

LE BRUIT NEUTRONIQUE DES REACTEURS NUCLEAIRES (1961).

Sommaire. - La puissance d'un réacteur nucléaire, dans les conditions du régime, est affectée de fluctuations dont les causes sont très diverses.

Ce comportement aléatoire rentre dans le cadre général de l'étude des "bruits".

Entre autres sources de bruit, nous analysons ici les fluctuations dues :

- a) à l'émission discontinue des neutrons provenant d'une source autonome ;
- b) à la multiplication des neutrons au sein du réacteur.

La méthode que nous introduisons exploite les analogies entre les lois qui régissent un réacteur nucléaire au régime et certains systèmes radioélectriques, en particulier les circuits à boucle de réaction.

Le réacteur est caractérisé par sa "bande passante" et est décrit comme un système soumis à une succession d'impulsions aléatoires.

.../...

NEUTRON NOISE IN NUCLEAR REACTORS (1961).

Summary. - The power of a nuclear reactor, in the operating conditions, presents fluctuations due to various causes. This random behaviour can be included in the study of "noises".

Among other sources of noise, we analyse hereafter the fluctuations due :

- a) to the discontinuous emissions of neutrons from an independent source ;
- b) to the multiplication of neutrons inside the reactor.

The method which we present makes use of the analogies between the rules governing a nuclear reactor in operation and a number of radioelectrical systems, in particular the feed-back loops.

The reactor can be characterized by its "passing band" and is described as a system submitted to a sequence of random pulses.

..../....

Dans les conditions de fonctionnement non linéaires, l'effet du bruit neutronique est précisé en utilisant une fonctionnelle non linéaire, ce qui relie cette théorie à différents travaux antérieurs dont la bibliographie est indiquée à la fin de cet article. Ceci nous conduit notamment à retrouver à propos des réacteurs certains résultats énoncés précédemment par A. Blaquière à propos des systèmes radioélectriques bouclés.

In non linear operating conditions, the effect of neutron noise is defined by means of a non-linear functional, this theory is thus related to previous works the references of which are given at the end of the present report. This leads us in particular in the case of nuclear reactors to some results given by A. Blaquière in the case of radioelectrical loops.

PREMIER MINISTRE
COMMISSARIAT A
L'ÉNERGIE ATOMIQUE

MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES ET TECHNIQUES NUCLÉAIRES

**LE BRUIT NEUTRONIQUE
DES RÉACTEURS NUCLÉAIRES**

PAR

A. BLAQUIERE

Professeur à l'Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires

et

R. PACHOWSKA

Ingénieur de l'Université Technique de Varsovie

RAPPORT CEA N° 1855

1961

CENTRE D'ETUDES
NUCLÉAIRES DE SACLAY

LE BRUIT NEUTRONIQUE

DES

RÉACTEURS NUCLÉAIRES

par Austin BLAQUIÈRE

Professeur à l'Institut National des Sciences et Techniques nucléaires

et Róża PACHOWSKA

Ingénieur de l'Université Technique de Varsovie

La puissance d'un réacteur nucléaire, dans les conditions du régime, est affectée de fluctuations dont les causes sont très diverses. Ce comportement aléatoire entre dans le cadre général de l'étude des « bruits ».

Entre autres sources de bruit, nous analyserons ici les fluctuations dues :

a) à l'émission discontinue des neutrons provenant d'une source autonome ;

b) à la multiplication des neutrons au sein du réacteur.

Ces phénomènes aléatoires ont été étudiés par différents auteurs, notamment E.D. COURANT et P.R. WALLACE [1], E. COHN [2], E. F. BENNETT (3), V. RAJEVSKI [4] [5].

La méthode que nous introduirons ici exploite les analogies entre les lois qui régissent un réacteur nucléaire au régime et certains systèmes radioélectriques, en particulier les circuits à boucle de réaction.

Nous rappellerons d'abord brièvement quelques notions couramment utilisées par les radioélectriciens en analyse des bruits, concernant l'effet de la largeur de bande du système excité sur leur transmission ; et nous montrerons comment ces notions s'appliquent au cas des réacteurs, conduisant à une méthode d'étude simple de ces derniers et à des résultats dont la signification physique est bien claire.

Le réacteur sera caractérisé par sa « bande passante » et sera décrit comme un système soumis à une succession d'impulsions aléatoires.

Dans les conditions de fonctionnement non linéaires, l'effet du bruit neutronique sera précisé en utilisant une fonctionnelle non linéaire, ce qui relie cette théorie à différents travaux antérieurs [6] dont la bibliographie est indiquée à la fin de cet article.

Ceci nous conduira notamment à retrouver à propos des réacteurs certains résultats énoncés précédemment par A. BLAQUIÈRE à propos des systèmes radioélectriques bouclés.

Néanmoins, cet exposé s'appuie sur des hypothèses très simplificatrices puisque nous considérons le réacteur comme un bloc multiplicateur homogène, appelé « réacteur point ». Elles ont été adoptées par de nombreux auteurs car elles conduisent à un formalisme simple et à des résultats pratiques permettant de guider l'expérimentation.

V. RAJEVSKI a introduit et développé une théorie très complète faisant intervenir la structure en cellules du réacteur [5].

De notre côté, nous envisageons une extension de notre méthode à ce cas plus réaliste.

Il nous semble utile enfin d'insister sur l'intérêt de l'analyse des bruits des réacteurs nucléaires, car un bruit est une « source d'information » extrêmement riche. A condition de savoir la dépouiller, elle doit apporter de nombreux renseignements sur les paramètres neutroniques, et sur le comportement interne du réacteur, en particulier sur les instabilités possibles et sur leurs causes.

IMPULSIONS, BRUIT, RAPPEL DES MÉTHODES D'ÉTUDES

Fonction impulsive élémentaire. Exemple radioélectrique. Exemple neutronique.

La fonction impulsive $\delta(t)$ (dans toute la suite la variable t sera le temps), introduite par DIRAC, est particulièrement utile dans l'étude de certains phénomènes physiques de très brève durée.

Les propriétés qui servent à la définir sont les suivantes :

1° La fonction est nulle pour toute valeur de t extérieure à un intervalle Δt arbitrairement court entourant l'origine des temps ;

2° L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt$ a une valeur finie, posée égale à 1 par convention (normalisation). Il s'ensuit que $\delta(t)$, nul pour toute valeur de t différente de zéro, est infini pour $t = 0$.

En physique, l'intervalle Δt n'est jamais nul' aussi est-il le plus souvent légitime de représenter l'impulsion réelle normalisée par une « dent » rectangulaire de surface unité, de très faible largeur Δt , et par conséquent de très grande hauteur $1/\Delta t$.

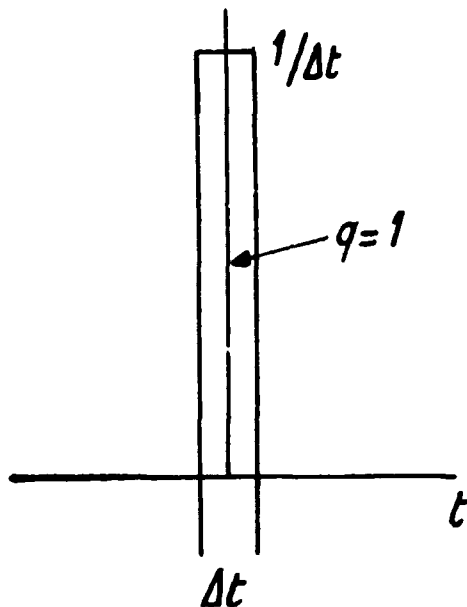


FIG. 1.

La fonction $\delta(t)$ apparaît alors comme une limite mathématique idéale mais commode de l'impulsion réelle, obtenue en faisant tendre Δt vers zéro.

Lorsque l'impulsion n'est pas normalisée la surface q de la « dent » est appelée « échelon de l'impulsion ». Une impulsion normalisée a donc un échelon unité.

Empruntons un premier exemple à la Mécanique en considérant une force $F(t)$ appliquée à un point matériel de masse m pendant un temps très court. Par suite de l'inertie du point matériel, ce « choc » n'aura un effet sensible que si la force mise en jeu, nulle en dehors du laps de temps où elle agit, est extrêmement grande lors de son action.

Elle devra d'ailleurs être d'autant plus grande que la durée de son action sera plus brève, car on a

constaté que l'effet ne dépend en pratique que de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt$$

ce qui confère un sens physique à l'échelon, appelé dans ce cas *percussion*. La percussion mesure en fait la variation de la quantité de mouvement mv du point matériel.

De même, en radioélectricité, il est fréquent que l'on ait à considérer l'effet d'une différence de potentiel, appliquée entre les bornes d'un réseau conducteur pendant un temps très court.

Dans le cas particulièrement simple où le circuit est formé par l'association d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C , la relation entre la tension v aux bornes du condensateur et la tension V appliquée aux bornes de la coupure AB (fig. 2) est :

$$V = RC \frac{dv}{dt} + v$$

Si $V(t)$ est une impulsion, son effet presque instantané s'obtiendra en intégrant les deux membres, après multiplication par dt , sur la durée très courte τ de l'impulsion. Il vient :

$$\int_{\tau} V dt = RC \int_{\tau} \frac{dv}{dt} dt + \int_{\tau} v dt$$

Les deux termes du second membre ont des ordres de grandeur très différents, ce qui autorise à négliger le second.

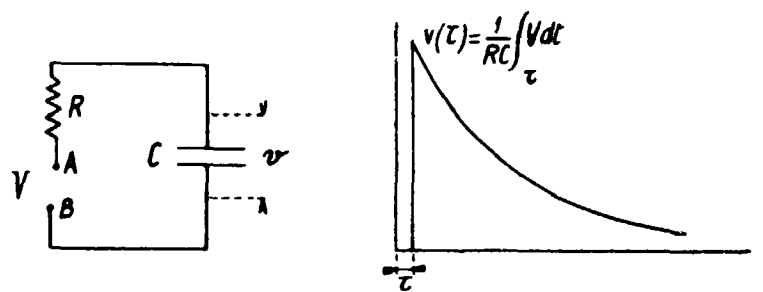


FIG. 2.

D'autre part, si l'on admet, comme condition initiale, que le condensateur ne porte aucune charge au temps $t = 0$, c'est-à-dire que l'on a $v(0) = 0$, on en déduit la tension $v(\tau)$ au temps τ :

$$v(\tau) = \frac{1}{RC} \int_{\tau} V dt$$

Après quoi la tension $v(t)$ décroît exponentiellement suivant la loi

$$v(t) = v(\tau) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Nous voyons que, dans ce cas, l'échelon de la tension impulsive $V(t)$ a encore une signification bien claire : c'est lui qui définit le « saut » de tension initial aux bornes du condensateur (fig. 2).

Un autre exemple sera tiré de la neutronique. Considérons une source permanente de neutrons qui émet en moyenne \bar{S} neutrons par unité de temps (\bar{S} sera supposé très grand). \bar{S} a une valeur constante mais, par suite de la discontinuité du phénomène d'émission, le nombre de neutrons émis réellement pendant un intervalle très court dt est une grandeur aléatoire.

Une analyse fine du phénomène nécessite l'introduction de la valeur $S(t)dt$: nombre de neutrons émis réellement pendant l'intervalle dt , de moyenne $\bar{S}dt$.

$\bar{S}dt$ peut être considéré comme la probabilité d'émission de 1 neutron pendant le laps de temps dt . Donc, si nous adoptons pour intervalle élémentaire.

$$\tau = \frac{1}{2\bar{S}}$$

la probabilité pour que nous observions l'émission de 1 neutron au cours de cet intervalle est $\bar{S}\tau = 1/2$, et la probabilité pour que nous n'observions aucune émission est également $1/2$.

La loi d'émission est alors représentable par la suite d'impulsions de la figure 3.

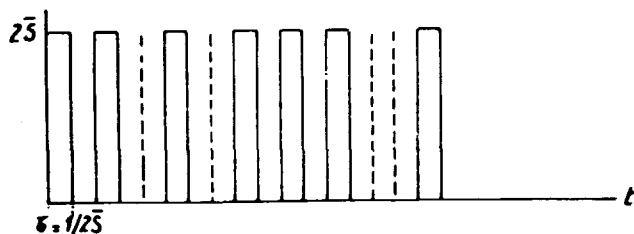


FIG. 3.

Chaque fonction impulsive a une probabilité d'existence $1/2$, et son échelon est :

$$\left[\frac{S(t)dt}{dt = \tau} \right] = 2\bar{S} \cdot \frac{1}{2\bar{S}} = 1 \text{ neutron}$$

Ici, l'échelon d'une impulsion représente le nombre de neutrons émis au cours d'un intervalle élémentaire τ très petit.

Sources d'impulsions aléatoires, bruits. Effet de la largeur de bande du système excité.

Lorsque de très nombreuses impulsions se succèdent de façon désordonnée, on dit qu'elles constituent un bruit. Ainsi, une source de neutrons, dont l'émission est aléatoire, peut être considérée comme une source de bruit. La différence de potentiel qui prend naissance aux bornes d'une résistance électrique, par suite de l'agitation thermique permanente des électrons de conduction, est également une source de bruit.

L'effet d'une source de bruit sur un système, radio-électrique, neutronique, mécanique, etc..., peut être analysé en se plaçant principalement de deux points de vue, d'ailleurs complémentaires :

a) une première méthode consistera à déterminer la « réponse » du système sous l'effet d'une impulsion isolée, et à effectuer ensuite une sommation sur l'ensemble des impulsions émises par la source.

Dans cette voie, les théorèmes de CAMPBELL notamment seront d'une grande utilité.

b) une deuxième méthode conduira à analyser le bruit en fréquences, c'est-à-dire à définir, à l'entrée du système, le spectre de fréquences du bruit de la source.

Le système sera alors considéré comme un « instrument » d'optique classique qui transforme le spectre d'entrée en un spectre de sortie que l'on déterminera.

Un effet particulièrement important sera la réduction de bande apportée par le système au bruit d'entrée. Il provient du fait que tout système physique est caractérisé par une bande passante, bande de fréquences en dehors de laquelle il se refuse à transmettre un signal. Un exemple type est fourni par les courbes de réponse d'un système oscillant pendulaire, selon qu'il est très faiblement amorti, ou, au contraire, très amorti.

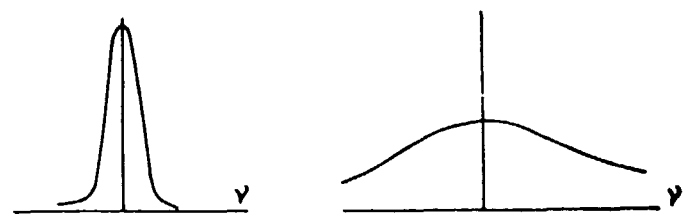


FIG. 4.

Un fait d'observation courante qui montre bien, dans le domaine mécanique, l'influence de la bande passante sur la transmission des bruits est la comparaison avec les sons que rendent les corps matériels plus ou moins amortis sous l'effet de chocs. Nous supposons que les chocs sont très nombreux et aléatoirement distribués.

Les exemples abondent : gouttes de pluie sur le sol, grenaille de plomb tombant sur une plaque, clochettes d'un troupeau. applaudissements dans une salle de spectacle...

Une courbe de résonance très aplatie, caractéristique d'un système très amorti, tel les mains des spectateurs, le sol... laisse passer une large bande d'harmoniques et donne un bruit mat, dans lequel on peut reconnaître les fines irrégularités des chocs composants. Au contraire, une courbe de résonance très aiguë, celle des clochettes d'un troupeau par exemple, donne un son argentin, dans lequel il est beaucoup plus difficile d'identifier les chocs élémentaires.

Une analogie optique s'impose aussi d'ailleurs à cette occasion : elle a trait à l'observation des détails fins au moyen d'un microscope très puissant. On sait que la transmission de ces détails est limitée par les phénomènes de diffraction. Plus les diaphragmes de l'instrument sont petits, plus les taches de diffraction sont étalées et masquent les détails fins de l'objet. La surface observée présente au contraire d'autant plus de détails que les diaphragmes sont plus ouverts (toute autre aberration mise à part) et que, par suite, les taches de diffraction sont moins étalées.

Spectre d'une impulsion. Limitation physique de la bande.

Les impulsions naturelles produites par la source de bruit n'ont, bien entendu, aucun caractère sinusoïdal. Il est possible cependant d'introduire une périodicité fictive en imaginant qu'une impulsion donnée se reproduira au bout de temps T , $2T$, $3T$..., très longs.

Toutes les fois que cette impulsion, à répétition périodique, agira sur un système, son action sera la même que celle de l'impulsion unique donnée, à la condition que T soit assez grand pour que le système n'ait pas gardé la mémoire du choc antérieur.

On a ainsi le droit d'assimiler l'action d'une impulsion naturelle unique à celle d'une impulsion de la suite de période T , et il est alors possible de trouver des développements de Fourier introduisant des

composantes sinusoïdales réparties sur toute la gamme des fréquences.

Nous donnons ci-dessous, sans justification puisqu'il est classique, un tel développement pour la fonction impulsive $G(t - t_j)$ au temps t_j , d'échelon q , avec un intervalle de répétition $0, T$:

$$(1) \quad G(t - t_j) = \frac{q}{T} + \frac{2q}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n(t - t_j)}{T}$$

Les harmoniques successifs de ce développement ont des fréquences qui diffèrent les unes des autres de la quantité constante $\Delta\nu = 1/T$ (pour l'intervalle $0, T$ choisi).

Désignons par ν_n la fréquence du n^e harmonique, nous pourrons écrire :

$$(2) \quad G(t - t_j) = q\Delta\nu + 2q\Delta\nu \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi\nu_n(t - t_j)$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T} \quad \Delta\nu = \frac{1}{T}$$

Si l'on autorise les fréquences négatives, on voit facilement que cette expression se réduit à la forme plus simple, où le terme constant ne se distingue plus des autres :

$$(3) \quad G(t - t_j) = q\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\nu_n(t - t_j)$$

Nous mentionnerons enfin une dernière forme commode sous laquelle peut être mis ce développement, si l'on remarque que l'on a :

$$(4) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \sin 2\pi\nu_n(t - t_j) = 0$$

(les termes de fréquences opposées s'annulant deux à deux).

On joindra à la série (3) une deuxième série de ce type, ce qui donne :

$$(5) \quad G(t - t_j) = q\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\nu_n(t - t_j) + q\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} i \sin 2\pi\nu_n(t - t_j) = q\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty}$$

Si l'on fait tendre T vers l'infini, on voit que les différences finies $\Delta\nu$ deviennent des différentielles $d\nu$. Les sommations doivent alors être remplacées par des intégrations et l'on passe naturellement d'une suite discrète de fonctions trigonométriques à une suite continue.

Précisons ce passage à la limite.

Reprenar' par exemple la série trigonométrique :

$$(6) \quad G(t - t_j) = q\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\nu_n(t - t_j)$$

avec :

$$\nu_n = \frac{n}{T} \quad \Delta\nu = \frac{1}{T}$$

nous voyons que le spectre, obtenu en portant en abscisse la fréquence de chaque harmonique et en ordonnée l'amplitude correspondante, est formé d'une succession de raies de même longueur $q\Delta\nu$ distante de $\Delta\nu$.

Si l'intervalle de répétition T tend vers l'infini, $\Delta\nu$ et $q\Delta\nu$ tendent vers zéro. Le spectre vient se confondre avec l'axe des abscisses, mais si nous portons en ordonnée q au lieu de $q\Delta\nu$, les raies gardent une longueur constante et le spectre de raies se transforme, à la limite, en un spectre continu.

Le spectre d'amplitude d'une impulsion, ainsi défini, a donc la forme très simple représentée par la figure 5, c'est une bande indéfinie de hauteur q .

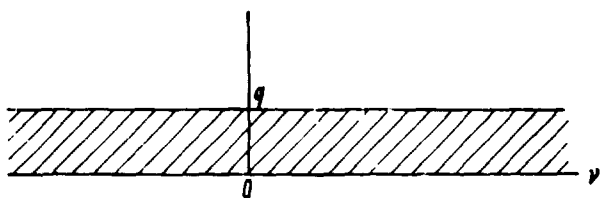


FIG. 5.

Supposons que l'impulsion traverse un filtre mathématique :

Nous supposons que la bande des fréquences comprise entre deux valeurs limites ν_1 et ν_2 ne subit aucune modification d'amplitude et de phase, tandis que les autres fréquences sont arrêtées.

Le spectre de l'impulsion transmise est donc réduit à la bande rectangulaire représentée sur la figure 6. L'impulsion transmise est une nouvelle fonction du temps dont l'allure est bien connue : sinusoïde à amplitude modulée, ayant pour fréquence

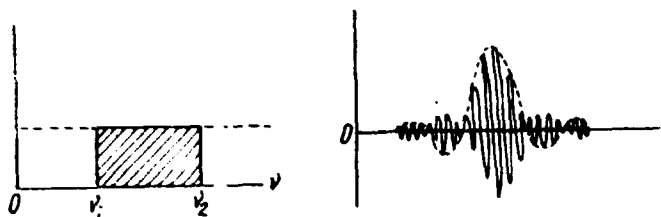


FIG. 6.

la fréquence centrale du filtre, et pour enveloppe la courbe en cloche représentée en pointillé sur la figure 6.

Une impulsion, ainsi déduite du choc initial par simple découpage de sa bande spectrale, est appelée « impulsion réduite ». L'influence d'un filtre réel sera généralement plus compliquée : il modifiera à la fois l'amplitude et la phase des diverses composantes spectrales admises à l'entrée.

Tenant compte de ce que les harmoniques de l'impulsion initiale situés nettement en dehors de la bande passante du système de transmission ne jouent aucun rôle, on voit que l'on pourra toujours déterminer la « réponse » en remplaçant cette impulsion initiale par une « impulsion réduite ».

La largeur du spectre de l'impulsion réduite d'entrée devra être évidemment du même ordre que la largeur de bande du système sélectif considéré.

Cette remarque est d'une extrême importance car elle met en lumière le fait que le bruit d'entrée théorique, succession d'impulsions infiniment brèves, n'est jamais observable. Le système « voit » un bruit dont le caractère pseudo-sinusoïdal est d'autant plus accusé que sa largeur de bande est plus faible.

Par exemple, dans le cas d'une source de neutrons, ceci nous autorisera, après étude de la « largeur de bande du réacteur », à remplacer la courbe d'émission théorique de la figure 3 par une courbe ne présentant plus de telles discontinuités. L'addition d'impulsions filtrées, dont le type est indiqué sur la figure 6 nous conduira à une courbe d'émission telle que celle de la figure 7.

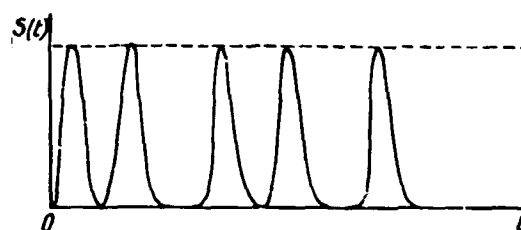


FIG. 7.

La méthode trouve sa justification rigoureuse dans la théorie des distributions de L. SCHWARTZ, et l'introduction des fonctions

$$\delta(t) \quad \delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

etc...

dont les développements de Fourier sont conver-

gents au sens des distributions. Ces développements sont :

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

$$\delta'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega e^{i\omega t} d\omega$$

Influence de la largeur de bande sur la transmission d'une impulsion et de sa dérivée.

Les spectres de l'impulsion $\delta(t)$ et de sa dérivée $\delta'(t)$ sont représentés sur la figure 8.

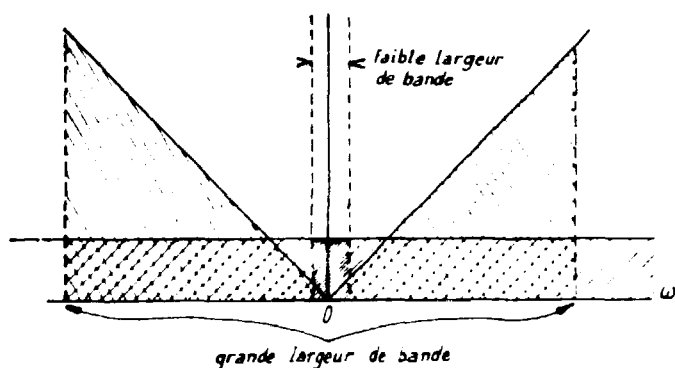


FIG. 8.

Ils mettent en lumière un fait important. Si le système excité a une très faible largeur de bande et découpe au voisinage de l'origine une plage de fréquences d'étendue très réduite, l'effet de l'impulsion $\delta(t)$ sera prépondérant devant celui de la dérivée $\delta'(t)$. Au contraire, si le système est très peu sélectif et consent à « passer » une très large bande incluant l'origine, l'effet de l'impulsion dérivée $\delta'(t)$ est beaucoup plus important que celui de l'impulsion $\delta(t)$, par suite du facteur ω dont le rôle est important aux hautes fréquences.

Les systèmes que nous étudierons dans la suite seront le siège de fluctuations de deux types :

— d'une part des « fluctuations lentes » dont le spectre de fréquences a une faible étendue autour de l'origine, en vertu du principe d'incertitude radioélectrique qui associe à toute étendue spectrale $\Delta\omega$ une constante de temps Δt telle que l'on ait

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 1$$

— d'autre part des « fluctuations rapides » à large bande spectrale.

La figure 9 rend compte de ces deux effets.

Dans la source de bruit interviendront des impulsions aléatoires et leurs dérivées par rapport au temps.

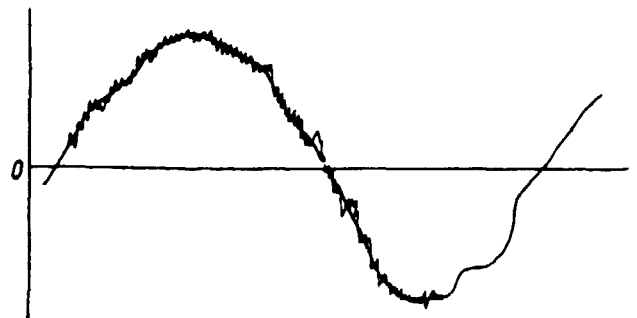


FIG. 9.

Une méthode commode consistera à traiter séparément les deux phénomènes, en considérant que les impulsions dérivées ont un effet négligeable sur les fluctuations lentes, et, au contraire, un effet prépondérant en ce qui concerne les fluctuations rapides à large bande.

Les conclusions tirées de l'examen des spectres des fonctions $\delta(t)$ et $\delta'(t)$ (fig. 8) peuvent être obtenues d'une autre façon.

Supposons d'abord que le système soumis à l'excitation aléatoire ait une très faible largeur de bande. Prenons pour exemple un circuit à résistance et capacité tel que celui de la figure 2 avec une très grande valeur du produit RC. De tels circuits sont utilisés à la sortie des chambres d'ionisation des réacteurs nucléaires et il sera intéressant, plus loin, d'étudier de quelle façon la réponse dépend de la constante RC.

Ce circuit, à grand temps de réponse, va transformer chacune des impulsions qu'il reçoit en une exponentielle amortie de grande constante de temps RC.

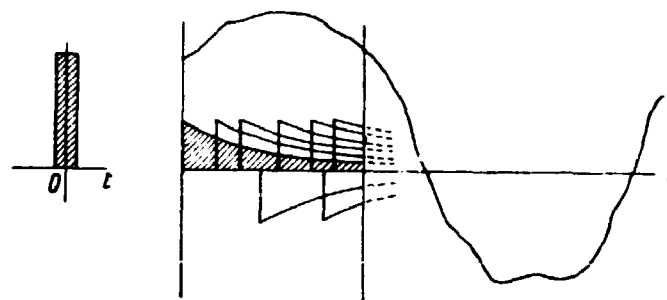


FIG. 10.

Si les impulsions se succèdent à une cadence très rapide, le circuit, à chaque instant, fera la somme de toutes les impulsions dont il a gardé la mémoire,

c'est-à-dire qu'il les intégrera sur une durée de l'ordre de RC.

Cela entraîne deux conséquences.

a) D'une part, l'amplitude résultante est d'autant plus grande que RC est plus grand, c'est-à-dire que la largeur de bande du circuit est plus faible.

b) D'autre part, l'évolution de la « réponse » aléatoire est d'autant plus lente que RC est plus grand.

En résumé, le circuit « voit » un bruit de grande amplitude, et à évolution lente, ce qui autorise, dans les calculs, à négliger les dérivées du bruit, c'est-à-dire les dérivées des δ individuels, devant le bruit lui-même, c'est-à-dire devant les δ .

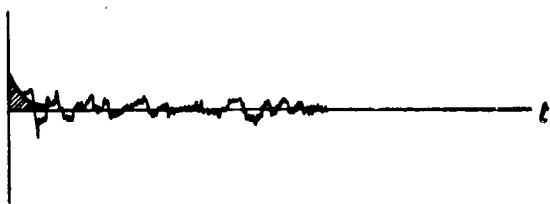


FIG. 11.

Au contraire, si le système a une très grande largeur de bande, et par conséquent un temps de réponse très court, le nombre des impulsions intégrées sur RC est d'autant plus petit, ce qui conduit à un bruit de faible amplitude et à évolution rapide.

On voit alors pourquoi la dérivée du bruit devient prépondérante devant le bruit lui-même, et il est légitime de négliger les δ devant les δ' .

Excitation en impulsions d'un circuit radioélectrique simple.

A titre d'exemple, nous étudierons l'effet d'une impulsion sur un circuit radioélectrique très simple formé par l'association en série d'une résistance r , d'une bobine d'auto-induction de self L , et d'un condensateur de capacité C .

La source de bruit étant la résistance r , nous déterminerons le comportement du système sous l'effet d'une impulsion isolée d'échelon q , produite par cette résistance. Ce problème est très classique, nous en tirerons néanmoins des remarques générales qui nous seront utiles dans l'étude des réacteurs nucléaires.

La tension v entre les bornes A et B du condensateur est liée à la tension impulsive $E(t)$ (d'échelon q) par :

$$E = LC \frac{d^2v}{dt^2} + rC \frac{dv}{dt} + v$$

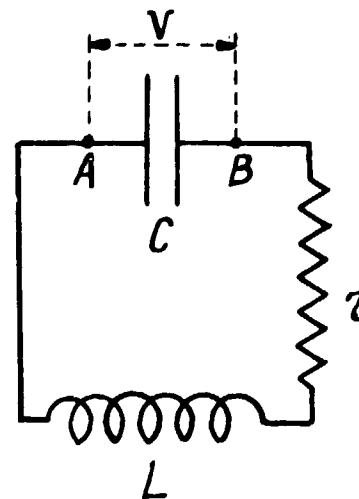


FIG. 12.

Suivant la méthode habituelle, nous multiplierons les deux membres par dt , et nous intégrerons sur la durée τ de l'impulsion.

Le premier terme du second membre est prépondérant, on en tire la valeur de la vitesse d'évolution $(dv/dt)\tau$ juste après le choc, le système étant supposé initialement au repos. Il vient :

$$q = \int_{\tau} E dt = LC \int_{\tau} \frac{d^2v}{dt^2} dt = LC \left(\frac{dv}{dt} \right)_{\tau}$$

Après quoi le système évolue librement suivant une loi de la forme

$$v(t) = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t}$$

où A et B sont 2 constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales

$$v(0) = 0$$

$$(dv/dt)_0 = q/LC$$

(conditions admissibles car τ est très petit, $\tau \simeq 0$) m_1 et m_2 sont d'autre part les solutions de l'équation résolvante

$$LC m^2 + rCm + 1 = 0$$

$$m_1 = -\frac{r}{2L} + \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$m_2 = -\frac{r}{2L} - \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

On voit clairement que l'évolution du système pourra présenter deux aspects très différents selon que la résistance r sera très petite ou, au contraire, très grande.

a) Si la résistance r est très petite, par exemple s'il est légitime de la négliger sous le radical, le circuit a un régime oscillant, car m_1 et m_2 sont alors complexes, de la forme :

$$m_1 = -\frac{r}{2L} + i \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$m_2 = -\frac{r}{2L} - i \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

La solution générale est elle-même de la forme oscillante amortie :

$$v(t) = \frac{q}{\sqrt{LC}} e^{-\frac{r}{2L}t} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

b) Si la résistance r est très grande, la solution générale est non-oscillante ; c'est la superposition des deux exponentielles amorties $A e^{m_1 t}$ et $B e^{m_2 t}$, où m_1 et m_2 sont réels.

La résistance critique qui délimite ces deux types de régimes est celle qui annule le radical :

$$r_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

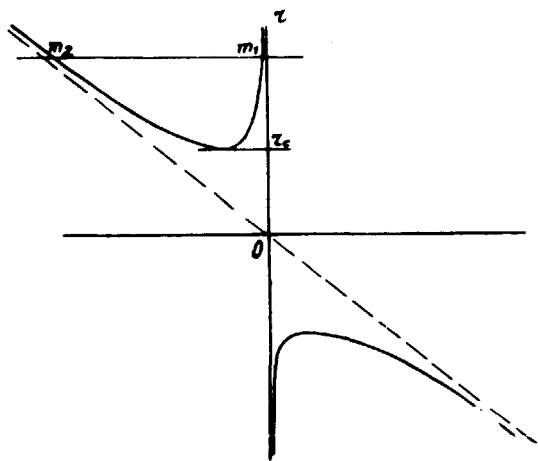


FIG. 13.

Il sera instructif, pour la généralisation aux réacteurs nucléaires que nous avons en vue, de tirer r

en fonction de m de l'équation résolvante et de représenter graphiquement cette dépendance.

La résistance critique est en évidence sur le graphique. Nous nous intéresserons seulement aux valeurs positives de r , bien qu'il soit possible en radioélectricité de réaliser des résistances négatives, et nous nous placerons dans la région où la résistance r est très supérieure à la valeur critique.

Les solutions réelles m_1 et m_2 ont dans ce cas des ordres de grandeur très différents. On a alors :

$$m_1 \ll m_2$$

$$m_2 \simeq m_1 + m_2 = -\frac{r}{L}$$

$$m_1 m_2 = \frac{1}{LC}$$

d'où on tire :

$$m_1 \simeq -\frac{1}{rC}$$

$$m_2 \simeq -\frac{r}{L}$$

Ces résultats s'interprètent physiquement de la façon suivante :

En évolution libre, la variable v obéit à l'équation

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + rC \frac{dv}{dt} + v = 0$$

Si nous portons notre attention sur le terme *lentement variable* $v_1(t) = e^{m_1 t}$, nous voyons qu'il est légitime de négliger la dérivée seconde d^2v_1/dt^2 , ce qui ramène l'équation à la forme plus simple :

$$rC \frac{dv_1}{dt} + v_1 = 0$$

De même, en ce qui concerne le terme *rapidement variable* $v_2(t) = e^{m_2 t}$, les dérivées d^2v_2/dt^2 et dv_2/dt seront au contraire prépondérantes, ce qui réduit l'équation après intégration à :

$$LC \frac{dv_2}{dt} + rCv_2 = 0 \quad \text{ou} \quad L \frac{dv_2}{dt} + rv_2 = 0$$

Les constantes de temps de ces deux équations sont bien :

$$m_1 = -\frac{1}{rC} \quad \text{et} \quad m_2 = -\frac{r}{L}$$

Faisons intervenir maintenant le terme impulsif $E(t)$, dans l'équation complète

$$(7) \quad E = LC \frac{d^2v}{dt^2} + rC \frac{dv}{dt} + v$$

Des conditions initiales $v(0) = 0$ et $(dv/dt)_0 = q/LC$ on tirera (toujours dans l'approximation $m_1 \ll m_2$) :

$$A = -\frac{q}{LC} \frac{1}{m_2} = \frac{q}{rC}$$

$$B = -A = -\frac{q}{rC}$$

D'où la solution générale :

$$v(t) = \frac{q}{rC} e^{m_1 t} - \frac{q}{rC} e^{m_2 t}$$

Nous remarquerons que ces deux termes n'apportent pas la même contribution lorsque le système se trouve soumis, non plus à une impulsion isolée, mais à un très grand nombre d'impulsions distribuées aléatoirement dans le temps.

La faible valeur du coefficient q/rC (r a été supposé très grand en effet, et q est généralement très petit) est compensée, dans le cas du premier terme, par le fait que la constante de temps $1/m_1$ est très grande et que, par conséquent, les effets d'un très grand nombre d'impulsions vont s'ajouter pour donner, en fin de compte, un terme de bruit de valeur finie.

En ce qui concerne le second terme, non seulement son coefficient est très petit, mais l'effet d'intégration ne jouera pas puisque sa constante de temps $1/m_2$ est également très faible.

Le bruit dû au second terme est par suite négligeable devant le premier.

La disparité de ces deux effets est aussi apparente si l'on décompose l'équation d'évolution (7) en deux équations plus simples (du premier ordre)

$$(8) \quad E = rC \frac{dv_1}{dt} + v_1$$

$$(9) \quad 0 = L \frac{dv_2}{dt} + r v_2$$

A partir de la première on retrouve bien, par la méthode classique d'intégration sur la durée très brève τ d'une impulsion, le coefficient du terme lentement variable

$$(v_1)\tau = \frac{q}{rC}$$

tandis que le bruit associé au terme rapidement variable se trouve négligé dans la seconde équation.

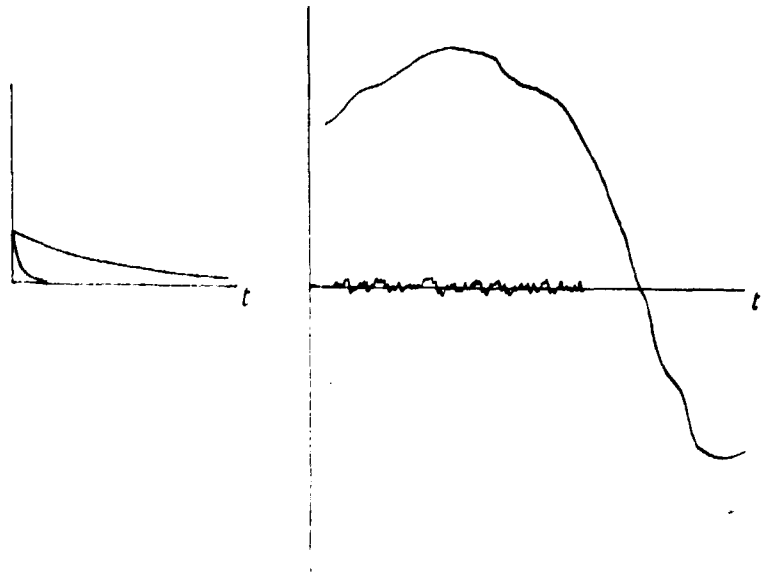


FIG. 14.

La décomposition de l'équation perturbée est légitimée par la remarque du paragraphe concernant l'effet de la largeur de bande sur la transmission d'un bruit : ici l'équation (8) définit une faible largeur de bande, tandis que l'équation (9), au contraire, correspond à un circuit de très large bande passante.

EFFET DE L'ÉMISSION DISCONTINUE DE LA SOURCE DE NEUTRONS DANS UN RÉACTEUR NUCLÉAIRE

Equations cinétiques d'un réacteur nucléaire (rappel).

A. Hypothèses simplificatrices.

Nous établirons brièvement, avant de les utiliser, les équations cinétiques d'un réacteur nucléaire. Les connaissances de neutronique utiles ici sont très limitées si l'on s'en tient aux hypothèses simplificatrices suivantes :

1° Le réacteur sera considéré comme une enceinte dans laquelle évoluent des neutrons, dont le comportement est assez voisin de celui des molécules d'un gaz neutre dans un récipient. Nous raisonnerons comme si ces neutrons étaient en équilibre thermique entre eux et avec le milieu environnant, avec une énergie cinétique moyenne par neutron de l'ordre de 1/40 eV. De tels neutrons sont appelés *neutrons thermiques*.

2° Ce gaz se différencie néanmoins des gaz neutres usuels par le fait que les neutrons thermiques sont doués des propriétés suivantes :

a) Ils peuvent être absorbés et disparaître de façon définitive au sein du réacteur ;

b) Ils peuvent s'échapper à l'extérieur du réacteur car les parois sont partiellement perméables ;

c) Ils peuvent produire des fissions au sein du réacteur, c'est-à-dire se multiplier.

3° Le phénomène de multiplication des neutrons peut être réduit au schéma suivant :

Lorsqu'un neutron thermique rencontre un noyau de matière fissile, il disparaît et engendre, de façon pratiquement instantanée, ν neutrons en moyenne appelés *neutrons prompts*. Ces neutrons de fission, d'énergie élevée (2 MeV environ), finissent par se thermaliser. Nous ne ferons pas intervenir le processus de ralentissement et nous traiterons ces neutrons prompts comme s'ils étaient nés à l'état thermique, ce qui est légitime car, pour un réacteur thermique, les pertes neutroniques en cours de ralentissement sont toujours très faibles. Il est intéressant de noter cependant que, malgré ces hypothèses restrictives, la forme des équations cinétiques que nous obtiendrons peut être adaptée à l'étude des réacteurs rapides qui sont d'un intérêt très actuel.

Les fragments nucléaires instables produits au moment de la fission, subiront une évolution radioactive et pourront dans certains cas donner naissance, au bout d'une durée variable, à des neutrons appelés *neutrons retardés*.

Ces générateurs de neutrons retardés sont appelés des *précurseurs*. Il existe différents types de précurseurs, caractérisés chacun par un délai d'émission moyen τ_m , que l'on a classés en un certain nombre de groupes.

Nous désignerons dans la suite par Q_m la concentration en précurseurs du groupe m dans le réacteur, à un instant t .

En résumé, nous aurons à faire intervenir :

— *La durée de vie moyenne des neutrons dans le réacteur, désignée par l , le neutron pouvant terminer sa vie par absorption stérile, fuite, ou capture suivie de fission.*

— *Le nombre moyen de neutrons prompts engendrés par un neutron au cours de sa vie, compte tenu des absorptions ou des fuites possibles (ce qui ramène ce nombre à une valeur inférieure à ν). Nous le désignerons par k' .*

— *Le nombre de précurseurs du groupe m engendrés en moyenne par un neutron au cours de sa vie, nous le désignerons par c_m , et nous admettrons que chaque noyau précurseur ne peut donner naissance qu'à un seul neutron retardé, avec le délai moyen τ_m .*

Nous poserons dans la suite

$$\lambda_m = \frac{1}{\tau_m}$$

$$c = \sum_m c_m \text{ (somme effectuée sur tous les groupes de précurseurs)}$$

$$k = k' + c$$

4° Au sein du réacteur se trouve placée le plus souvent une source génératrice de neutrons. Nous supposons qu'elle émet en moyenne \bar{S} neutrons par seconde, et nous raisonnerons comme si ces neutrons étaient thermiques. Ces neutrons étant produits de façon discontinue, nous désignerons par $S(t)dt$ le nombre de neutrons émis réellement pendant un petit intervalle de temps dt .

Les principaux phénomènes que nous aurons à faire intervenir, sont rassemblés sur le schéma 15 :

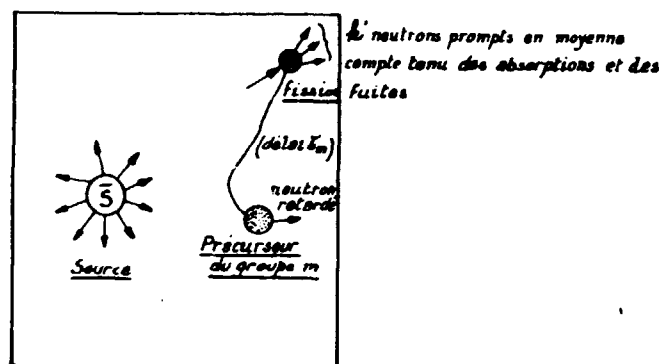


FIG. 15.

B. Equations cinétiques.

Supposons d'abord à titre de simplification que les phénomènes de multiplication des neutrons et de désintégration des précurseurs soient assimilables à des processus continus moyens non aléatoires. Ainsi, dans ce paragraphe le seul phénomène aléatoire sera l'émission des neutrons par la source.

Soit N la densité neutronique au temps t . L'augmentation de N , dû au seul phénomène de multi-

plication, pendant une durée dt choisie arbitrairement brève est

$$\frac{(k' - 1)N}{l} dt$$

(l , durée de vie moyenne des neutrons dans le réacteur).

D'autre part, Q_m désignant la densité des noyaux précurseurs du groupe m , dans le réacteur, au temps t , l'apport neutronique dû aux précurseurs pendant l'intervalle dt est

$$\sum_m \lambda_m Q_m dt$$

(λ_m , constante radioactive des précurseurs de groupe m) et, de même, l'apport de la source est

$$S(t)dt$$

Ainsi, au total, l'augmentation par unité de temps de la densité neutronique est :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k' - 1}{l} N + \sum_m \lambda_m Q_m + S$$

On joindra à cette équation les lois d'évolution des concentrations en précurseurs des différents groupes, obtenues par un raisonnement analogue.

D'une part, la formation des noyaux précurseurs conduit à l'augmentation, pendant l'intervalle dt :

$$\frac{Nc_m}{l} dt$$

D'autre part, la désintégration de ces noyaux conduit à l'appauvrissement

$$\lambda_m Q_m dt$$

On en déduit la loi d'évolution des précurseurs du groupe m :

$$\frac{dQ_m}{dt} = \frac{c_m}{l} N - \lambda_m Q_m$$

On exprime parfois le nombre de neutrons retardés provenant d'un neutron thermique initial en fonction de son pourcentage par rapport au nombre total de neutrons (prompts et retardés) produits en moyenne.

Cela conduit à poser

$$c_m = \beta_m k \quad \beta = \sum_m \beta_m$$

où β_m est le pourcentage des neutrons retardés du groupe m , et β le pourcentage des neutrons retardés pour l'ensemble des groupes.

Dans ces conditions, les équations cinétiques s'écrivent :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(1 - \beta)k - 1}{l} N + \sum_m \lambda_m Q_m + S$$

$$\frac{dQ_m}{dt} = \frac{\beta_m k}{l} N - \lambda_m Q_m$$

C'est sous cette forme qu'elles sont le plus couramment utilisées.

La source de neutrons considérée comme une source d'impulsions.

Nous avons vu (page 4) que la loi d'émission de la source de neutrons est représentable par une succession d'impulsions rectangulaires, caractérisées chacune par

a) La durée $\tau = \frac{1}{2\bar{S}}$, \bar{S} étant le nombre moyen

de neutrons produits par la source par unité de temps;

b) L'échelon $q = 1$ neutron, ce qui donne pour « amplitude maximum » de l'impulsion la valeur $2\bar{S}$;

c) La probabilité d'existence $p = 1/2$.

Il est, bien entendu, équivalent de considérer des impulsions successives d'échelons 1 ou 0, avec l'équiprobabilité $1/2$.

Cette représentation peut être améliorée en analysant de façon plus précise le caractère discontinu du phénomène réel.

Nous figurerons toujours l'émission d'un neutron par une impulsion d'échelon unité, $q = 1$ neutron, mais nous remarquerons que la durée d'émission dt des neutrons est extrêmement brève, très inférieure

notamment à la durée $\tau = \frac{1}{2\bar{S}}$ choisie plus haut

comme « quantum » de temps. L'amplitude $1/dt$ de l'impulsion est donc très grande, ce qui l'identifie pratiquement à la fonction δ des mathématiciens.

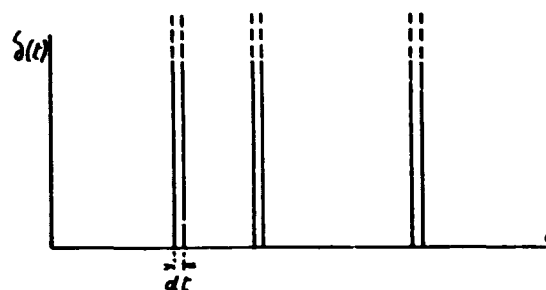


FIG. 16

La fonction $S(t)$ se présente donc sous la forme d'une suite de fonctions δ , distribuées au cours du temps de façon aléatoire, avec une densité moyenne \bar{S} par unité de temps.

Le modèle de la page 4 consistait seulement à définir de façon conventionnelle une durée d'émission fictive $1/2\bar{S}$, tout en conservant aux impulsions successives le même échelon unité.

Cette façon de procéder est correcte si la durée $1/2\bar{S}$ est très inférieure au « pouvoir séparateur » du système qui « observe » l'impulsion.

Dans la suite, il sera parfois commode de faire jouer un rôle privilégié à la valeur moyenne \bar{S} , en posant

$$S(t) = \bar{S} + \widetilde{S}(t)$$

ce qui définira la fonction aléatoire de moyenne nulle $\widetilde{S}(t)$.

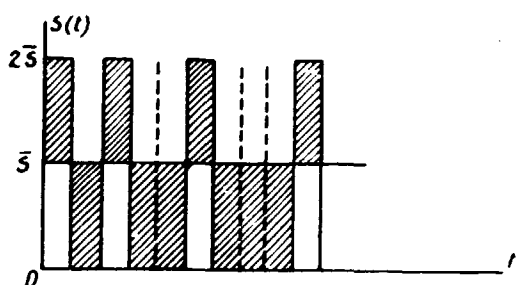


FIG. 17.

La représentation de la fonction $S(t)$ par une succession de créneaux minces, de durée $1/2\bar{S}$, conduit aussi à un modèle simple pour la fonction $\widetilde{S}(t)$ qui apparaît alors comme une succession d'impulsions soit positives soit négatives, telles que celles qui sont couvertes de hachures sur la figure 17.

Analogie électrique.

La loi d'évolution de la densité neutronique $N(t)$ s'obtient par élimination des concentrations en précurseurs des différents groupes Q_m , entre les équations cinétiques de la page 12.

Pour illustrer cette méthode, nous nous placerons dans le cas simple théorique où n'existe qu'un seul groupe de précurseurs. L'élimination de la variable Q conduit alors à une équation différentielle du second ordre en N .

La seule difficulté provient de ce que, dans le calcul, s'introduit la dérivée dS/dt , et que $S(t)$ n'est pas une fonction continue. La méthode est néanmoins légitimée par la théorie des distribu-

tions de L. SCHWARTZ, et l'introduction des fonctions

$$\delta(t) \quad \delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

Nous avons vu, d'autre part, comment la réduction de bande apportée par le système physique conduit à remplacer ces fonctions discontinues par des fonctions continues plus ou moins rapidement variables.

Dans ces conditions, l'équation d'évolution neutronique s'écrit :

$$\frac{d^2N}{dt^2} + \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) \frac{dN}{dt} + \frac{\lambda}{l} (1-k)N = \lambda S + \frac{dS}{dt}$$

(Les différents coefficients ont été définis plus haut, notamment on a posé $k = k' + c$.)

L'analogie avec l'équation (7) d'un circuit à self, résistance, capacité, excité par un bruit thermique, est maintenant bien apparente.

La forme du second membre aléatoire est seulement un peu différente de celui que nous avons rencontré à l'occasion de ce premier exemple. Le développement de la méthode nous montrera que la présence du terme dS/dt n'introduit cependant aucune difficulté particulière.

L'évolution du réacteur en « régime libre », c'est-à-dire en l'absence de source ($S = 0$), est obtenue à partir de l'équation sans second membre.

Sa solution générale est la somme de deux termes exponentiels

$$N(t) = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t}$$

où m_1 et m_2 sont solutions de l'équation résolvante

$$m^2 + \left(\frac{1-k+c}{l} + \lambda \right) m + \frac{\lambda}{l} (1-k) = 0$$

Le coefficient $k_{ex} = k - 1$, appelé *facteur de multiplication excédentaire*, y joue un rôle particulièrement important, au même titre que la résistance r dans le circuit électrique de notre premier exemple. On notera d'ailleurs qu'il peut prendre des valeurs positives ou négatives, ce qui est équivalent à l'introduction d'une résistance négative en radio-électricité.

Cependant, les techniciens préfèrent souvent utiliser le rapport

$$\rho = \frac{k_{ex}}{k} = \frac{k-1}{k}$$

appelé *réactivité*.

Aussi discuterons-nous plutôt en fonction de ce nouveau paramètre.

Tirant $k - 1$ en fonction de m de l'équation résolvante, on obtient

$$k - 1 = \frac{lm^2 + (c + \lambda l)m}{\lambda + m} = lm + \frac{cm}{\lambda + m}$$

ou, en posant (page 12),

$$c = \beta k$$

$$k - 1 = lm + k \frac{\beta m}{\lambda + m}$$

On en déduit finalement

$$\rho = \frac{lm}{1 + lm} + \frac{1}{1 + lm} \frac{\beta m}{\lambda + m}$$

La représentation graphique de cette dépendance $\rho(m)$ est classique. Elle joue ici le même rôle que la courbe de la figure 13 obtenue à propos du circuit radioélectrique de notre premier exemple, et nous conduira à des conclusions analogues.

Notons que l'on a nécessairement $\rho \leq 1$.

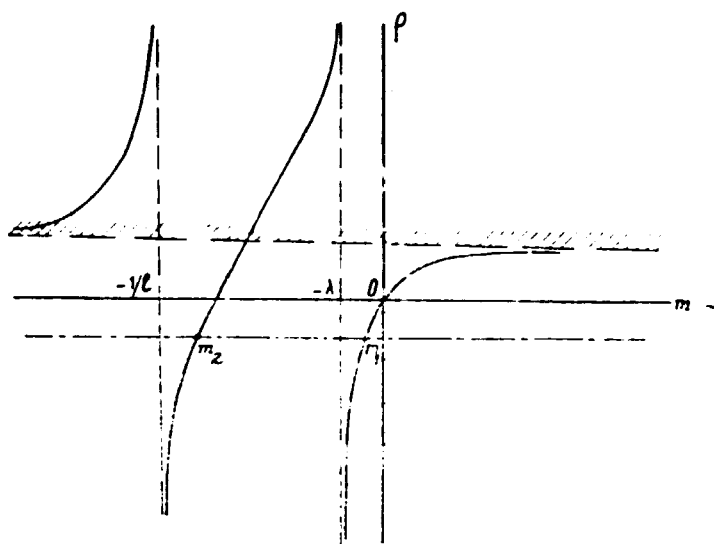


FIG. 18.

A une valeur négative de la réactivité, ce qui correspond aux conditions réelles de fonctionnement d'un réacteur muni d'une source sont associés des coefficients m_1 et m_2 négatifs, donc des solutions particulières $e^{m_1 t}$ et $e^{m_2 t}$ amorties.

D'autre part, les valeurs numériques des paramètres λ et $1/l$, qui définissent les asymptotes verticales de la courbe (correspondant à $\rho \rightarrow \infty$) ont des

ordres de grandeur très différents. On a toujours :

$$\frac{1}{l} \gg \lambda$$

Il s'ensuit que les coefficients m_1 et m_2 ont également des ordres de grandeur très différents, ce qui nous ramène aux conditions analysées à la page 9.

On a encore ici :

$$m_1 \ll m_2$$

Ceci nous autorise à décomposer l'équation d'évolution libre du réacteur en deux équations du premier ordre.

— D'une part, une équation qui régit le terme *lentement variable*

$$N_1(t) = e^{m_1 t}$$

— D'autre part, une équation qui régit le terme *rapidement variable*

$$N_2(t) = e^{m_2 t}$$

$$\left(\frac{1 - k'}{l} + \lambda \right) \frac{dN_1}{dt} + \frac{\lambda}{l} (1 - k) N_1 = 0$$

$$\frac{dN_2}{dt} + \left(\frac{1 - k'}{l} + \lambda \right) N_2 = 0$$

Enfin les remarques précédentes concernant l'effet des largeurs de bande sur les termes de bruit nous conduisent aux équations perturbées :

$$\left(\frac{1 - k'}{l} + \lambda \right) \frac{dN_1}{dt} + \frac{\lambda}{l} (1 - k) N_1 = \lambda S(t)$$

$$\frac{d^2 N_2}{dt^2} + \left(\frac{1 - k'}{l} + \lambda \right) \frac{dN_2}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

ou, après intégration :

$$\frac{dN_2}{dt} + \left(\frac{1 - k'}{l} + \lambda \right) N_2 = S(t) + K$$

où K est une constante d'intégration que l'on choisira de façon à annuler la valeur moyenne de $N_2(t)$

Nous trouvons ici une illustration de la loi générale énoncée plus haut :

La dérivée du bruit dS/dt est pratiquement sans effet sur la partie lentement variable de la réponse, $N_1(t)$; au contraire son effet sur la partie rapidement variable $N_2(t)$ est prépondérant devant $S(t)$, alors négligeable.

Densité neutronique moyenne, carré moyen des fluctuations.

Théorèmes DE CAMPBELL (rappel)

Lorsqu'un système est soumis à des impulsions aléatoirement distribuées au cours du temps et se succédant à une cadence rapide, les théorèmes de CAMPBELL permettent de déterminer rapidement la valeur moyenne de la réponse et le carré moyen des fluctuations autour de la moyenne.

On supposera que les impulsions ont le même échelon q , ce qui est bien le cas du problème actuel, et l'on désignera par $R(t)$ la réponse du système sous l'effet d'une impulsion isolée, à l'origine des temps.

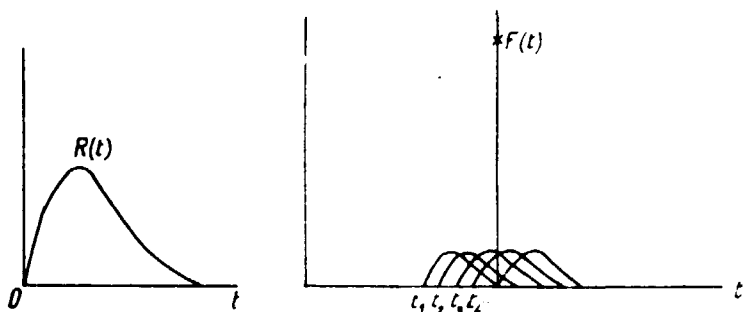


FIG. 19.

Ainsi, une impulsion produite au temps t_j donnera de même pour réponse élémentaire $R(t - t_j)$, et l'évolution aléatoire $F(t)$ du système, sous l'effet des nombreuses impulsions auxquelles il est soumis, s'obtiendra en sommant sur les t_j suivant :

$$F(t) = \sum_{t_j} R(t - t_j)$$

Le premier théorème de CAMPBELL permet de calculer la moyenne $\overline{F(t)}$, à partir de la loi originelle $R(t)$, et de n , nombre moyen d'impulsions par unité de temps :

$$\overline{F(t)} = n \int_0^{\infty} R(t) dt$$

Le deuxième théorème donne le carré moyen des fluctuations autour de la moyenne

$$\overline{(F - \overline{F})^2} = n \int_0^{\infty} R^2(t) dt$$

Nous supposons ici que le système obéit à une loi d'évolution de la forme

$$(10) \quad \frac{dF}{dt} + \alpha F = E(t)$$

dans laquelle α est une constante, et le second

membre $E(t)$ représente un bruit, succession aléatoire d'impulsions de même échelon q .

La réponse sous l'effet d'une impulsion isolée, à l'origine des temps est :

$$R(t) = q e^{-\alpha t}$$

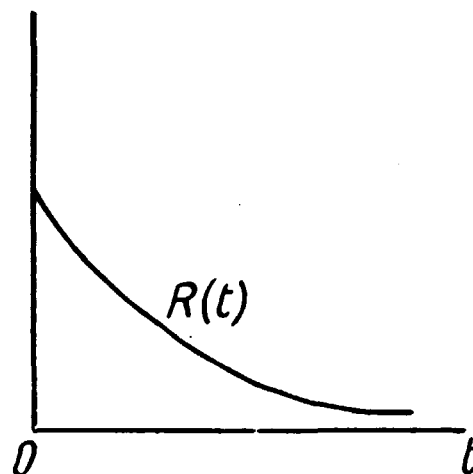


FIG. 20.

Et l'application du premier théorème de CAMPBELL donne

$$\overline{F(t)} = n \int_0^{\infty} q e^{-\alpha t} dt = \frac{nq}{\alpha}$$

Or, le numérateur nq représente la valeur moyenne du bruit $E(t)$

$$\overline{E(t)} = nq$$

On a donc

$$\overline{F(t)} = \frac{\overline{E(t)}}{\alpha}$$

ce que l'on pouvait prévoir en prenant directement les moyennes des deux membres de l'équation (10) :

$$\frac{d\overline{F}}{dt} + \alpha \overline{F} = \overline{E}$$

avec la condition de régime permanent $\frac{d\overline{F}}{dt} = 0$

Ainsi, à la valeur moyenne du bruit $\overline{E(t)}$, correspond simplement la valeur moyenne de la réponse $\overline{F(t)}$.

De même, aux fluctuations du bruit $E(t)$ correspondront les fluctuations de la réponse $F(t)$, ce qui nous conduit à introduire les nouvelles fonctions aléatoires de moyennes nulles $\overline{E(t)}$ et $\overline{F(t)}$ qui représentent les fluctuations, autour de leurs valeurs moyennes respectives, de $E(t)$ et $F(t)$.

On posera

$$E(t) = \overline{E(t)} + \widetilde{E(t)}$$

$$F(t) = \overline{F(t)} + \widetilde{F(t)}$$

$\overline{E(t)}$ et $\overline{F(t)}$ vérifiant la relation (10), on voit que $\widetilde{E(t)}$ et $\widetilde{F(t)}$ sont liés par la même relation

$$\frac{d\widetilde{F}}{dt} + \alpha\widetilde{F} = \widetilde{E}$$

et l'application du deuxième théorème de CAMPBELL permet de calculer le carré moyen des fluctuations

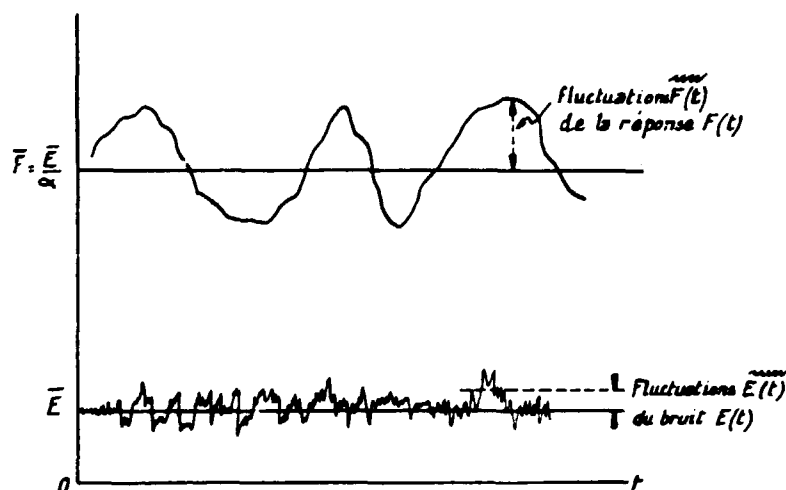


FIG. 21.

de \widetilde{F} en fonction de l'échelon q d'une impulsion isolée, et du nombre moyen d'impulsions, n , par unité de temps

$$\overline{[F(t)]^2} = \overline{[F(t) - \overline{F(t)}]^2} = n \int_0^{\infty} q^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{nq^2}{2\alpha}$$

(10 bis).

Application au calcul de $\overline{N(t)}$ et de $\overline{(N - \overline{N})^2}$

Les résultats précédents seront appliqués sans difficulté aux équations neutroniques

$$(11) \quad \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) \frac{dN_1}{dt} + \frac{\lambda}{l} (1-k)N_1 = \lambda S(t)$$

$$(12) \quad \frac{dN_2}{dt} + \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) N_2 = S(t) + K$$

On a posé plus haut

$$S(t) = \overline{S(t)} + \widetilde{S(t)}$$

On voit alors que $\widetilde{S(t)}$ se confond avec le terme aléatoire de moyenne nulle $\widetilde{E(t)}$ introduit plus haut.

Prenant les moyennes des deux membres des équations (11) et (12), avec la condition de régime

$$\frac{d\overline{N}_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\overline{N}_2}{dt} = 0 \quad \text{on obtient :}$$

$$(13) \quad \frac{\lambda}{l} (1-k)\overline{N}_1 = \lambda \overline{S}$$

$$(14) \quad \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) \overline{N}_2 = \overline{S} + K$$

avec $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ et $\overline{N} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2$

$N_2(t)$ représentant le terme de bruit rapidement variable, on assurera la nullité de la moyenne \overline{N}_2 en prenant, pour la constante d'intégration K , la valeur

$$K = -\overline{S}$$

De l'équation (13) on tire alors la densité neutronique moyenne :

$$(15) \quad \overline{N} = \overline{N}_1 = \frac{\overline{S}l}{1-k}$$

D'autre part, les fluctuations $\widetilde{N}_1(t)$, $\widetilde{N}_2(t)$, $\widetilde{S(t)}$, des densités neutroniques N_1 , N_2 et de la source, sont liées par les équations

$$(16) \quad \frac{d\widetilde{N}_1}{dt} + \frac{\lambda(1-k)}{1-k'+\lambda l} \widetilde{N}_1 = \frac{\lambda}{1-k'+\lambda l} \widetilde{S}$$

$$(17) \quad \frac{d\widetilde{N}_2}{dt} + \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) \widetilde{N}_2 = \widetilde{S}$$

— Les échelons des impulsions produites par la source ont pour valeur

$$q = 1$$

mais ils se trouvent multipliés, dans l'équation (16), par le facteur constant

$$\frac{\lambda}{1-k'+\lambda l}$$

— Leur nombre moyen par unité de temps est

$$n = \overline{S}$$

Dans ces conditions, l'application de la formule

(10 bis) donne pour carrés moyens des fluctuations des densités neutroniques $N_1(t)$ et $N_2(t)$

$$(18) \overline{[N_1(t)]^2} = \frac{\lambda^2 l^2}{(1 - k' + \lambda l)^2} \frac{1 - k' + \lambda l}{2\lambda(1 - k)} \bar{S} =$$

$$= \frac{\lambda l^2}{2(1 - k)(1 - k' + \lambda l)} \bar{S}$$

$$(19) \overline{[N_2(t)]^2} = \frac{l}{2(1 - k' + \lambda l)} \bar{S}$$

$$= \frac{(1 - k)l}{2(1 - k)(1 - k' + \lambda l)} \bar{S}$$

Soit au total :

$$(20) \overline{[N(t)]^2} = \overline{[N_1(t)]^2} + \overline{[N_2(t)]^2} =$$

$$= \frac{1 - k + \lambda l}{2(1 - k)(1 - k' + \lambda l)} l \bar{S}$$

FLUCTUATIONS DUES AU CARACTÈRE ALÉATOIRE DE LA MULTIPLICATION NEUTRONIQUE

Représentation du phénomène par une suite d'impulsions aléatoires.

Une analyse détaillée de l'« histoire » des neutrons dans un réacteur nucléaire doit tenir compte des différents phénomènes aléatoires auxquels sont soumis ces derniers au cours de leur vie, en particulier des différents accidents qui les mettent hors de jeu. Ces accidents sont principalement :

- l'absorption stérile au sein du réacteur ;
- la fuite ;
- la capture suivie de fission.

Ces trois phénomènes sont aléatoires, ainsi que, d'ailleurs, le nombre de neutrons effectivement produits au moment où a lieu une fission.

Dans un but simplificateur, nous regrouperons ces différentes causes de disparition en une seule loi de capture fictive, conduisant à la disparition du neutron et à la création de k' nouveaux neutrons. Le nombre k' sera ajusté pour tenir compte des disparitions stériles.

Ainsi, dans cette description simplifiée, l'accident ultime est un choc « standard » suivi de l'émission

de k' neutrons prompts, mais ce choc peut se produire à un moment quelconque de la vie du neutron, et c'est ce qui introduit le caractère aléatoire du phénomène.

Nous développerons d'abord la théorie en supposant que k' est constant, hypothèse introduite seulement pour la commodité de l'exposé, et dont nous nous affranchirons aisément.

l désignera toujours la durée de vie moyenne d'un neutron au sein du réacteur.

L'incertitude sur la date des chocs conduit à introduire la probabilité pour que 1 neutron d'une collection N subisse un choc, sur l'intervalle d'observation dt . Cette probabilité est :

$$p = \frac{Ndt}{l}$$

Par conséquent, si nous adoptons pour intervalle élémentaire

$$\tau = \frac{l}{2N}$$

la probabilité pour que nous observions 1 choc, et l'émission de k' neutrons, est $p = 1/2$, et la probabilité pour que nous n'observions pas de choc est également $1/2$. Notons cependant que, si un choc se produit, le neutron générateur disparaît. Le phénomène est donc équivalent à la production, par une source fictive, de $k' - 1$ neutrons.

Par analogie avec l'étude de l'émission d'une source autonome, nous pourrions représenter le processus de multiplication par la suite d'impulsions de la figure 22.

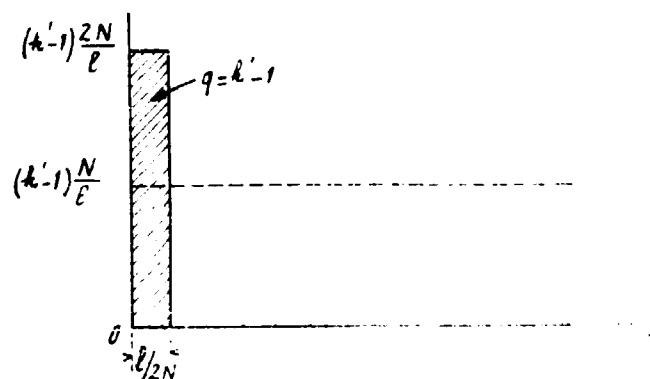


FIG. 22

a) La durée d'une impulsion est

$$\tau = \frac{l}{2N}$$

b) Son échelon est $q = k' - 1$ neutrons. C'est le

nombre de neutrons produits lors du phénomène élémentaire (compte tenu de la création de k' neutrons et de la disparition de 1 neutron).

Il s'ensuit que l'amplitude maximum de l'impulsion est

$$(k' - 1) \frac{2N}{l}$$

c) Sa probabilité d'existence est $p = 1/2$.

Comme dans l'étude d'une source autonome, la description peut être améliorée, en tenant compte du fait que le choc multiplicateur a une durée extrêmement brève.

La valeur $\tau = l/2N$ est conventionnelle.

En réalité, si dt est la durée très petite du choc, et $q = k' - 1$ neutrons, son échelon (qui reste constant puisqu'il représente le nombre de neutrons produits au cours du phénomène élémentaire), son amplitude $(k' - 1)/dt$ est très grande, ce qui l'identifie encore à la fonction théorique.

Le processus de multiplication se présente, dans ces conditions, sous la forme d'une suite de fonctions δ , distribuées au cours de temps de façon aléatoire, avec une densité locale $n = N/l$, et une densité moyenne :

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{l}$$

par unité de temps.

La valeur moyenne de cette fonction aléatoire est :

$$\bar{nq} = \frac{k' - 1}{l} \bar{N}$$

Création des précurseurs.

Au cours de sa vie dans le réacteur, un neutron donne en moyenne c_m précurseurs du groupe m . Nous supposons ici qu'il n'existe qu'un seul groupe de précurseurs, dont le délai d'émission sera le délai moyen calculé sur l'ensemble des groupes.

D'autre part, ayant ramené les différentes causes de disparition des neutrons à un même mécanisme : un choc standard fictif, nous admettrons que ce choc produit, en même temps que k' neutrons prompts, c précurseurs.

Ainsi, la probabilité pour que 1 neutron d'une collection N engendre c précurseurs sur l'intervalle d'observation dt est

$$p = \frac{Ndt}{l}$$

C'est la probabilité pour que se produise un choc fictif.

Le phénomène d'émission des précurseurs sera donc r présenté par une loi du même type que l'émission des neutrons prompts. L'axe des temps ayant été divisé en intervalles partiels de durée $\tau = l/2N$, l'émission sera encore décrite par une succession d'impulsions :

a) La durée d'une impulsion est

$$\tau = \frac{l}{2N}$$

b) Son échelon est $q = c$ précurseurs : nombre de précurseurs créés lors du phénomène élémentaire. L'amplitude maximum de l'impulsion est donc

$$c \frac{2N}{l}$$

c) Sa probabilité d'existence est $p = 1/2$.

Le passage à la limite, qui tient compte de la durée réelle des chocs, s'effectue facilement et conduit à une loi aléatoire analogue à la loi d'émission réelle des neutrons prompts (fig. 23).

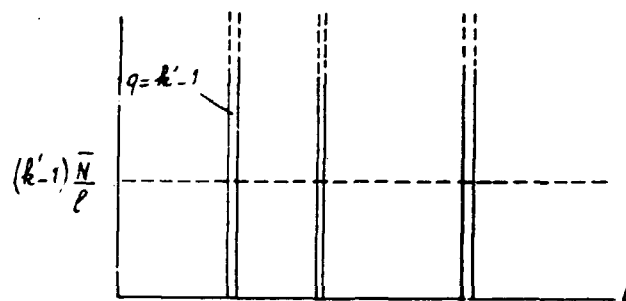


FIG. 23.

Le facteur de multiplication, compte tenu des neutrons prompts et des neutrons retardés est défini par

$$k = k' + c$$

Il est bien clair que l'addition des 2 lois aléatoires précédentes, celles qui concernent respectivement $k' - 1$ et c , conduit encore à une loi aléatoire du même type, dans laquelle l'échelon résultant est

$$q = k' - 1 + c = k - 1$$

Les équations cinétiques perturbées.

Il sera commode, dans la suite, d'adopter le modèle simplifié dans lequel les fonctions impulsives ont la durée conventionnelle $l/2N$. Nous nous placerons à une époque t , où la densité neutronique est N , et nous observerons les phénomènes pendant le laps de temps $\tau = l/2N$.

Deux possibilités également probables se présentent :

a) S'il se produit un choc (la probabilité pour que nous observions ce phénomène est $p = 1/2$), l'accroissement du nombre de neutrons dû à la multiplication est

$$k' = 1$$

D'autre part, la désintégration des précurseurs, c'est-à-dire l'émission des neutrons retardés, produit pendant la durée d'observation $l/2N$:

$$\lambda Q \frac{l}{2N}$$

neutrons retardés.

Enfin, la source autonome apporte l'appoint

$$S\tau = S \frac{l}{2N}$$

neutrons.

Notons au passage qu'il n'est pas nécessaire de supposer que S reste constant pendant la durée d'observation : S est la fonction aléatoire précisée à la page 12. Par exemple, s'il n'y a aucun neutron émis par la source pendant l'intervalle d'observation, on aura $S = 0$, s'il y a 1 neutron émis, on aura $S = 1$... Le fait que nous désignons par Sdt le nombre de neutrons émis par la source pendant le temps dt n'entraîne aucune hypothèse sur la nature continue ou discontinue de la source. Cette expression reste valable si la fonction S est une suite d'impulsions.

Au total, l'augmentation du nombre de neutrons sur la durée $l/2N$ est :

$$k' - 1 + \lambda Q \frac{l}{2N} + S \frac{l}{2N}$$

soit, par unité de temps :

$$\frac{dN}{dt} = 2 \frac{k' - 1}{l} N + \lambda Q + S$$

Toujours dans l'hypothèse où se produit un choc, la variation par unité de temps du nombre de précurseurs se calcule de la même façon, et on obtient aisément :

$$\frac{dQ}{dt} = 2 \frac{c}{l} N - \lambda Q$$

b) S'il ne se produit aucun choc, sur la durée d'observation τ , les seules causes d'accroissement du nombre de neutrons sont :

- la désintégration des précurseurs ;
- l'émission de la source autonome.

et il n'y a pas de nouveaux noyaux précurseurs formés.

On obtient dans ce cas les équations cinétiques :

$$\frac{dN}{dt} = \lambda Q + S$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q$$

Comme les deux hypothèses que nous venons de faire ont chacune pour probabilité $1/2$, en prenant les espérances mathématiques sur l'intervalle d'observation, on aboutira aux équations cinétiques moyennes :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k' - 1}{l} N + \lambda Q + S$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{c}{l} N - \lambda Q$$

Et l'on voit que les fluctuations de N et de Q peuvent être décrites en remplaçant, dans la loi moyenne, le coefficient $k' - 1$ par la fonction aléatoire représentée sur la figure 24a, ainsi que le coefficient c par la fonction aléatoire de la figure 24b.

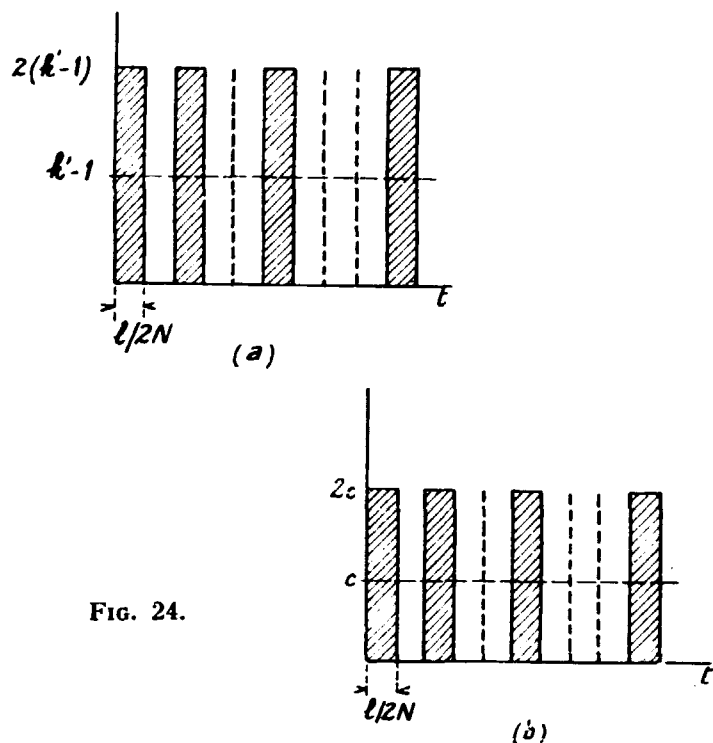


FIG. 24.

Il sera d'ailleurs commode de procéder à cette substitution après élimination de la variable Q entre les équations moyennes, car la seule grandeur intéressante ici est la densité neutronique N , dont nous proposons d'étudier la valeur moyenne et les fluctuations.

L'élimination de Q conduit à la loi d'évolution neutronique moyenne

$$\frac{d^2N}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left[\frac{1-k'}{l} + \lambda \right] N + \frac{\lambda}{l} (1-k)N = \lambda S + \frac{dS}{dt}$$

On en déduira l'équation cinétique perturbée en remplaçant les coefficients $1-k'$ et $1-k$ par les coefficients aléatoires

$$\frac{1-k' + \overline{1-k'}}{1-k + \overline{1-k}}$$

où, conformément aux notations antérieures, $\overline{1-k'}$, et $\overline{1-k}$ désignent les fluctuations des coefficients autour des valeurs moyennes respectives $1-k'$ et $1-k$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d^2N}{dt^2} + \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) \frac{dN}{dt} + \frac{\lambda}{l} (1-k)N \\ = \frac{d}{dt} \left(\frac{\overline{k'-1}}{l} \right) N + \frac{\lambda}{l} (\overline{k-1}) N + \lambda S + \frac{dS}{dt} \end{aligned}$$

Notons qu'au second membre, il est légitime de remplacer N par sa valeur moyenne \bar{N} , car les fluctuations neutroniques sont toujours très faibles. Leur introduction dans ce second membre conduirait à un effet du second ordre par suite des facteurs aléatoires $\overline{k'-1}$ et $\overline{k-1}$ eux-mêmes très petits.

Finalement l'équation cinétique perturbée s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d^2N}{dt^2} + \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) \frac{dN}{dt} + \frac{\lambda}{l} (1-k)N \\ (21) \\ = \frac{d}{dt} \left(\frac{\overline{k'-1}}{l} \right) \bar{N} + \frac{\lambda}{l} (\overline{k-1}) \bar{N} + \lambda S + \frac{dS}{dt} \end{aligned}$$

Calcul de $\overline{N(t)}$ et de $\overline{(N - \bar{N})^2}$

A ce stade, il ne reste plus qu'à appliquer systématiquement la méthode précédemment développée. Cette équation a la même forme que l'équation dans laquelle nous ne faisons intervenir que les fluctuations de la source. De la même façon nous la décomposerons en deux équations du premier ordre :

— une équation qui régit les fluctuations *lentement variables*

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) \frac{dN_1}{dt} + \frac{\lambda}{l} (1-k)N_1 \\ (22) \\ = \frac{\lambda}{l} (\overline{k-1}) \bar{N} + \lambda S(t) \end{aligned}$$

— une équation qui régit les fluctuations *rapidement variables*

$$\begin{aligned} \frac{d^2N_2}{dt^2} + \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) \frac{dN_2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\overline{k'-1}}{l} \bar{N} + \frac{dS}{dt} \\ (23) \end{aligned}$$

Cette dernière donne par intégration

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} + \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) N_2 = \frac{\overline{k'-1}}{l} \bar{N} + S(t) + K \\ (24) \end{aligned}$$

où K est une constante d'intégration que l'on choisira de façon à annuler la moyenne du terme rapidement variable N_2 .

Prenant les moyennes des deux membres des équations (22) et (24) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{l} (1-k) \bar{N}_1 = \lambda \bar{S} \\ (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) \bar{N}_2 = \bar{S} + K \\ (26) \end{aligned}$$

Avec $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ et $\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2$

On voit notamment que dans le calcul des valeurs moyennes, seul intervient l'effet de la source. L'annulation de \bar{N}_2 dans la seconde équation fixe la valeur de la constante d'intégration K :

$$K = -\bar{S}$$

De la première on tire alors la *densité neutronique moyenne*

$$\bar{N} = \bar{N}_1 = \frac{\bar{S}l}{1-k}$$

D'autre part, les fluctuations $N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont solutions des équations

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{N}_1}{dt} + \frac{\lambda(1-k)}{1-k'+\lambda} \tilde{N}_1 \\ (27) \\ = \frac{\lambda \tilde{N}}{1-k'+\lambda} (\overline{k-1}) + \frac{\lambda}{1-k'+\lambda} \tilde{S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{N}_2}{dt} + \left(\frac{1-k'}{l} + \lambda \right) \tilde{N}_2 = \frac{\tilde{N}}{l} (\overline{k'-1}) + \tilde{S} \\ (28) \end{aligned}$$

L'effet de la source autonome ayant été précédemment déterminé, nous porterons ici notre attention

sur les fluctuations dues au caractère aléatoire de la multiplication neutronique.

Les échelons des impulsions excitatrices sont alors :

a) dans la première équation (fig. 24 a, b) :

$$q = (k - 1) \frac{l}{N} \simeq (k - 1) \frac{l}{\bar{N}}$$

Ils sont multipliés par le facteur constant

$$\frac{\lambda \bar{N}}{1 - k' + \lambda l}$$

b) dans la deuxième équation (fig. 24a) :

$$q = (k' - 1) \frac{l}{N} \simeq (k' - 1) \frac{l}{\bar{N}}$$

Ils sont multipliés par le facteur

$$\frac{\bar{N}}{l}$$

Dans les deux cas, leur nombre moyen par unité de temps est :

$$n = \frac{\bar{N}}{l}$$

L'application de la formule (10 bis), conséquence du deuxième théorème de CAMPBELL, donne alors pour carré moyen des fluctuations des densités neutroniques $N_1(t)$ et $N_2(t)$

$$\begin{aligned} (29) \quad \overline{[N_1(t)]^2} &= \\ &= \frac{\bar{N}}{l} \frac{\lambda^2 (\bar{N})^2}{(1 - k' + \lambda l)^2} (k - 1)^2 \frac{l^2}{(\bar{N})^2} \frac{1 - k' + \lambda l}{2\lambda(1 - k)} = \\ &= \frac{\lambda l}{2(1 - k)(1 - k' + \lambda l)} (k - 1)^2 \bar{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (30) \quad \overline{[N_2(t)]^2} &= \\ &= \frac{\bar{N}}{l} (k' - 1)^2 \frac{l}{2(1 - k' + \lambda l)} = \frac{(k' - 1)^2}{2(1 - k' + \lambda l)} \bar{N} \\ &= \frac{1 - k}{2(1 - k)(1 - k' + \lambda l)} (k' - 1)^2 \bar{N} \end{aligned}$$

Soit, au total, compte-tenu du fait que le coefficient k' a toujours une valeur très voisine de k ($k' \simeq k$)

$$\begin{aligned} (31) \quad \overline{[N(t)]^2} &= \overline{[N_1(t)]^2} + \overline{[N_2(t)]^2} \simeq \\ &= \frac{1 - k + \lambda l}{2(1 - k)(1 - k' + \lambda l)} (k - 1)^2 \bar{N} \end{aligned}$$

Enfin, si on ajoute à cette expression le carré moyen des fluctuations dues à la source autonome, on obtient

$$(32) \quad \overline{[N(t)]^2} = \frac{1 - k + \lambda l}{2(1 - k)(1 - k' + \lambda l)} [(k - 1)^2 \bar{N} + l \bar{S}]$$

Fluctuation des facteurs de multiplication k' et k .

Jusqu'ici nous avons supposé que les neutrons thermiques engendrent toujours k' neutrons prompts et c noyaux précurseurs au cours de leur vie dans le réacteur.

Les nombres k' et c ont été considérés comme constants, mais en pratique ils sont eux-mêmes sujets à fluctuations. Aussi allons-nous maintenant améliorer nos hypothèses en supposant que k' , c , et par conséquent $k = k' + c$, fluctuent autour des valeurs moyennes :

$$\bar{k}', \bar{c}, \bar{k}$$

Cela n'entraînera que de faibles rectificatifs aux calculs précédents, dont nous allons seulement reprendre les points intéressés par la nouvelle hypothèse.

Les résultats obtenus plus haut (p. 17-21) subsistent, mais nous devons remplacer les impulsions standard qui représentent l'évolution aléatoire du coefficient $k' - 1$ (fig. 24 a), (et de même celles qui représentent l'évolution de C), par des impulsions dont la hauteur fluctue (fig. 25).

La valeur moyenne du coefficient $k' - 1$ est $\bar{k}' - 1$ et nous poserons toujours

$$1 - k' = 1 - \bar{k}' + \overline{1 - k'}$$

$$1 - k = 1 - \bar{k} + \overline{1 - k}$$

ce qui nous conduira, comme précédemment, à l'équation cinétique perturbée :

$$\begin{aligned} (35) \quad \frac{d^2 N}{dt^2} + \left(\frac{1 - \bar{k}'}{l} + \lambda \right) \frac{dN}{dt} + \frac{\lambda}{l} (1 - \bar{k}) N &= \\ = \frac{d \overline{1 - k'}}{dt} \frac{1}{l} \bar{N} + \frac{\lambda}{l} \overline{(k - 1)} \bar{N} + \lambda S + \frac{dS}{dt} \end{aligned}$$

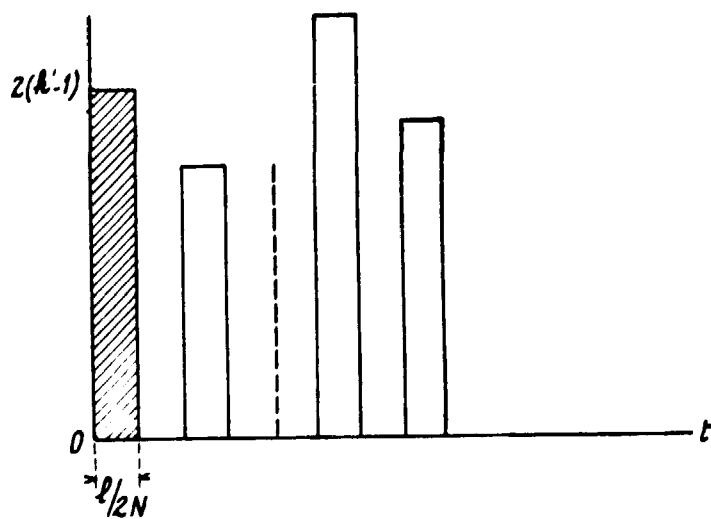


FIG. 25.

On en déduit la densité neutronique moyenne :

$$(34) \quad \bar{N} = \frac{\bar{S}l}{1 - \bar{k}}$$

Quant aux fluctuations *lentement variables* et *rapidement variables*, elles sont encore régies par :

$$(35) \quad \frac{d\tilde{N}_1}{dt} + \lambda \frac{1 - \bar{k}}{1 - \bar{k}' + \lambda} \tilde{N}_1 = \frac{\lambda \bar{N}}{1 - \bar{k}' + \lambda} (\bar{k} - 1) + \frac{\lambda}{1 - \bar{k}' + \lambda} \bar{S}$$

$$(36) \quad \frac{d\tilde{N}_2}{dt} + \left(\frac{1 - \bar{k}'}{l} + \lambda \right) \tilde{N}_2 = \frac{\bar{N}}{l} (\bar{k}' - 1) + \bar{S}$$

La différence la plus importante avec les équations obtenues plus haut provient de ce que les impulsions du bruit excitateur ne sont plus identiques, ce qui nécessite quelques précautions dans l'application du deuxième théorème de CAMPBELL.

Extension du deuxième théorème de Campbell.

Il est utile de préciser ici les conditions d'application du deuxième théorème de CAMPBELL dans le cas où les impulsions excitatrices ne sont pas identiques.

Pour cela, nous supposons que la suite des impulsions excitatrices est formée d'impulsions de différents types et qu'elle comporte par seconde :

n_1 impulsions du type 1, d'échelon q_1 ;

n_2 impulsions du type 2, d'échelon q_2 ;

n_k impulsions du type k, d'échelon q_k

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ impulsions au total.

L'équation d'évolution étant linéaire, nous déterminerons séparément les bruits produits par les impulsions des différents types :

$$F_1(t), F_2(t), \dots, F_k(t)$$

et nous obtiendrons l'effet résultant $F(t)$ en appliquant le principe de superposition, et le principe d'addition des carrés moyens des fluctuations.

Les carrés moyens des fluctuations des différentes fonctions de bruit introduites ici sont (cf. page 16) :

$$\overline{[F_1(t)]^2} = \frac{n_1 q_1^2}{2\alpha}$$

$$\overline{[F_2(t)]^2} = \frac{n_2 q_2^2}{2\alpha}$$

$$\overline{[F_k(t)]^2} = \frac{n_k q_k^2}{2\alpha}$$

(le coefficient α est celui de la formule 10 bis).

Ce qui nous conduit au carré moyen du bruit résultant, comme des carrés moyens des bruits composants :

$$\begin{aligned} \overline{[F(t)]^2} &= \frac{1}{2\alpha} [n_1 q_1^2 + n_2 q_2^2 + \dots + n_k q_k^2] = \\ &= \frac{1}{2\alpha} [n_1 + n_2 + \dots + n_k] q^2 \end{aligned}$$

en désignant par q l'échelon d'une impulsion standard, qui conduisait aux mêmes fluctuations dans l'hypothèse d'une suite d'impulsions toutes identiques.

Ainsi, on peut remplacer les impulsions des différents types par des impulsions d'un seul type, à condition de choisir l'échelon de l'impulsion équivalente de telle sorte que l'on ait :

$$q^2 = \frac{n_1 q_1^2 + n_2 q_2^2 + \dots + n_k q_k^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

On voit que q^2 est le carré moyen des échelons composants, ce que nous écrirons :

$$q^2 = \overline{q_1^2}$$

Carré moyen des fluctuations de densité neutronique $(N - \bar{N})^2$.

Ainsi, dans l'étude des fluctuations de la densité neutronique, il est légitime de remplacer la suite d'impulsions représentative des fluctuations du

coefficient $k' - 1$ (fig. 25) par une suite équivalente composée d'impulsions identiques, dont les carrés des échelons ont pour valeur commune :

$$\overline{\frac{l^2}{(k' - 1)^2 \bar{N}^2}}$$

et de même, en ce qui concerne le coefficient aléatoire $k - 1$, les carrés des échelons seront :

$$\overline{\frac{l^2}{(k - 1)^2 \bar{N}^2}}$$

En conclusion, nous sommes amenés à remplacer les formules (29) et (31) par les formules plus générales:

$$(37) \quad \overline{[N_1(t)]^2} = \frac{\lambda l}{2(1 - \bar{k})(1 - \bar{k}' + \lambda)} \overline{(k' - 1)^2 \bar{N}}$$

$$(38) \quad \overline{[N_2(t)]^2} = \frac{1 - \bar{k}}{2(1 - \bar{k})(1 - \bar{k}' + \lambda)} \overline{(k' - 1)^2 \bar{N}}$$

Soit, au total, et compte-tenu de la source autonome (avec $k' \simeq k$):

$$(39) \quad \overline{[N(t)]^2} = \frac{1 - \bar{k} + \lambda l}{2(1 - \bar{k})(1 - \bar{k}' + \lambda)} [\overline{(k - 1)^2 \bar{N}} + l\bar{S}]$$

Emploi de la fonction de transfert du réacteur nucléaire.

La méthode que nous venons de développer peut être rendue très systématique, et généralisée, par l'emploi de la fonction de transfert du réacteur.

Rappelons d'abord comment s'introduit cette fonction de transfert.

Partant des équations cinétiques

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(1 - \beta)k - 1}{l} N + \sum_m \lambda_m Q_m$$

$$\frac{dQ_m}{dt} = \frac{\beta_m k}{l} N - \lambda_m Q_m$$

une méthode classique consiste à chercher des solutions de la forme :

$$N = N_0 e^{st}$$

$$Q_m = Q_{m0} e^{st}$$

ce qui conduit à l'équation

$$(40) \quad k \left[1 - \sum_m \frac{\beta_m s}{s + \lambda_m} \right] N = (1 + ls)N$$

s peut-être considéré comme un symbole opérationnel, auquel cas cette équation est équivalente à une équation différentielle en N .

Le plus souvent, on la simplifie en tenant compte du fait que l est très petit, ce qui permet de négliger le terme en ls de la deuxième parenthèse, et on pose :

$$k_{ex} = k - 1 \text{ toujours très petit}$$

$$k \simeq 1 \text{ au voisinage de la criticité}$$

On a donc dans ces conditions :

$$(41) \quad \left[k_{ex} - \sum_m \frac{\beta_m s}{s + \lambda_m} \right] N = 0$$

Approximation linéaire.

Supposons par exemple que k_{ex} ne dépende que de facteurs géométriques, tels que la position des barres de contrôle.

Partons d'un état stationnaire défini par :

$$k_{ex} = 0$$

$$n = n_0$$

et supposons que nous fassions varier k_{ex} suivant une loi donnée :

$$k_{ex}(t)$$

N est alors de la forme

$$N = N_0 + \Delta N(t)$$

Portant dans l'équation (41), nous obtenons :

$$(42) \quad k_{ex} = \sum_m \frac{\beta_m s}{s + \lambda_m} \frac{\Delta N}{N}$$

On voit que k_{ex} joue le rôle d'une variable d'entrée,

ΔN d'une variable de sortie, $\sum_m \frac{\beta_m s}{s + \lambda_m}$ d'une fonction de transfert.

L'équation d'évolution d'un réacteur perturbé par le bruit neutronique :

$$(43) \quad \frac{d^2 N}{dt^2} + \left(\frac{1 - k'}{l} + \lambda \right) \frac{dN}{dt} + \frac{\lambda}{l} (1 - k) N =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{k' - 1}{l} \right) \bar{N} + \frac{\lambda}{l} \overline{(k - 1) \bar{N}} + \lambda S + \frac{dS}{dt}$$

est du même type, cependant :

1° Les fluctuations des facteurs de multiplication k' et k ne sont pas de nature géométrique, mais proviennent du caractère aléatoire du phénomène de multiplication neutronique.

2° A ces termes d'excitation s'ajoutent les termes aléatoires dus à l'émission discontinue de la source autonome.

3° La présence de la source impose au facteur k une valeur légèrement différente de l'unité.

Néanmoins, si l'on se plie aux hypothèses actuelles :

l très petit

k très voisin de 1

On voit que l'équation (41) se ramène à l'équation (42). En effet, les termes dans lesquels l figure en dénominateur sont prépondérants, et l'équation (43) s'écrit alors symboliquement :

$$csN = (s + \lambda) [(k - 1) \bar{N}]$$

avec

$c \approx \beta$ pour 1 groupe de précurseurs

$$\overline{k' - 1} \approx \overline{k - 1}$$

soit, en remarquant que l'opérateur s n'agit que sur la partie variable ΔN de la densité neutronique ($sN = s \Delta N$) :

$$(44) \quad \overline{(k - 1) \bar{N}} = \frac{\beta s}{s + \lambda} \Delta N$$

Dans le cas général, il est facile de voir également que si on désigne par $\Phi(s)$ la fonctionnelle du réacteur, déduite de l'équation (43), les effets des fluctuations de la multiplication neutronique et de la source sont traduits par l'équation de perturbation :

$$(45) \quad \overline{(k - 1) \dot{\bar{N}}} + l \bar{S} = \Phi(s) \Delta N$$

Le terme S participant d'autre part à l'équation aux valeurs moyennes.

On a ici :

$$(46) \quad \Phi(s) = \frac{ls^2 + (1 - k' + \lambda)s + \lambda(1 - k)}{s + \lambda}$$

Approximation non linéaire.

Pour mettre en évidence simplement le rôle des non-linéarités, nous supposons ici que le réacteur fonctionne en l'absence de source.

Nous avons vu que le bruit neutronique introduit une fluctuation aléatoire du facteur de multiplication k et, de ce point de vue, ne se différencie pas profondément des autres causes perturbatrices influant sur ce même paramètre.

Aussi sera-t-il commode d'adopter au début un modèle équivalent, en supposant que le bruit neutronique est négligeable et que la seule cause de perturbation est, par exemple, le déplacement des barres de contrôle.

En fait, le facteur k_{ex} ne dépend pas uniquement de la position des barres, mais aussi du niveau de puissance de fonctionnement, c'est-à-dire de N .

C'est ce deuxième effet qui rend non linéaire la fonctionnelle du réacteur.

On posera donc :

$$k_{ex} = k_c + k_N$$

k_c ne dépendant que des facteurs géométriques, k_N dépendant du niveau de puissance du réacteur.

Ce deuxième terme est important, on peut le préciser comme suit :

Supposons que, partant de la valeur zéro, nous fassions varier k_c au cours du temps suivant la loi

$$k_c = k_c(t)$$

Il s'ensuit, pour N , une loi de variation

$$N = N(t)$$

Les variations de N vont engendrer le terme k_N .

On posera :

$$k_N = R(s) N$$

où $R(s)$ est une fonctionnelle.

On a alors :

$$k_{ex} = k_c + R(s)N$$

et la loi (41) devient :

$$(47) \quad [k_c + R(s)N - \Phi(s)]N = 0$$

Cette loi est non linéaire.

Supposons que N comporte une partie constante ou très lentement variable N_0 et une partie plus rapidement variable, mais de faible amplitude devant N_0 , ΔN . Soit :

$$N = N_0 + \Delta N$$

Par exemple, le réacteur pourra fonctionner sur un niveau de puissance donné, et on étudiera son comportement au voisinage de ce niveau, sous l'effet d'une perturbation de k_c (qui est en fait, ici, la seule grandeur sur laquelle on puisse jouer délibérément).

On posera :

$$R(s)N = R(s)N_0 + R(s) \Delta N = k_0 + R(s) \Delta N$$

Comme N_0 , k_0 est une grandeur très lentement variable, ou constante.

L'équation (47) s'écrit :

$$(48) \quad [k_c + k_0 + R(s) \Delta N - \Phi(s)] (N_0 + \Delta N) = 0$$

Supposons, de plus, que k_c évolue autour d'une valeur constante k_1 , et posons :

$$k_c = k_1 + \delta k_c(t)$$

L'équation (48) se décompose alors en deux équations :

— une équation relative au terme à variation lente ;

— une équation de perturbation par rapport à ΔN .

Soit :

$$(49) \quad [k_1 + k_0 - \Phi(s)] N_0 = 0$$

$$(50) \quad N_0 \delta k_c(t) + [N_0 R(s) - \Phi(s)] \Delta N = 0$$

(on néglige les effets du second ordre).

L'équation de perturbation

$$(51) \quad N_0 \delta k_c(t) = [\Phi(s) - N_0 R(s)] \Delta N$$

permet de généraliser notre théorie et d'étudier les fluctuations de puissance du réacteur non linéaire dans le cas où la fonction $\delta k_c(t)$ est imposée par les fluctuations neutroniques, et non plus par la variation d'un facteur géométrique.

La loi d'excitation linéaire (42) se trouve alors remplacée (en l'absence de source) par :

$$(\tilde{k} - 1)\tilde{N} = [\Phi(s) - N_0 R(s)] \Delta N$$

Analogie avec l'effet du bruit de fond sur un auto-oscillateur radioélectrique.

Le comportement d'un réacteur présente de nombreuses analogies avec celui d'un auto-oscillateur radioélectrique.

a) en régime linéaire, c'est-à-dire à faible puissance ;

b) en régime non linéaire ;

c) sous l'effet d'une excitation extérieure, par exemple aléatoire.

Nous précisons maintenant certaines de ces analogies. Notons tout d'abord que la *puissance* (ou la densité neutronique) du réacteur a pour équivalent l'*amplitude* de l'oscillateur.

L'équation (49) fixe la puissance correspondant à une position donnée des barres de contrôle.

L'équation (51) est une équation de perturbation au voisinage d'un niveau stationnaire.

La condition $k_1 = 0$ correspond à une « condition d'accrochage ». Si k_1 est légèrement positif, la condition d'accrochage est légèrement dépassée, et la puissance (ici N) augmente. L'amplitude croît dans le cas d'un auto-oscillateur.

Le terme k_0 négatif entre alors en jeu. Il augmente en valeur absolue avec N , et la condition d'accrochage se rétablit automatiquement. On retrouve :

$$k_1 + k_0 = 0$$

Cette valeur de k_0 correspond à un niveau de puissance stationnaire. Dans le cas d'un auto-oscillateur dont l'amplitude se stabilise, la résistance négative (qui correspond à un excès de réactivité), imposée au départ par une condition géométrique, se trouve neutralisée par une résistance positive fonction de l'amplitude. L'oscillateur se stabilise sur un niveau quand la résistance totale est nulle.

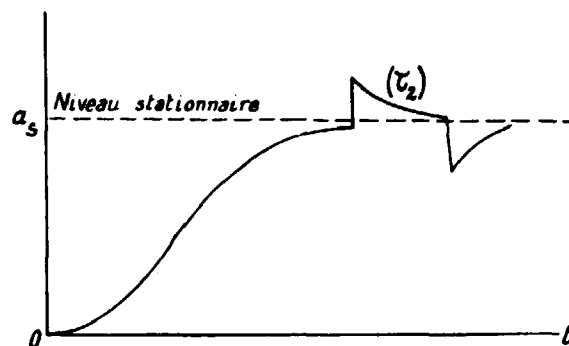


FIG. 26.

L'équation de perturbation, au voisinage d'un niveau stationnaire, permet de calculer la « constante de temps » τ_2 avec laquelle il y revient (dans l'hypothèse d'un niveau stable), à partir d'un léger écart initial.

D'autre part, si le système non linéaire est soumis à une succession de chocs aléatoires, l'évolution de l'amplitude ou de la densité neutronique N , se calculera de la même façon que celle d'un pendule simple de constante de temps τ_2 soumis à la même excitation.

La détermination du carré moyen des fluctuations a été développée de façon détaillée par A. Blaquièrre dans le cas des auto-oscillateurs. Le principe du calcul subsiste et nous nous contenterons d'énoncer ici un résultat important.

Le carré moyen des fluctuations est d'autant plus faible que la constante de temps τ_2 est plus petite, et comme τ_2 diminue quand l'amplitude (ou la densité neutronique N) augmente, on peut conclure que le bruit diminue, en régime non linéaire, lorsque la puissance augmente.

Inversement, lorsque l'on tend vers la « limite d'accrochage », correspondant ici à $k = 0$, l'amplitude stationnaire diminue, τ_2 tend vers zéro, et le carré moyen des fluctuations de bruit devient infini (théoriquement tout au moins).

A faible puissance, les conditions de fonctionnement sont pratiquement linéaires, l'étude du bruit du réacteur est alors justiciable des formules (37), (38), (39), obtenues plus haut.

Or on vérifie bien sur ces formules les conclusions énoncées ci-dessus. En effet, si on atteint la criticalité en faisant tendre \bar{S} vers zéro, et simultanément \bar{k} vers 1 dans la formule (39), on voit que $[\overline{N(t)}]^2$ tend vers l'infini.

Au voisinage de la criticalité \bar{S} est négligeable, puisque l'on a toujours :

$$\bar{S}l = \bar{N}(1 - \bar{k})$$

et la formule (30) devient pratiquement :

$$(52) \quad \overline{[N(t)]^2} = \frac{1 - \bar{k} + \lambda}{2(1 - \bar{k})(1 - \bar{k}' + \lambda)} \frac{1}{(\bar{k} - 1)^2 \bar{N}} \simeq \frac{\lambda(\bar{k}^2 - \bar{k})}{2(1 - \bar{k})(c + \lambda)} \bar{N}$$

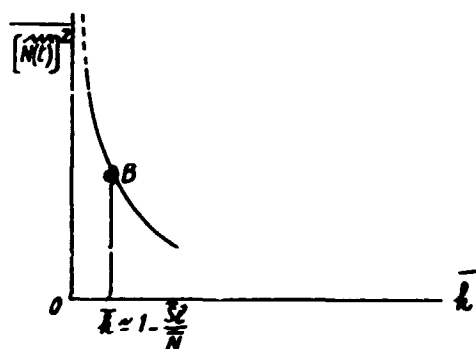


FIG. 27.

La représentation graphique du carré moyen de la fluctuation $[\overline{N(t)}]^2$ en fonction de \bar{k} présente une branche infinie pour $\bar{k} = 1$.

L'utilisation d'une source ramène \bar{k} à une valeur légèrement inférieure à 1.

$$\bar{k} \simeq 1 - \frac{\bar{S}l}{\bar{N}}$$

et, dans ces conditions, le graphique met en évidence une forte diminution du bruit, qui est représenté alors par le point B.

Un résultat analogue avait été énoncé par A. Blaquière à propos des auto-oscillateurs à lampes (1953). Son intérêt est devenu très actuel puisqu'il montre que, du point de vue du bruit neutronique, il n'y a aucun avantage à utiliser un réacteur critique et qu'il est bien préférable d'utiliser un réacteur sous-critique muni d'une source, même si cette dernière est faible.

Ce résultat peut être aussi justifié par la remarque qualitative suivante :

En régime linéaire, un réacteur juste critique dépourvu de source, comme un auto-oscillateur à l'accrochage, est un système indifférent, qui conserve donc indéfiniment la marque des perturbations neutroniques qu'il subit.

L'intégration de ces effets conduit à des fluctuations dont le carré moyen augmente au cours du temps, sans limitation.

Enfin, nous comparerons les fluctuations lentement variables et les fluctuations rapidement variables, en régime linéaire, données par les formules (37) et (38).

On voit que $[\overline{N_1(t)}]^2$ (fluctuations lentes) tend vers l'infini, quand \bar{k} tend vers 1, tandis que $[\overline{N_2(t)}]^2$ (fluctuations rapides) conserve une valeur finie dans ces conditions.

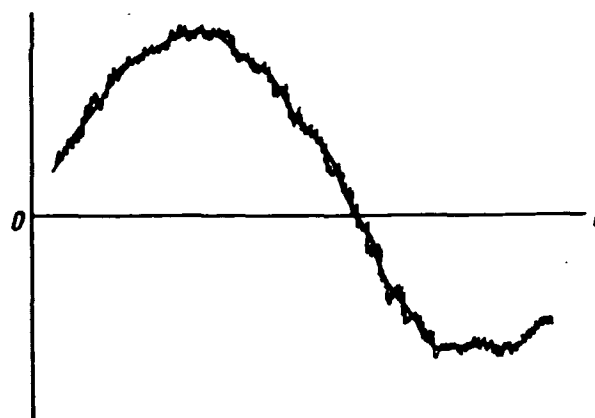


FIG. 28.

Ainsi, au voisinage de la criticalité, les fluctuations lentement variables deviennent prépondérantes : ce sont elles qui conduisent à la branche infinie de la figure (27). A ces dernières se superposent des fluctuations rapides de faible amplitude.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Fluctuation of the number of neutrons in a pile. E. D. COURANT, WALLACE. — Phys. Rev. 72, 11, 1038-1048 (1947).
- [2] A simplified theory of pile noise. — C. E. COHN, Nuclear Sc. and Engineering 7, 17-475 (1960).
- [3] The Rice formulation of pile noise. — E. F. BENNETT, Nuclear Sc. and Engineering 8, 53-61 (1960).
- [4] Fluctuations statistiques du nombre de neutrons dans une pile. — V. RAJEVSKI, Rapport C.E.A. N° 917 (1958).

[5] Fluctuations statistiques dans les piles. — V. RAJEVSKI, Rapport C.E.A. n° 1673 (1960).

[6] A. BLAQUIERE. --- Extension de la théorie de Nyquist au cas de caractéristiques non linéaires. Note aux comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 233, p. 345-349, 30 juillet 1951.

Journal de Physique et le Radium : les oscillateurs non linéaires et le diagramme de NYQUIST, t. 13, p. 527, Novembre 1952.

Adaptation générale de la méthode du diagramme de NYQUIST dans le domaine non linéaire, t. 13, p. 636, décembre 1952. Thèse de Doctorat de Physique et Annales de Radioélectricité. t. 8, p. 36 et t. 8, p. 153, 1953. Effet du bruit de fond sur la fréquence des auto-oscillateurs à lampes.

Thèse de Doctorat de Mathématiques : Mécanique non linéaire, les oscillateurs à régimes quasi sinusoïdaux, 1957.

Limite imposée par le bruit de fond à la précision des horloges radioélectriques. Annales Françaises de Chronométrie 26^e année, 2^e série, Tome X, 1956.

Mémorial des Sciences Mathématiques : Mécanique non linéaire, les oscillateurs à régimes quasi sinusoïdaux, Gauthier-Villars Ed., 1960.

Le diagramme de Nyquist généralisé et son application à l'étude de la stabilité des réacteurs nucléaires. Bulletin d'Information Scientifique et Technique du C.E.A. n° 41, 1960 et rapport C.E.A. n° 1700.

Cours d'Electronique publié sous la Direction du Pr P. GRIVET Tome IV. Le Bruit de fond (par P. GRIVET et A. BLAQUIÈRE). Masson et Cie Ed. 1958.

[7] Pile modulation and Statistical fluctuation in Piles O. K. FRISCH, D. T. LITTLER A.E.R.E. N/R 476 (1950).

Manuscrit reçu le 24 février 1961.

FIN