estão a hipérbole  $L = 1/A$  em traço cheio, e a parábola  $L = (3\sqrt{3}/2)(1 - A^2)$  se  $A > 1/\sqrt{3}$  em traço interrompido. Em volta estão 11 esboços dos gráficos qualitativamente diferentes de  $dt_b/dt_a$  como função de  $t_a$ , distribuídos no plano  $(A; L)$ . Um pequeno disco negro (●) indica aceleração própria infinita ( $dt_b/dt_a = 0$ ). Somente os gráficos 3, 6, e 7 são fisicamente possíveis.

aŭ super tiu hiperbolo donas solvojn fizike neeblajn. Por esplori la parojn sub tiu hiperbolo, ni bezonas konsideri la alian solvon de (9).

Tiu alia solvo estas  $2A^2 \sin^2 t_a = 3A^2 - 1$ . Ĝi gravas se nur  $A > 1/\sqrt{3}$ , celante ke  $\sin t_a$  estu reela. Uzante tiun solvon en (8), ni ricevas la arkon de parabolo

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{2}(1 - A^2), \quad 1/\sqrt{3} < A < 1, \quad (11)$$

montrata per la strekita linio en la centra grafikaĵo en figuro 2.

**Resume**, la paroj  $[A; L]$  fizike eblaj havas  $L < 1/A$  se  $A < 1/\sqrt{3}$ , kaj havas  $L < (3\sqrt{3}/2)(1 - A^2)$  se  $1/\sqrt{3} < A < 1$ .

Ni konfirmas tiun konkludon atentante la serion  $7 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 8$ ; tie ni vidas, ke  $dt_b/dt_a$  ne nuliĝas en subfiguro 7, kaj unue nuliĝas en subfiguro 11, kie ankaŭ  $d^2t_b/dt_a^2 = 0$  – vidu la du nigrajn disketojn en tiu subfiguro. Se ni pligrandigas  $L$ , ĉiu disketo tuj fariĝas du, kiel en subfiguro 10. Pli-

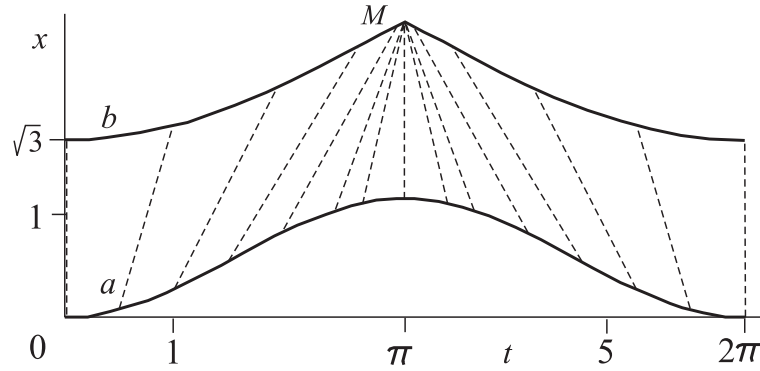
hipérbole dāo soluiçōes fisicamente impossíveis. Para explorar os pares abaixo desse hipérbole, precisamos considerar a outra soluiçō da (9).

Essa outra soluiçō é  $2A^2 \sin^2 t_a = 3A^2 - 1$ . Ela importa somente se  $A > 1/\sqrt{3}$ , para que  $\sin t_a$  seja real. Usando essa soluiçō na (8), recebemos o arco de parábola

mostrada pela linha tracejada no gráfico central da figura 2.

**Em resumo**, os pares  $[A; L]$  fisicamente possíveis têm  $L < 1/A$  se  $A < 1/\sqrt{3}$ , e têm  $L < (3\sqrt{3}/2)(1 - A^2)$  se  $1/\sqrt{3} < A < 1$ .

Confirmamos essa conclusō na sequēncia  $7 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 8$ ; ali nós vemos que  $dt_b/dt_a$  não tem zero na subfigura 7, e começa a ter zero na subfigura 11, onde também  $d^2t_b/dt_a^2 = 0$  – veja os dois pequenos discos negros naquela subfigura. Se aumentarmos  $L$ , cada disco logo se desdobra em dois, como na



Figuro 3: Movadoj de  $b$  kaj  $a$  se  $A = 1/\sqrt{3}$  kaj  $L = \sqrt{3}$ . La strekitaj linioj kunigas arojn de samtempaj eventoj en la sinsekvaj inerciaj sistemoj de referenco kie la punktoj de la rigida stango momente restas. Ni atentis amason de apartaj eventoj ĉe  $a$  kiuj estas preskaŭ samtempaj al evento  $M = [\pi, 2A + L]$  de  $b$ , en tiuj sistemoj.

Figura 3: Movimentos de  $b$  e  $a$  se  $A = 1/\sqrt{3}$  e  $L = \sqrt{3}$ . As linhas tracejadas conectam conjuntos de eventos simultâneos nos sucessivos sistemas inerciais de referência em que os pontos da barra rígida estejam em repouso momentâneo. Notamos um acúmulo de eventos de  $a$ , finitamente separados, que são quase simultâneos ao evento  $M = [\pi, 2A + L]$  de  $b$ , naqueles sistemas.

grandigante  $L$ , la du internaj disketoj proksimiĝas kaj fine unuiĝas kiel en subfiguro 9, kie denove  $d^2t_b/dt_a^2 = 0$  en  $t_a = \pi$ . Fine, se  $L$  estas malmulte pligranda, tiu centra disketo malaperas, kiel en subfiguro 8.

Ankaŭ la serio  $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$  estas interesa. Ĝi okazas en vertikalo  $A = 1/\sqrt{3}$ , kaj havas  $d^3t_b/dt_a^3$  nulan kiam  $t_a = \pi$ . Do ĉiuj kurboj  $dt_b/dt_a$  kun  $A = 1/\sqrt{3}$  havas nulan kurbecon en  $t_a = \pi$ , kiel ni vidas en figuro 2.

## 4 Komentoj

Kelkaj klarigoj indas emfazon: la egaleco  $v_b(t_b) = v_a(t_a)$  ne signifas, ke la rapidoj de  $a$  kaj  $b$  estas egalaj en sama momento de inercia sistemo  $S_0$ . Fakte, la egaleco  $v_b(t) = v_a(t)$  okazas nur kiam  $t_b = t_a$ . Atentante (4c), tio implicas  $t_a = 0, \pi, 2\pi, \dots$  Nur en tiuj momentoj, la rigida stango estas senmova en  $S_0$ , elmontrante sian propralongo  $L$ .

Subfiguro 5 de figuro 2 evidentiĝas, ke la okazo  $A = 1/\sqrt{3}$  kaj  $L = \sqrt{3}$  estas speciala. La plateco de kurbo  $dt_b/dt_a$  en akso  $t_a$  signi-

subfigura 10. Aumentando mais  $L$ , os dois discos interiores se aproximam e finalmente se fundem como na subfigura 9, onde novamente  $d^2t_b/dt_a^2 = 0$  em  $t_a = \pi$ . Por fim, se  $L$  for um pouco maior, esse disco central desaparece, como na subfigura 8.

Também a sequência  $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$  é interessante. Ela ocorre na vertical  $A = 1/\sqrt{3}$ , e tem nula a derivada  $d^3t_b/dt_a^3$  quando  $t_a = \pi$ . Então todas as curvas  $dt_b/dt_a$  com  $A = 1/\sqrt{3}$  têm curvatura nula em  $t_a = \pi$ , como vemos na figura 2.

## 4 Comentários

Alguns esclarecimentos merecem ênfase: a igualdade  $v_b(t_b) = v_a(t_a)$  não significa que as velocidades de  $a$  e  $b$  sejam iguais em um mesmo momento do sistema inercial  $S_0$ . De fato, a igualdade  $v_b(t) = v_a(t)$  ocorre somente quando  $t_b = t_a$ . Atentando à (4c), isso implica  $t_a = 0, \pi, 2\pi, \dots$  Somente nesses momentos, a barra rígida está imóvel em  $S_0$ , exibindo seu comprimento próprio  $L$ .

A subfigura 5 da figura 2 evidencia que o caso  $A = 1/\sqrt{3}$  e  $L = \sqrt{3}$  é especial. O achatamento da curva  $dt_b/dt_a$  sobre o eixo  $t_a$  significa

fas amason de nulaj valoroj de  $dt_b/dt_a$  ĉirkaŭ  $t_a = \pi$ . Fakte, figuro 3 montras, ke tiuokaze multaj apartaj eventoj de fino  $a$  estas preskaŭ samtempaj al evento  $M := [\pi; 2A + L]$  ĉe  $b$ , en la sinsekvaj inerciaj sistemoj de referenco kie ambaŭ  $a$  kaj  $b$  restas.

Fine indas menci, ke la unu sola punkto kun harmonia movado en la rigida stango povus esti interna, anstataŭ fina. Tiu ĉi artikolo estus facile adaptita por priskribi tiun pli ĝeneralan okazon.

um acúmulo de zeros de  $dt_b/dt_a$  perto de  $t_a = \pi$ . De fato, a figura 3 mostra que neste caso muitos eventos finitamente separados da extremidade  $a$  são quase simultâneos ao evento  $M := [\pi; 2A+L]$  de  $b$ , nos sucessivos referenciais inerciais em que ambos  $a$  e  $b$  estejam parados.

Finalmente, convém mencionar que o único ponto com movimento harmônico na barra rígida poderia ser interior, em vez de extremidade. Este artigo seria facilmente adaptado para descrever esse caso mais geral.

## Citaĵoj

## Referências

- [1] M. Born, *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips*, Annalen der Physik **335** (11) 1-56 (1909); [http://wikisource.org/wiki/The Theory of the Rigid Electron in the Kinematics of the Principle of Relativity](http://wikisource.org/wiki/The_Theory_of_the_Rigid_Electron_in_the_Kinematics_of_the_Principle_of_Relativity) .
- [2] C. Møller, *The theory of relativity, 2nd ed.*, Oxford U.P. (1972).
- [3] W. Rindler, *Essential relativity, 2nd ed.*, Springer-Verlag (1977).
- [4] C. Giannoni, Ø. Grøn, *Rigidly connected accelerated clocks*, Am. J. Phys. **47** (1979) 431-435.
- [5] H. Nikolić, *Relativistic contraction of an accelerated rod*, arXiv:physics/9810017v3 .
- [6] J. Franklin, *Lorentz contraction, Bell's spaceships, and rigid body motion in special relativity*, arXiv:0906.1919; *Rigid body motion in special relativity*, arXiv:1105.3899 .
- [7] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *The relativistic time – II*, arXiv:1107.1399 .
- [8] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *The relativistic time – I*, arXiv:physics/0603053; bonvole korektu ekv.(5) al  $\tan^2(\alpha/2) = \sqrt{(c+v)/(c-v)}$  .
- [9] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The classical theory of fields, 4th revised English edition*, Butterworth-Heinemann (1996).
- [10] Por ricevi (2) kaj (3), substituu  $x_a \rightarrow \omega x_a/c$ ,  $x_b \rightarrow \omega x_b/c$ ,  $A \rightarrow \omega A/c$ ,  $L \rightarrow \omega L/c$ ,  $t_a \rightarrow \omega t_a$ ,  $t_b \rightarrow \omega t_b$  .



NOTAS DE FÍSICA é uma pré-publicação de trabalho original em Física.  
Pedido de cópias desta publicação deve ser enviado aos autores ou ao:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Área de Publicações  
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4<sup>o</sup> andar  
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ  
Brasil  
E-mail: [socorro@cbpf.br](mailto:socorro@cbpf.br)/[valeria@cbpf.br](mailto:valeria@cbpf.br)  
[http://www.biblioteca.cbpf.br/index\\_2.html](http://www.biblioteca.cbpf.br/index_2.html)

NOTAS DE FÍSICA is a preprint of original unpublished works in Physics.  
Request for copies of this report should be addressed to:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Área de Publicações  
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4<sup>o</sup> andar  
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ  
Brazil  
E-mail: [socorro@cbpf.br](mailto:socorro@cbpf.br)/[valeria@cbpf.br](mailto:valeria@cbpf.br)  
[http://www.biblioteca.cbpf.br/index\\_2.html](http://www.biblioteca.cbpf.br/index_2.html)