A

- Note C.E.A. n° 392 -

Services de Physique Appliquée
Section d'Optique Corpusculaire

AMORTISSEMENT DANS LES ACCELERATEURS DU AU RAYONNEMENT CLASSIQUE

par

F.E. MILLS

- 1962 -

MF / PA / RE

La présente édition de la Note CEA nº 392 annule et remplace celle que vous avez antérieurement reçue.

AMORTISSEMENT DANS LES ACCELERATEURS DU AU RAYONNEMENT CLASSIQUE

ABSTRACT

The rates of change of the magnitudes of the adiabatic invariants is calculated in the case of a hamiltonian system subjected to generalized non conservative forces. These results are applied to the case of the classical radiation of electrons in an accelerator or storage ring. The resulting expressions for the damping rates of three independent oscillation modes suggest structures which are damping in all three modes, while at the same time allowing "strong focussing" and the attendant strong momentum compaction.

AMORTISSEMENT DANS LES ACCELERATEURS DU AU RAYONNEMENT CLASSIQUE.

I. - INTRODUCTION.

Ce sujet a déjà été maintes fois traité dans la littérature [1] [2] , mais les résultats ont été obtenus sous une forme telle qu'il s'avère difficile de les étendre aux structures complexes. Les coefficients d'amortissement sont obtenus ici en fonction de la configuration géométrique des orbites, à savoir en fonction de la distribution de la courbure et de celle du gradient dans les champs de guidage. On aboutit ainsi, à des méthodes permettant de supprimer l'effet d'amplification radiale dans les structures à gradient alterné

II. - AMORTISSEMENT DU A UNE FORCE NON CONSERVATRICE

Considérons un système hamiltonien , perturbé par une force non conservatrice. Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} + F_i$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + Q_i$$

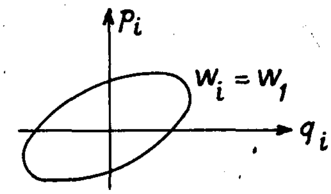
où F_i et Q_i, les taux de variation de p_i et de q_i dûs à la force non conservatrice, sont exprimés en fonction des variables canoniques et de la variable indépendante t.

Pour calculer l'effet de la force non conservatrice, nous cherchons à présent des quantités qui seraient constantes en absence de cette force. De telles quantités sont les variables d'action, invariants adiabatiques du mouvement. Les variables d'action sont précisement l'aire des courbes tracées dans l'espace des phases projeté dans chaque dimension, lorsque les particules sont soumises à leurs oscillations. Si les modes considérés sont des modes propres, c'est-à-dire des modes non couplés, alors la variable d'action dans chaque dimension est constante.

Considérons maintenant, une particule, dont la valeur de l'invariant W_i à un instant donné est W_1. On peut définir dans l'espace des phases une vitesse $\vec{V}$ dont les composantes sont $\frac{dq_i}{dt}$ et $\frac{dp_i}{dt}$.

En désignant par dl l'élément de longueur dans l'espace des phases, le taux de variation de l'aire est :

$$\frac{dW}{dt} = \int_{W_1} \vec{n}\,\vec{V}\,dl$$



où $\vec{n}$ est la normale unitaire extérieure à la courbe $W_i = W_1$. D'après le théorème de la divergence, il vient :

$$\frac{dW}{dt} = \int_{W_1} \text{div } V \, dk$$

où dk est l'élément de volume dans la projection de l'espace des phases. Nous supposons maintenant que div V ne dépend pas fortement de la valeur des variables canoniques et nous donnons ainsi à div V la valeur $(\text{div } V)_{e,o}$ qu'elle prend sur l'orbite d'équilibre centrale. Si cette hypothèse n'est pas vraie, alors le coefficient d'amortissement dépendra de la valeur de W, c'est-à-dire de l'amplitude. Nous trouverons ainsi le taux d'amortissement pour les petites oscillations autour de l'orbite d'équilibre centrale. Ainsi :

$$\frac{dW}{dt} = W \, (\text{div } V)_{eo}$$

La possibilité d'avoir un V dépendant du temps ne se trouve pas exclue. En général, cette variation sera périodique. On s'intéresse plus particulièrement à la moyenne de $\frac{dW}{dt}$ sur une période de la structure. Le coefficient d'amortissement s'écrit :

$$\beta = \frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = \overline{(\text{div } V)_{eo}}$$

A présent considérons à nouveau l'expression de V. On a :

$$\begin{aligned} \text{div } V &= \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} \\ &= -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \, \partial q_i} + \frac{\partial F_i}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \, \partial p_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial F_i}{\partial p_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Les termes dûs aux forces conservatrices se sont détruits, comme on s'y attendait. Il vient alors pour le coefficient d'amortissement du mode propre i :

$$\beta_i = \overline{\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_i}\right)_{eo}}$$

III. - VARIABLES CANONIQUES DANS LES ACCELERATEURS.

Il est pratique d'écrire le mouvement des particules dans un accélérateur dans le trièdre de Serret-Frénet associé à une courbe dans l'espace. Nous choisirons cette courbe comme orbite centrale d'équilibre dans l'accélérateur. Nous la choisirons plane, de sorte qu'elle peut être caractérisée par la courbure Ω seule. Soit s l'abscisse curviligne sur cette courbe. La coordonnée x est définie comme étant l'écart dans le sens de la convexité et la coordonnée z l'écart dans la direction perpendiculaire à s et à x, telle que le trièdre (s, x, z) est direct. La courbure $\Omega(s)$ est déterminée par la valeur B_{zo} sur l'orbite d'équilibre de la composante en z du champ magnétique. On a :

$$\Omega(s) = \frac{e B_{zo}}{c p_o}$$

où p_o est la quantité de mouvement d'une particule sur l'orbite centrale d'équilibre mentionnée ci-dessus. Nous pouvons également tenir compte de champs multipolaires de tous les ordres pour la focalisation, mais dans le cas présent nous n'envisageons que des champs quadrupolaires. Ceux-ci seront tels que le couplage entre les modes en x et z sera exclu. Les champs quadrupolaires peuvent être caractérisés par la valeur $\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)_o$ sur l'orbite d'équilibre centrale du gradient du champ. Posons :

$$K(s) = \frac{e}{c p_o} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)_o$$

Pour décrire le mouvement nous choisirons s plutôt que le temps comme variable indépendante. Le mouvement peut alors être décrit par un nouvel hamiltonien $G(x, p_x, z, p_z, t, H, s)$ où $-H$ est le moment conjugué du temps t. G qui n'est en fait que $-p_s$ exprimé en fonction de ces variables, s'écrit [3] :

$$G = -\frac{e A_s}{c} - (1 + \Omega x)\sqrt{\left(\frac{\mathcal{H}}{c}\right)^2 - (mc)^2 - p_x^2 - p_z^2}$$

Nous avons ici exclu les composantes B_s du champ. En remplaçant A_s par son expression en fonction de Ω et de K et en développant jusqu'au second ordre inclusivement, il vient :

$$G = p_o \left\{ \Omega(s)\, x + \left[K(s) + \Omega^2(s)\right] \frac{x^2}{2} - K(s) \frac{z^2}{2} \right\}$$
$$+ \frac{1}{2 p_o} \left[p_x^2 + p_z^2\right] - p_o (1 + \Omega x) \left(1 + \frac{\Delta p}{p_o}\right) + a_1(s, t)$$

où Δp est l'écart de quantité de mouvement de la valeur p_o, considéré comme fonction de l'énergie totale $\mathcal{H}$ et $a_1(s, t)$ représente le terme provenant de $\frac{eA_1}{c}$ qui produit l'accélération de la particule. Remarquons que la quantité $\frac{\partial a_1}{\partial t}$ est le champ électrique d'induction dans les cavités.

Les solutions correspondant à ces hamiltoniens sont bien connues. Il est possible avec une bonne approximation de séparer le mouvement suivant trois modes : les oscillations bêtatron radiales et verticales et les oscillations synchrotron. L'équation du mouvement en x s'écrit :

$$\frac{d^2 x}{d s^2} + \left[\Omega^2 (s) + K(s) \right] x = \Omega (s) \frac{\Delta p}{p}$$

L'intégrale particulière de cette équation donne le glissement de la position radiale de l'orbite, en fonction de s, pour la particule possédant un écart de quantité de mouvement Δ_p. Cette solution s'écrit :

$$x_e (s, \mathcal{H}) = R \frac{\Delta p}{p_o} \alpha (s)$$

où $2 \pi R$ est la longueur de l'orbite d'équilibre centrale. La valeur moyenne de $\alpha (s)$ est en général $1/\nu_x^2$, où ν_x est le nombre d'onde de l'oscillation bêtatron radiale. Les oscillations bêtatron radiales sont par définition les oscillations autour de cette orbite d'équilibre. Les oscillations synchrotron sont liées au changement d'énergie dû aux cavités et au mouvement radial de l'orbite d'équilibre x_e qui en résulte. La supposition que les trois modes sont indépendants repose sur le fait que les oscillations en énergie sont habituellement très lentes par rapport aux oscillations bêtatron radiales. Ainsi la structure fine des oscillations bêtatron radiales est moyennée sur une oscillation synchrotron, tandis que le mouvement radial de l'orbite d'équilibre et le changement des paramètres de focalisation qui en résulte, est adiabatique du point de vue des oscillations bêtatron radiales.

IV. - AMORTISSEMENT PAR RAYONNEMENT.

Nous supposons que l'émission des photons par les électrons est instantanée. En outre nous négligeons les fluctuations quantiques. C'est-à-dire nous considérons le rayonnement comme étant une perte continue d'énergie et de quantité de mouvement par unité de longueur (ou de temps) dirigée dans le sens opposé au sens du mouvement des électrons. En outre nous supposons que $\beta = 1$. Ceci entraînera la perte de quelques termes, mais ces derniers seront petits pour la plupart des énergies présentant un intérêt. Dans ce cas, nous pouvons également négliger la quantité de mouvement cédée au champ de guidage.

Considérons le rayonnement émis lorsqu'une particule se déplace de ds, où ds est petit par rapport à la longueur d'onde de l'oscillation. La particule rayonne une énergie de $\frac{L_\gamma}{c} d\sigma$ et perd une quantité de mouvement de $\frac{L_\gamma}{c^2} d\sigma$, où $d\sigma$ est l'unité de longueur d'arc donnée par :

$$d\sigma^2 = (1 + \Omega x)^2 ds^2 + dx^2 + dz^2$$

et L_γ le taux instantané d'énergie rayonnée :

$$L_\gamma = \frac{2e^4}{3m^2c^3} B^2 \left(\frac{E}{mc}\right)^2 = \eta B^2 \mathcal{H}^2$$

Considérons tout d'abord le mouvement en z. Ni la position de la particule, ni la position en z de l'orbite d'équilibre ne changent. Ainsi $Q_z = 0$.

D'autre part, la quantité de mouvement en z se trouve changée de :

$$dp_z = - \frac{p_z}{p_o} \frac{L_\gamma}{c^2} d\sigma$$

Alors :

$$F_z = - \frac{p_z}{p_o} \frac{L_\gamma}{c^2} \frac{d\sigma}{ds}$$

Nous nous intéressons ici au taux d'amortissement dans le temps et non au taux par unité de longueur ds, qu'on obtiendrait directement en utilisant les formules précédentes. Pour faire ce passage, nous multiplions par la vitesse c et nous obtenons :

$$\beta_z = \overline{c \left(\frac{\partial F_z}{\partial p_z}\right)_o}$$

Nous remarquons que $\frac{d\sigma}{ds}$ contient le terme $\left(\frac{dz}{ds}\right)^2$ qui est relié de façon simple à la quantité de mouvement p_z. Puisque ce terme est quadratique et puisque avec notre définition de l'orbite centrale $(p_z)_o = o$, sa contribution sera nulle. Alors :

$$\beta_z = - \overline{\left(\frac{L_\gamma}{p_o c}\right)_o} = - \eta \frac{(p_o c)^3}{e^2} \overline{\Omega^2 (s)}$$

Le mouvement radial est à la fois dû à l'oscillation bêtatron radiale et aux oscillations synchrotron. Afin de séparer quelque peu les deux modes, il est commode d'effectuer une transformation conduisant à de nouvelles variables X, π, z, p_z, $\mathcal{H}$, $\mathcal{T}$.

La fonction génératrice est :

$$S = \left[\pi + p_{ex}(s)\right] \left[x - x_e(s)\right] + p_z z - \mathcal{H} t.$$

où $p_{ex} = p_o \frac{dx_e}{ds} = \alpha'(s) R \Delta p$ est la quantité de mouvement en x de l'orbite d'équilibre ayant un écart en énergie. La transformation conduit à :

$$\begin{aligned}
X &= x - x_e(s) \\
\pi &= p_x - p_{xe}(s) \\
z &= z \\
p_z &= p_z \\
\mathcal{H} &= \mathcal{H} \\
\mathcal{T} &= t - \frac{RX}{c} \alpha'(s) + \left[\pi + p_{xe}(s)\right] \frac{R\alpha(s)}{p_o c}
\end{aligned}$$

La transformation change légèrement la variable temps par addition de plusieurs termes dûs aux oscillations bêtatron radiales dans la structure. La moyenne de ces termes sur plusieurs oscillations est nulle ; c'est tout simplement la structure fine classique de l'oscillation synchrotron due à l'oscillation bêtatron.

Nous pouvons maintenant calculer le coefficient d'amortissement des oscillations bêtatron radiales. Le moment conjugué π change à la fois à cause de la variation de la quantité de mouvement p_x et du changement de position de l'orbite d'équilibre :

$$d\pi = dp_x - dp_{xe}$$

$$= - \frac{\pi_x + p_{xe}}{p_o} \frac{L_\gamma}{c^2} d\sigma + \frac{L_\gamma}{c^2} \alpha'(s) R\, d\sigma$$

Alors :

$$F_x = - \frac{\pi + p_{xe}}{p_o} \frac{L_\gamma}{c^2} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{L_\gamma}{c^2} \alpha'(s) R \frac{d\sigma}{ds}$$

Nous remarquons que dans le second terme π ne figure qu'au carré et que, en conséquence, sa contribution à l'orbite centrale sera nulle. La position radiale ne change pas pendant le rayonnement, mais la position de l'orbite d'équilibre change en donnant un terme Q_x.

$$dX = dx - dX_e$$

$$= O + \frac{L_\gamma}{c^2} \alpha(s) \frac{R}{p_o} d\sigma$$

$$Q_x = \frac{L_\gamma}{c^2} \alpha(s) \frac{R}{p_o} \frac{d\sigma}{ds}$$

Nous voyons que les termes Q_x et F_x donneront une contribution à β_x due à la fois au fait que β donc L_γ dépendent de x et Q au changement de longueur d'arc dans le terme de $\frac{d\sigma}{ds}$

$$\beta_x = c \left(\overline{\frac{\partial F_x}{\partial \pi} + \frac{\partial Q_x}{\partial X}} \right)_o$$

$$= + \eta \frac{(p_o c)^3}{e^2} \left[- \overline{\Omega^2(s)} + 2 \overline{R \Omega(s) K(s) \alpha(s)} + R\, \overline{\Omega^3 \alpha(s)} \right]$$

Le temps t ne change pas à cause du rayonnement. La variable de temps transformée τ peut changer, car p_{xc} dépend de l'énergie, mais ces termes sont indépendants du temps et ne contribuent donc pas à l'amortissement. L'énergie totale $\mathcal{H}$ change d'après :

$$\frac{d}{ds}(-\mathcal{H}) = \frac{L_\gamma}{c} \frac{d\sigma}{ds} = F_\tau$$

F_τ dépend de l'énergie de trois façons différentes. Premièrement F_τ dépend de l'énergie puisque $\mathcal{H}^2$ en dépend directement. Deuxièmement il en dépend par l'intermédiaire de B^2 à cause du changement de la position de l'orbite. Troisièmement il en dépend à cause du changement de la longueur d'arc de l'orbite ayant un écart en énergie.

Nous trouvons :

$$\beta_{\tau} = c\,\overline{\left(\frac{\partial F_{\tau}}{\partial(-\delta)}\right)_o}$$

$$= -\frac{\eta (p_o c)^3}{e^2}\left[2\,\overline{R\Omega(s)\,K(s)\,\alpha(s)} + R\,\overline{\Omega^3(s)\,\alpha(s)} + 2\,\overline{\Omega^2(s)}\right]$$

Nous remarquons que le taux moyen de perte d'énergie par rayonnement est :

$$W_\gamma = \overline{L_\gamma} = \eta\,\frac{(p_o c)^4}{e^2}\,\overline{\Omega^2(s)}$$

Alors la somme des coefficients d'amortissement est :

$$\sum \beta_i = -4\,\frac{W_\gamma}{p_o c}$$

Ce qui est en accord avec les résultats prévus (1).

V. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

En général les fonctions Ω et K sont bien connues, mais on ne dispose pas d'expressions analytiques utilisables de α. L'équation en α est :

$$\alpha'' + (\Omega^2 + K)\,\alpha = \frac{\Omega}{R}$$

La valeur moyenne de α pour les grands accélérateurs est $1/\nu_x^2$. On peut diviser α en deux parties, la partie constante qui vaut $1/\nu_x^2$ et une partie périodique de valeur moyenne nulle. Nous voyons alors que α' et α'' sont de valeur moyenne nulle. Multiplions l'équation ci-dessus par Ω et moyennons sur une période. Il vient :

$$\overline{\alpha''\Omega} + \overline{\Omega^3\alpha} + \overline{K\alpha\Omega} = \frac{\overline{\Omega^2}}{R}$$

Considérons maintenant un accélérateur sans section droite qui a la même valeur constante de Ω dans tous ses aimants. Alors le premier terme à gauche est nul et on trouve :

$$R\,\overline{K\alpha\Omega} = -\frac{1}{\rho^2\nu^2} + \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2}\left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)$$

en posant : $\Omega = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}$

Alors pour les coefficients d'amortissement on trouve :

$$\beta_z = -\frac{W_\gamma}{p_o c}$$

$$\beta_x = \frac{W_\gamma}{p_o c}\left[-1 + 2\left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) + \frac{1}{\nu^2}\right] = \frac{W_\gamma}{p_o c}\left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)$$

$$\beta_{\tau} = -\frac{W_\gamma}{p_o c}\left[+2 + 2\left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) + \frac{1}{\nu^2}\right] = -\frac{W_\gamma}{p_o c}\left[4 - \frac{1}{\nu^2}\right]$$

Comme second exemple, nous choisirons une structure FFAG "scaling". Si la modulation de l'orbite d'équilibre n'est pas grande alors avec une bonne approximation, $\alpha\,(s)$ est une constante puisque les orbites d'impulsion différentes sont tout simplement des agrandissements photographiques les unes des autres. Si le champ de guidage est donné par $B = Bo\,(\frac{r}{ro})^k$ alors $\alpha = \frac{1}{1+k}$.

D'autre part k est proportionnel à Ω, car $\frac{dB}{dR} = \frac{kB}{R}$. Alors $K\,(s) = \frac{k}{R}\,\Omega\,(s)$. Nous pouvons utiliser les équations du mouvement ci-dessus pour trouver le terme : $\overline{\Omega^3\,\alpha}$:

$$\overline{K\,\alpha\,\Omega} = \frac{k\;\overline{\Omega^2}}{R\,(1+k)}$$

$$\overline{\Omega^3\,\alpha} = \frac{\overline{\Omega^2}}{R} - \overline{K\,\alpha\,\Omega} = \frac{\overline{\Omega^2}}{R}\,(1 - \frac{k}{1+k}) = - \frac{\overline{\Omega^2}}{R}\;\frac{1}{1+k}$$

Alors nous trouvons pour les coefficients d'amortissement :

$$\beta_z = - \frac{W_\gamma}{p_o c}$$

$$\beta_x = \frac{W_\gamma}{p_o c}\left[1 - \frac{1}{1+k}\right]$$

$$\beta_\tau = \frac{W_\gamma}{p_o c}\left[4 - \frac{1}{1+k}\right]$$

Nous voudrions utiliser ces résultats pour des structures simples afin d'essayer de supprimer l'amplification radiale dans les anneaux de stockage à électrons, tout en conservant la grande compression des moments dans les structures à gradient alterné. Nous remarquons que dans les deux cas précédents, le terme $\overline{\Omega^3}\,\alpha$ est petit et de l'ordre de $1/\nu_x^{\,2}$, tandis que les autres termes sont de l'ordre de un. L'amplification vient essentiellement du terme $\overline{2\,R\,K\,\alpha\,\Omega}$ qui dans les structures ordinaires est de l'ordre de 2 par rapport à 1. Nous remarquons que dans les aimants F (focalisation radiale) la valeur de k est positive, tandis que la valeur de α est positive et maximum. Ainsi nous pouvons espérer réduire ce terme en réduisant la valeur de Ω, même jusqu'à zéro dans les aimants F.

Nous pourrions par exemple songer à utiliser des quadruples comme aimants F. Ceci peut avoir deux effets nuisibles. D'une part la dimension de l'anneau est deux fois plus grande et d'autre part la valeur maximum de α, qui détermine l'ouverture exigée pour contenir une certaine bande d'énergie, sera probablement plus grande. Dans le cas extrême, on pourrait arriver à une situation où α est grand et négatif dans les aimants D, conduisant ainsi de nouveau à l'amplification.

Une autre possibilité pour supprimer l'amplification des oscillations bêtatron radiales est d'utiliser une configuration magnétique à fonctions séparées, composée de prismes à gradient nul pour assurer la courbure et de quadrupoles pour assurer la focalisation. Dans ce cas $K\,(s)$ ainsi que $\Omega\,(s)$ sont nuls dans toutes la structure, de sorte que le terme $\overline{2\,R\,K\,\alpha\,\Omega}$

est toujours nul. Les autres termes conduisent à une relation entre le facteur local de compression des moments dans les prismes α_m et le facteur circonférentiel R Ω . Cette relation doit être satisfaite de façon à donner un amortissement. Elle s'écrit :

$$\alpha_m R \Omega < 1$$

Le fait que la compression des moments doit être grande pour que cette relation soit satisfaite est intéressant, car cela signifie que la focalisation doit être forte pour avoir un amortissement radial.

Une suggestion d'AMMAN [4] nous conduit à un cas simple. Nous remarquons que la définition de "n" dans la terminologie classique des accélérateurs conduit à :

$$n = - \frac{K}{\Omega^2}$$

pourvu que l'on suppose que n n'est défini que dans les prismes.

Alors l'expression de β_x devient :

$$\beta_x = - \frac{\eta (p_o c)^3}{c^2} \left[- \overline{\Omega^2} + R \alpha \overline{\Omega^3 (1 - 2n)} \right]$$

On voit qu'en choisissant $n = \frac{1}{2}$ dans les prismes, les oscillations bêtatron radiale et verticale sont amorties avec le même coefficient d'amortissement et la question de la valeur du facteur de compression des moments dans les prismes ne se pose pas. Ainsi on a une liberté totale dans le choix de la force des quadrupoles pour la focalisation transversale, sans pour autant influencer l'amortissement des oscillations.

Manuscrit reçu le 17 mai 1962

Edité par
le Service de Documentation du C.E.A.
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Boîte Postale n° 2 - GIF-sur-YVETTE (S.-et-O.)
France.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ROBINSON K.W.
Phys. Rev. III, 1958, 373.

[2] KOLOMENSKIJ A.A. et LEBEDEV A.N.
Proc. Symp. High Energy Accelerators and Pion Physics I, CERN, Geneva, 1956, p. 447.

[3] COURANT E.D. et SNYDER M.S.
Annals of Phys. 3, 1958, 1.

[4] AMMAN F.
Communication privée concernant les résultats du projet d'anneau de stockage de Frascati.