

# Métodos Sintéticos Analíticos de Solução da Equação de Transporte de Nêutrons com Aproximações da Teoria da Difusão Multigrupo de Energia

**Pedro Gabriel B. Moraes, Michel C. A. Leite e Ricardo C. Barros**

Departamento de Modelagem Computacional - Instituto Politécnico  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
Caixa Postal 97282  
28610-974 Nova Friburgo, RJ  
pgbmoraes@gmail.com  
chell\_leite@hotmail.com  
rcbarros@pq.cnpq.br

## RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos um programa computacional (um software) para modelar e gerar resultados em forma de tabelas e gráficos de problemas unidimensionais de transporte de nêutrons na formulação multigrupo de energia. O método numérico que utilizamos para resolver o problema de difusão de nêutrons é analítico, eliminando assim os erros de truncamento que aparecem em métodos numéricos clássicos, e.g., o método de diferenças finitas. Este método numérico analítico aumenta a eficiência computacional, uma vez que não são necessárias discretizações espaciais refinadas, pois para quaisquer grades de discretização espacial utilizadas, o resultado numérico gerado para um mesmo ponto do domínio permanece inalterado, a menos de erros de arredondamento da aritmética finita computacional. Optamos por desenvolver o aplicativo computacional na plataforma MatLab para computação numérica e a interface do programa é simples e facilitada com botões de comando. Consideramos relevante a modelagem deste problema de transporte de nêutrons com fonte fixa no contexto de cálculos de blindagem de radiação que protege a biosfera e equipamentos sensíveis à radiação ionizante.

## 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho desenvolvemos um método numérico para autoproblemas unidimensionais de difusão de nêutrons com dois grupos de energia. Este método gera soluções completamente livres de erro de truncamento espacial que aparece em todos os métodos numéricos convencionais aplicados a teoria da difusão, como resultado da discretização espacial da equação analítica da difusão, ou como resultado de aproximação do termo de fonte para cada grupo de energia, em geral por polinômios de baixa ordem. Observamos neste ponto que descrevemos duas estratégias para se determinarem as quatro constantes da solução geral por região que, em seguida, será substituída nos termos integrais da equação de transporte a dois grupos de energia, que resolvemos analiticamente. Portanto, o uso do termo método sintético para problemas de transporte refere-se à aproximação de mais baixa ordem (difusão) que usamos para aproximar os termos integrais do modelo de mais alta ordem, que é a equação integrodiferencial de transporte de nêutrons na formulação a dois grupos de energia.

A estratégia desenvolvida pelo primeiro coautor (PGBM) implementa em método espectral livre de erros de truncamento espacial para gerar primeiro uma solução numérica analítica nos cantos de cada região constituinte do domínio. Esta solução é usada como “condições de contorno” para cada região e, com elas, determinamos as quatro constantes da solução geral de difusão 2 grupos que vão determinar o valor numérico do fluxo escalar e da corrente total de nêutrons em cada ponto interior. A estratégia desenvolvida pelo segundo autor (MCAL) implementa um método analítico para se

determinarem essas constantes por região, utilizando as condições de contorno de problema de difusão 2 grupos e condições de continuidade do fluxo escalar e da corrente total nos dois grupos de energia nas interfaces das regiões constituintes do domínio unidimensional.

## 2 ESTRATÉGIAS DE DETERMINAÇÃO DA SOLUÇÃO GERAL LOCAL EM CADA REGIÃO

### 2.1 Estratégia Espectronodal

O método espectralnodal possui dois ingredientes principais. O primeiro ingrediente, que é convencional, caracteriza-se por cada equação de balanço espacial definida em cada nodo espacial e para cada grupo de energia. Este sistema de equações de balanço espacial é exato porque é obtido, sem erro, por integração das equações da difusão em sua formulação  $P_1$  [1] para cada grupo de energia no interior de um nodo espacial arbitrário. O segundo ingrediente, que não é convencional, é um sistema de equações auxiliares, também exato, e definido em cada nodo espacial. Este sistema de equações auxiliares contém parâmetros que preservam a solução geral da equação da difusão no interior de cada nodo.

As equações de balanço espacial juntamente às equações auxiliares e às condições de contorno formam as equações Espectro-Nodais de Difusão (END), que contêm três tipos de incógnitas: os fluxos escalares e as correntes totais nos cantos dos nodos espaciais para cada grupo de energia, os fluxos escalares médios e as correntes totais médias no interior dos nodos para cada grupo de energia. Os valores numéricos destas quantidades, obtidos ao se resolverem as equações END, são livres de erro de truncamento espacial e, desconsiderando os erros de arredondamento da aritmética finita computacional, são precisamente aqueles obtidos a partir da solução analítica do problema.

### 2.2 Estratégia Analítica

Nesta estratégia, consideramos um domínio unidimensional heterogêneo de comprimento  $X$  com  $N_R$  regiões conforme ilustramos na Figura 1.



**Figura 1: Domínio unidimensional heterogêneo**

O modelo matemático unidimensional da difusão com dois grupos de energia constitui um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem [2]. Portanto, a solução geral pode ser escrita como uma combinação linear de quatro funções elementares, que são funções exponenciais com expoentes distintos e que aparecem em pares de sinais opostos.

Usamos as condições de contorno para cada grupo de energia em  $x = 0$  e em  $x = X$  (Fig. 1), e obtemos 4 equações. Usando continuidade do fluxo escalar em cada grupo de energia nas interfaces das  $N_R$  regiões, obtemos  $2(N_R - 1)$  equações adicionais. Procedendo similarmente para a continuidade da corrente total em cada grupo de energia, obtemos mais  $2(N_R - 1)$  equações. Uma simples contagem indica que obtemos:

- 2 equações de contorno em  $x = 0$ ;

- $2(N_R - 1)$  equações de continuidade do fluxo escalar;
- $2(N_R - 1)$  equações de continuidade da corrente total;
- 2 equações de contorno em  $x = X$ .

Estas  $4N_R$  equações formam um sistema linear nas  $4N_R$  constantes que determinamos para podermos obter o fluxo escalar e a corrente total em qualquer ponto do domínio para os dois grupos de energia.

Observamos neste ponto que as quatro constantes determinadas por região do domínio, seguindo a estratégia descrita na seção 2.1, ou seguindo esta estratégia, são idênticas.

### 3. DISCUSSÃO

Os métodos sintéticos analíticos descritos neste trabalho foram implementados na plataforma Matlab do Laboratório de Modelagem Multi-escala e Transporte de Partículas (LabTran) e geraram muito bons resultados.

Claramente, a precisão dos valores numéricos gerados, a partir da solução analítica da equação de transporte com a aproximação sintética de difusão, depende da validade da teoria da difusão para o problema considerado. Em geral, para domínios muito absorvedores de nêutrons, que apresentam alta heterogeneidade, regiões estreitas em livres caminhos médios e com fontes localizadas [3], a teoria da difusão não é um bom modelo e o método descrito neste trabalho pode não gerar bons resultados.

### AGRADECIMENTOS

Este trabalho possui auxílio parcial do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

### REFERÊNCIAS

1. E. E. Lewis and W. F. Miller, Jr., *Computational Methods of Neutron Transport*, American Nuclear Society, La Grange Park, IL, EUA (1993).
2. K. D. Machado, *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*, Editora da Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, Brasil (2000).
3. W. M. Stacey, *Nuclear Reactor Physics*, John Wiley & Sons Inc., New York, NY, EUA (2001).