



KZ0201139

190

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ИДЕИ В ВОПРОСЕ О СОБСТВЕННОМ ВРАЩЕНИИ ТЕЛ В МЕХАНИКЕ ОТО

М.М. АБДИЛЬДИН, М.С. ОМАРОВ, А.А. КОМАРОВ

Казахский Государственный Университет имени аль-Фараби, г. Алматы,
Республика Казахстан

Нами [1] была высказана идея об использовании гидродинамической аналогии при исследовании вопроса о собственном вращении пробного тела (с массой m) движущегося в гравитационном поле вращающегося центрального тела (с массой m_0) в механике общей теории относительности (ОТО). В результате была доказана теорема: вопрос о собственном вращении пробного тела, движущегося в гравитационном поле вращающегося центрального тела решается с помощью простой гидродинамической формулы:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}, \quad (1)$$

где $\vec{v}$ - угловая скорость пробного тела, $\vec{v}$ - скорость его поступательного движения, рассматриваемая как функция канонически сопряженных переменных $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

Действительно, исходя из метрики первого приближения механики ОТО [1]:

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2} \int \frac{\rho' \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) - P_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 \right) dt^2 -$$

$$- \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2} (U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3) dt,$$

где ρ' - плотность массы, v_i - компоненты скорости внутри тела, Π - упругая энергия единицы массы, P_{kk} - трехмерный тензор напряжения, U , U_i - ньютонов потенциал и вектор - потенциал.

Для вращающегося жидкого шара (2) приобретает вид [1]:

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U \left(1 - \frac{\xi_0}{m_0 c^2} \right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7m_0 c^2} (\vec{S}_0 \vec{\nabla}) \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) d\vec{r}^2 + \frac{8}{c^2} (\vec{U} d\vec{r}) dt, \quad (3)$$

где $\vec{S}_0$ - угловой момент шара, $U = \frac{\gamma m_0}{r}$, $\vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3} [\vec{r} \times \vec{S}_0]$.

Напомним так же:

$$(\vec{S}_0 \vec{\nabla}) \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = -\frac{S_0^2}{r^3} + \frac{3(\vec{r} \vec{S}_0)^2}{r^5} \quad (4)$$

что касается

$$\xi_0 = \frac{8}{3} T_0 + \frac{2}{3} \epsilon_0, \quad (5)$$

то здесь T_0 - кинетическая энергия вращающегося тела, ϵ_0 - взятая с обратным знаком энергия взаимного притяжения частиц.

Функция Лагранжа, описывающая движение пробного тела:

191

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + mU - \frac{mU^2}{2c^2} + \frac{3mUv^2}{2c^2} + \frac{mv^4}{8c^2} - \frac{4m(\vec{U} \vec{v})}{c^2} - \frac{rU\xi_0}{m_0 c^2} - \frac{2\gamma m}{7m_0 c^2} (\vec{S}_0 \vec{\nabla}) \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \quad (6)$$

Теперь, для определения характера собственного вращения пробного тела ($w=0$, при $t=0$), воспользуемся гидродинамической аналогией. Для определения $\vec{v}(\vec{r}, \vec{p})$ в начале находим импульс:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(1 + \frac{1}{c^2} \left(3U + \frac{v^2}{2} \right) \right) m \vec{v} - \frac{4m}{c^2} \vec{U} \quad (7)$$

Разрешим это выражение относительно скорости. Тогда:

$$\vec{v}(\vec{r}, \vec{p}) = \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(3U + \frac{P^2}{2m} \right) \right) \frac{\vec{P}}{m} + \frac{2\gamma}{c^2 r^3} [\vec{S}_0 \times \vec{r}] \quad (8)$$

Подставляя это выражение в (1), имеем

$$\vec{\omega} = \frac{3\gamma m_0}{2mc^2 r^3} \vec{M} + \frac{2}{c^2} \text{rot} \vec{U} = \frac{3\gamma m_0}{2mc^2 r^3} [\vec{r} \times \vec{p}] + \frac{\gamma}{c^2 r^3} (3\vec{r}(\vec{r} \vec{S}_0) - r^2 \vec{S}_0), \quad (9)$$

где $\vec{M}$ - орбитальный момент пробного тела.

Этот результат совпадает с результатом, найденным другим, более сложным путем, а именно - интегрированием релятивистского уравнения вращательного движения, полученного в [2] методом Фока. Таким образом, теорема доказана и мы убеждаемся, что гидродинамическая аналогия может оказаться весьма эффективным методом исследования задач механики ОТО.

Обратим также внимание и на другой момент. Приобретенное пробным телом собственное вращение (9) носит релятивистский характер, является релятивистским эффектом, т. е. следствием механики ОТО. Это обстоятельство созвучно с ситуацией в квантовой механике, где наличие спина у частицы - релятивистский эффект и находит объяснение только в релятивистской квантовой механике.

Литература

1. Абильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата, Наука, 1988. 198 с.
2. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М., Наука, 1972.